SIMBOLOGÍA MATEMÁTICA, UNA RETROSPECTIVA CONCISA[1]

Alejandro R. Garciadiego

I

Si se recurre a un diccionario de la lengua española, impreso a mediados del siglo pasado, es posible que aún se encuentre descrito el vocablo 'matemáticas' como aquél que se refiere a la ciencia de la cantidad y de la medida.[2] Esta definición refleja la percepción generalizada de que esta rama del conocimiento está conformada por la aritmética, geometría, trigonometría, álgebra y cálculo diferencial e integral. Para el público general era, y todavía es, común percibir dicha disciplina como la herramienta que ayuda a contar, medir y calcular. Se concibe que aquellos que son ágiles con el manejo de operaciones mentales, es decir con la manipulación de los números, sean aptos para esta asignatura.

1. Deseo agradecer los comentarios, sugerencias y críticas a una versión anterior, de mis colegas Miguel Arizú, Julio César Guevara y Carlos Uregas.
2. *Diccionario Enciclopédico U.T.E.H.A.* 1952. México: UTEHA. Vol VII, Pág. 305.

A pesar de que actualmente la percepción entre el público general no ha variado mucho,[3] ahora es posible encontrar, en fuentes semejantes, definiciones más sofisticadas y elaboradas de ese mismo concepto. Así no sólo se subraya el carácter deductivo del método empleado, se particulariza la esencia abstracta de los elementos que la componen y el hecho de que no únicamente se estudian las propiedades de dichos objetos (*e.g.*, números, figuras), sino también los atributos y relaciones que existen entre ellos.[4] Ha sido necesario actualizar dicha especificación como consecuencia del surgimiento de nuevas ramas de las matemáticas (*e.g.*, teoría de conjuntos, entre otras) que han sido incorporadas al currículo de enseñanza y que ahora son del conocimiento popular y que no necesariamente se usan para contar, medir y/o calcular.

Aparentemente, el conocimiento matemático se distingue de otras formas de saber ya que éste, al menos, es continuo, lineal y acumulativo. Este último adjetivo sugiere que ante el adelanto de nuevas ideas no necesariamente se descartan las anteriores, sino que, de alguna forma, sirven de base y apoyo a las subsiguientes. Este no es el caso de otras disciplinas donde desarrollos inéditos tornan obsoletos conocimientos previos y vuelven innecesaria su enseñanza y estudio (*e.g.*, la concepción aristotélica de un mundo plano y en reposo; la indivisibilidad del átomo). El vocablo lineal insinúa una progresión en torno a la complejidad de los conceptos. Estos, supuestamente, forman una sucesión al menos, armoniosa y regular que va de lo más sencillo a lo más complejo. Aquí no se debe confundir el proceso analítico de investigación, con el posterior método sintético de presentación. Esta serie de nociones matemáticas supuestamente no tiene agujeros, ni brincos, ni interrupciones. Además de incluir el carácter abstracto de sus componentes, se debe incorporar el lenguaje simbólico con que se expresan. Por supuesto, estas cualidades no son suficientes para caracterizar de manera única e inequívoca, el campo del saber de las matemáticas. Conocemos otras disciplinas, como la filosofía y física que, al compartir fronteras comunes con las matemáticas, en ocasiones, resultan difícilmente distinguibles de ésta.

No es necesario subrayar las dificultades que se enfrentan en un intento por tratar de definir de manera precisa en qué consiste dicha disciplina. No se puede definir por su contenido porque éste ha variado con el paso del tiempo. Algunas de sus ramas han desaparecido (*e.g.*, gematría), otras han pasado a formar parte de otras ciencias (*e.g.*, óptica) y otras se han independizado (*e.g.*, música). El modo de expresión tampoco ha sido universal. La historia recuerda un periodo extenso de tiempo donde la forma de manifestar las ideas poseía una mayor jerarquía que la precisión de los resultados. Tampoco existe una metodología universal que permee sus diferentes materias o los distintos ciclos de su desarrollo. En particular, en lo que sigue, se mencionarán, con ánimo introductorio, algunos ejemplos que muestran que el desenvolvimiento de la simbología no ha sido lineal, continuo y acumulativo.

II

Carl Sagan ha subrayado el breve lapso de tiempo que la raza humana ha formado parte del universo en comparación con la edad aproximada de este último.[5] Más recientes son incluso los orígenes de las fuentes históricas que nos permiten tratar de entender cuándo, cómo, por qué y en dónde se desarrollaron las primeras ideas. Se dice que, en el caso de las nociones matemáticas y con una antigüedad aproximada de unos treinta y cinco mil años, el documento histórico más antiguo que se conoce es un hueso (el peroné de un babuino) que tiene talladas veintinueve muescas que sugieren un proceso de contar algo.[6] Existen

3 El sistema pedagógico mexicano insiste en la práctica y repetición de operaciones mentales como parte fundamental de la formación matemática de un individuo (véase, entre otros, Jorge A. Zúñiga Topete *et al.* 2003. *Cálculo mental y estimación de resultados 3*. México: Editorial Progreso).

4 *Diccionario Enciclopédico Larousse*. 1984. México: Planeta. Vol. V. Pág. 1535.

5 Carl Sagan. 1977. *The dragons of Eden. Speculations on the evolution of human intelligence*. New York: Ballantine Books. Págs. 13 – 17.

6 Richard Mankiewicz. 2000. *Historia de las matemáticas*. Barcelona: Paidós. (1ra ed). Pág.10.

otros fósiles semejantes de los cuales se puede especular muy poco. Por ejemplo, en el caso de un fémur de lobo descubierto en la antigua Checoslovaquia, con aproximadamente treinta mil años de antigüedad, las muescas están divididas en grupos de cinco, lo que sugiere no únicamente un método de inventariar algo, sino que se da un paso adelante y se sugiere una manera de abreviar el proceso de enumeración, es decir, se vislumbra la noción de una base numérica. Es importante señalar que, contrario a lo que podría sugerir la intuición histórica o lógica, no es la base diez la primera en surgir, sino la cinco. El día de hoy, sobreviven seres humanos que, al mantenerse al margen del desarrollo de la cultura contemporánea, preservan costumbres que pueden ser tan antiguas como los fósiles ya mencionados. Algunos de estos individuos habitan las márgenes del río Amazonas, otros la sabana Australiana y, aun otros, Nueva Guinea. Ninguna de estas comunidades formuló la base diez. En el caso particular de los miembros de la tribu Sibiller de Nueva Guinea, desarrollaron la base cuarenta y uno.[7] Con el propósito de numerar algo, esta base surge del proceso de señalar, con el dedo índice de una mano, diversas partes del cuerpo. Así como emerge la noción de base para abreviar el proceso de enumerar, de la misma manera aflora la idea de símbolo para simplificar el uso y descripción de la propia base cuando esta se torna más compleja como resultado de la necesidad de contar objetos más numerosos.

Con el descubrimiento de la agricultura y el surgimiento de las culturas sedentarias aparece una nueva necesidad que habrá de tornarse básica: medir el tiempo. Ahora es de fundamental importancia precisar cuál es el mejor momento para plantar y cosechar; de saber cuándo llegan las lluvias y cuándo se inicia el frío. La solución de un problema de tal envergadura requirió de muchos años de observación, estudio y análisis. Sorprende el grado de precisión con el que diversas culturas lo solucionaron. En particular, los mayas llegaron a la conclusión que un año tenía una duración de trescientos sesenta y cinco días y una pequeña fracción. Decidieron que estos últimos días los dedicarían a festividades religiosas y descanso. Ahora, para simplificar sus cálculos, decidieron dividir el tiempo restante (360 días) en grupos de veinte días, lo que les daría un total de dieciocho meses. Todos con la misma duración. Otras culturas dieron vida a resultados similares al igual que precisaron de abreviar sus cálculos. Los babilónicos decidieron usar la base sesenta y los egipcios la diez. Para reducir su representación decidieron introducir imágenes, que podrían tener un significado en su vida diaria, pero que poseían una connotación específica, además de su significado obvio y convencional. Así introdujeron los primeros símbolos.[8]

Estas culturas legaron distintas fuentes (*e.g.*, papiros, tabletas, edificaciones, códices, entre otros) que permiten conjeturar el grado de avance de sus descubrimientos. Desgraciadamente, los recursos son repetitivos, fragmentados y aislados y no permiten establecer reconstrucciones históricas que sean definitivas y concluyentes. Los especialistas discuten y argumentan cómo se pueden interpretar dichos argumentos a la luz de hoy. Algunos debaten problemas aritméticos, otros de carácter geométrico y aún otros, supuestamente, de naturaleza algebraica. Parte de este conocimiento lo heredaría el pueblo griego.

Se dice que sabios griegos viajaron por el oriente y conocieron culturas anteriores, aunque no faltan estudios modernos que lo niegan o, al menos, lo cuestionan.[9] La transmisión de

7 Véase, entre otros: Georges Ifrah. 1987. *Las Cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial. Pág. 14; y David Bergamini. 1980. *Matemáticas*. México: Time-Life International de México. (Colección Científica de Time-Life). Pág. 19.

8 Carl G. Jung (editor). 1964. *Man and his symbols*. New York: Doubleday. Pág. 20.

9 Véase, por ejemplo: John Bonnet. 1803. *General history of mathematics, from the earliest times, to the middle of the Eighteenth century*. Londres: J. Johnson, St. Paul's Churchyard. Pág. 16. *Cf.* Leonid Zhmud. 1996. "Las matemáticas griegas y el oriente". *Mathesis* 12, 108 – 145.

un cuerpo de conocimientos, de una cultura a otra, no necesariamente es acrítica, llana, lisa y limpia de asperezas. Algunos conceptos son asimilados de manera directa, otros son revalorados y aun otros son ignorados o rechazados. En particular, los griegos no adoptaron las formas de expresión simbólicas babilónica ni egipcia en torno al concepto de número. Por otro lado, las fuentes griegas también se encuentran en estado fragmentario. De diversos períodos de esta cultura han sobrevivido textos de una variedad de ramas de las matemáticas, en distintos grados de completez. Así, por ejemplo, de algunos trabajos sólo se está familiarizado con sus títulos a través de otras obras que los mencionan; de otros se preservan algunas frases, pasajes o capítulos; otros se conservan en su totalidad. De estos últimos, el más influyente es el editado por Euclides, alrededor del año trescientos antes de Cristo, y titulado los *Elementos*.

Se afirma, sin necesidad de hacer cálculos precisos, que este es el libro más veces editado en la historia de la humanidad, con la única excepción de *La Biblia*.[10] La mayoría de las diversas ediciones tienen un propósito pedagógico: enseñar, al menos, los rudimentos de la geometría plana. Para lograr su meta, algunos autores incorporan accesorios (*e.g.*, figuras y simbología) que, de acuerdo con expertos en el tema, son ajenos a la obra original. Es decir, se asevera que el uso de figuras, notación y simbología no fue común entre los matemáticos griegos. Tal vez uno de los tratados griegos que mejor ejemplifique esta situación sea el compuesto por Nicomaco de Gerasa, titulado *Introducción a la Aritmética*, que circuló alrededor del año cien después de Cristo. En breve, hasta este momento de la evolución de la inteligencia humana, aún no había aparecido el carácter simbólico de las matemáticas occidentales. Poco más adelante, con la caída del Imperio Romano, desaparecerían los centros que habían sido explícitamente fundados como lugares de concentración para los intelectuales. Algunos de estos individuos salvaron tratados y se dirigieron al medio oriente donde se les intentó comprender y preservar traduciéndolos al árabe.

Con el inicio de la Edad Media en la Europa occidental, período que cubrió de los siglos V al XV, aproximadamente, las matemáticas entrarían en una fase de desaceleración donde algunos de los textos griegos más relevantes permanecerían ignorados por la mayoría de la población. A pesar de que las nuevas obras seguían siendo esencialmente retóricas, uno que otro símbolo fue introducido para abreviar una expresión o una operación. Sin embargo, los más grandes avances se darían en culturas situadas en el medio oriente. De estas innovaciones la más relevante, sin lugar a dudas, fue la invención de símbolos para representar los dígitos necesarios para desarrollar la base diez (*i.e.*, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Aún es motivo de debate el lugar de origen, motivos y fuentes precisas que provocaron dichos avances. Pero es claro que dicho acontecer tuvo lugar en la India en el siglo VIII, aproximadamente, e introducido a Europa a través de las obras de estudiosos árabes. Se le atribuye al matemático italiano Leonardo de Pisa (ca. 1170 - 1240), en la publicación del *Liber abbaci* (1202), un esfuerzo por popularizar el uso de dichos símbolos entre sus colegas europeos.[11]

10 Victor Katz. 1993. *A history of mathematics. An introduction*. New York: Harper Collins College Publishers. Pág 54.

11 Florian Cajori. 1928. *A history of mathematical notations*. Chicago: The Open Court Publishing Company. Vol. 1. Pág 82.

ron obligados a desarrollar un simbolismo que simplificara la expresión de sus conocimientos matemáticos. Para ellos era igualmente importante expresarlos de la manera más bella posible, aun a expensas de una posible pérdida de precisión y objetividad. Además, no hay que olvidar el carácter esencialmente geométrico de su formulación. Un problema que inquiría o buscaba lo que ahora llamamos una cantidad cuadrada se refería a un área; consecuentemente, un problema que buscaba una cantidad cúbica se refería a un volumen.

En el momento que se inicia este encuentro entre dos culturas dispares, los europeos introducían, de manera tímida y lenta, los primeros símbolos dentro de los textos matemáticos. Así, a mediados del siglo XV, en Alemania y de manera manuscrita, se encuentran las representaciones de más (+) y menos (−) para referirse a las operaciones aritméticas básicas. Algunas de las aportaciones no provenían necesariamente de actividades académicas. En esa época, y como consecuencia del comercio con las culturas orientales, en especial con China, surgió la necesidad de un individuo (el 'abacista') que fuera capaz, no únicamente de contar o medir dentro de una base específica, sino de poder cambiar de una a otra y de calcular problemas de interés compuesto, entre otras cuestiones.[15] En particular, los comerciantes y viajeros italianos fueron míticos entre sus contemporáneos y fueron ellos quienes diseminaron, en gran medida, los nuevos números arábigo-hindús y los principios de la nueva álgebra. Así, los matemáticos italianos del siglo XVI fueron herederos, al menos, de cuatro distintas corrientes intelectuales relacionadas con las matemáticas: 1) la aritmética europea representada por los trabajos de Leonardo de Pisa y continuada por sus colegas Luca Paccioli (1445 – 1510) (*Summa Arithmetica* (1494)) y Piero della Francesca (1416 – 1492), entre otros; 2) el cálculo aritmético desarrollado por la nueva clase abacista; 3) la matemática clásica, en particular la obra de Diofanto (*ca.*, 400 d. C.) (*Arithmetica*) recientemente traducida al latín; y, 4) el álgebra desarrollada por los árabes.

Fueron los algebristas italianos quienes empezaron a introducir símbolos en un principio fueron simples abreviaciones en el álgebra al buscar la manera de simplificar la redacción de sus textos. Así, en lugar de escribir la palabra completa para incógnita entonces llamada 'cosa' usaron simplemente *C*, y en lugar de referirse a cuadrado entonces, censo emplearon *Ce*, *Cu* por cubo y *R* para raíz. Desarrollos similares se suscitaron en el resto de los países europeos (*e.g.*, Francia, Alemania e Inglaterra). Como todo suceso histórico, existe un período de tiempo en el cual se libra una batalla entre los que proponen una innovación y aquellos que desean mantener el *status quo*. En ocasiones, en un mismo individuo se pueden observar características que pertenecen al nuevo modelo y otras que atañen al anterior. Ejemplo de esto es el trabajo de Girolamo Cardano (1501-1576) quien dedicó gran parte de su vida a la resolución general de la ecuación de tercer grado y quien aún expresaba algunos de sus

15. Esta necesidad no cubrió de manera inmediata como lo muestra la publicación del primer texto de matemáticas en el nuevo continente. Véase: Juan Diez Freyle, *Sumario Compendioso*, México, 1556. Edición facsimilar, 2008. México (2010). (Col. Biblioteca Mexicana Historiae Scientiarum, 1).

problemas y resultados en prosa. Incluso más significativo es que estos matemáticos eran capaces de usar algunos símbolos para expresar las incógnitas y las potencias, pero no habían podido encontrar los símbolos adecuados para los coeficientes, por lo que la mayoría de sus casos perdían generalidad al verse limitados a usar ejemplos numéricos.

Se había mencionado, al inicio del ensayo, que la historia de las matemáticas no necesariamente es lineal, sino que en ocasiones presenta retrocesos. El desarrollo del álgebra ilustra este punto. François Viète (1540-1603), quien daría un paso aún más adelante en el estudio del álgebra al no únicamente preocuparse por encontrar soluciones a las ecuaciones sino que desarrolló un estudio detallado de la estructura de éstas, recurrió al uso de las primeras letras del alfabeto para referirse a las incógnitas.[11]

IV

Una vez que los matemáticos se percataron de la riqueza en generalidad, simplicidad, precisión y objetividad que habían descubierto a través del uso de símbolos, no voltearon hacia atrás. Esto no implica que cualquier símbolo ahora empleado, sea necesariamente adoptado por la comunidad. Un símbolo adecuado no es aquel que únicamente es breve, sino que en su representación debe relacionar al individuo con el objeto del que se habla.[12] Se puede formular una similitud con los apodos. Un sobrenombre adecuado debe ser breve, original, preciso, sugestivo y cautivante, a menos que se trate de un insulto y se pretenda que reúna otro tipo de características. Por el contrario, un alias no debe ser obvio, ni intricado, ni confuso, ni enigmático, ni indescifrable, y, menos, requerir explicación. Así como no es tarea fácil bautizar a una persona con un apodo apropiado, de la

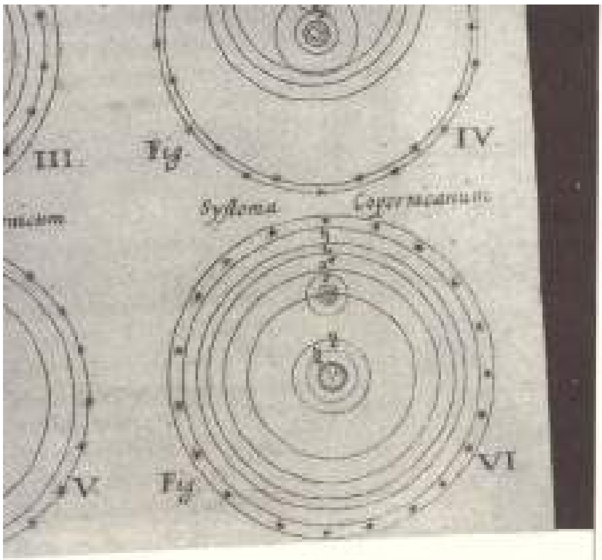
11 Por otro lado, tampoco se puede olvidar la dificultad técnica que implica el diseño de nuevos caracteres para el entonces naciente oficio editorial. Véase el comentario de Juan Pérez de Moya (*Compendio de la Regla de la Cosa*, Burgos, 1558) cuando se queja de la "deficiente tipografía de la imprenta" (Antonio J. Durán Guardeño, *El legado de las matemáticas. De Euclides a Newton: los genios a través de sus libros*. España, 2000. Pág. 108).

12 Esta frase encierra un sinnúmero de interrogantes en torno a las matemáticas, filosofía y lingüística, entre muchas otras disciplinas; por ejemplo, en matemáticas, ¿cuál es la noción de individuo? ¿Cuál es la relación entre individuo matemático y objeto matemático?

Athanasius Kircher, *Musurgia universalis*, 1650.

misma manera, es faena complicada encontrar el símbolo adecuado para un concepto matemático. Esto no significa que apodos aparentemente sin sentido no sean exitosos, como símbolos ajenos al concepto tampoco lo sean. Por ejemplo, en casi todos los libros de texto de geometría analítica de diversas culturas se emplea la letra *m* para referirse al concepto de pendiente de una línea recta. Sin embargo, parece ser que en ninguno de los idiomas relacionados con el posible surgimiento de la geometría analítica, el vocablo pendiente empieza con la letra *m*. Aún el día de hoy sigue siendo un misterio porque los matemáticos decidieron adoptar dicha convención, que ha sido extraordinariamente exitosa.

Ser un matemático respetado y admirado por la comunidad tampoco garantiza la adopción de sus convenciones. Isaac Newton (1642-1727), reconocido en vida por sus contemporáneos, tuvo un año maravilloso cuando reveló el principio de la gravitación universal, la composición de la luz y el cálculo diferencial e integral. Cualquiera de estos tres descubrimientos le hubiera garantizado su inmortalidad en los libros de historia de las ciencias. Obviamente la introducción de estos nuevos conceptos e ideas requerían de nuevas formas de expresión y transmisión. Sin embargo, su notación no fue tan exitosa y se refiere uno a ella ahora por interés meramente histórico. Su contemporáneo Gottfried W. Leibniz (1646-1716), con quien Newton polemizó en torno a la prioridad de la invención del cálculo, estuvo interesado explícitamente en encontrar los símbolos apropiados para representar pensamientos y fue mucho más exitoso en este sentido. Casi la mayoría de los símbolos que se usan actualmente para representar conceptos e ideas del cálculo se deben a él. El nuevo descubrimiento era tan rico que un gran número de matemáticos se dedicaron a extenderlo y transmitirlo. Por lo mismo, una gran variedad de símbolos fueron introducidos en los años subsiguientes, a pesar de que la matemática aún mantenía un carácter esencialmente retórico. Esta materia crecía, a pasos agigantados y, de la misma



Contemporáneo a los dos anteriores, pero de origen italiano fue Giuseppe Peano (1858 - 1932). Este último se propuso elaborar una publicación que contuviera la totalidad de las proposiciones matemáticas expresadas de una manera objetiva, clara y libre de cualquier ambigüedad. Para lograr esta meta, Peano se proponía expresar todas y cada una de las diversas proposiciones como si fueran fórmulas. Esta manera de proceder exigía el uso de una gran cantidad de símbolos, muchos de los cuales aún no existían. A lo largo de su *Formulario Mathematico* (1895 - 1908) uno encuentra una gran cantidad de éstos creados por él. Peano fue sumamente exitoso en su objetivo y muchos de los símbolos que utilizamos en la actualidad fueron de su invención. Sin embargo, el porqué del éxito de estos símbolos encierra muchas dudas y secretos. Bertrand Russell (1872 - 1970), quien fuera su leal seguidor, adoptó dicha nomenclatura sin restricciones y en una obra monumental (*Principia Matemática*, 1910 - 1913) se planteó como objetivo demostrar que la matemática se podía deducir de la lógica simbólica. En contraposición con el maestro, los nuevos caracteres introducidos por Russell fueron casi ignorados por la totalidad de la comunidad matemática. De manera irónica, él mismo bromeaba que sólo conocía a tres personas que habían leído la obra completa, los tres volúmenes, de tapa a tapa.

V

La tendencia hacia el uso de la simbología se ha extendido a lo largo del siglo xx y lo que va de éste. Los textos de enseñanza de las matemáticas no se pueden imaginar sin el uso perseverante, denso y monótono de la simbología. Nuestra vida diaria también se ve afectada por el uso continuo de símbolos que nos indican por donde transitar, salir, subir, y, así en adelante. Se supone, de manera implícita, que todos estamos acostumbrados a ellos y que los entendemos. Incluso, de nuevo tácitamente, se estima que esta manera de expresión simplifica la comprensión de la materia. Pero la impopularidad de las matemáticas, sugiere que la generalidad no las encuentra así, y, en gran medida, se debe a la forma abstracta y simbólica como se expresa. En esta breve exposición se ha delineado como el desarrollo de esta simbología no ha sido sencillo, ni lineal, ni continuo, ni acumulativo.