▪ Maestría en Educación Matemática ▪
▪ Departamento de Matemática Educativa ▪
▪ Cinvestav ▪
▪ Miércoles 26 de julio de 2006 ▪

▪ Versión no publicable, no circulable ▪
▪ No citar ▪

Evolución del Concepto de Número
(del siglo XVI a principios del XX)
Parte 2 de 2

Dr. Alejandro Garciadiego Dantan
Departamento de Matemáticas, 016
Facultad de Ciencias, Cd. Universitaria, UNAM
México, D. F. 04510

Tel: (5255) 5622 5414
Fax: (5255) 5622 4859
Correo: gardan@servidor.unam.mx

El Contorno Filosófico

• A partir del siglo XVI, en Europa Occidental, el desarrollo de las matemáticas adquirió un impulso espectacular con el apoyo de nuevas ramas (*e.g.,* el álgebra, geometría analítica), metodologías y enfoques (*e.g.,* textos griegos). Como consecuencia, se consolidaron viejos conceptos (*e.g.,* números negativos) y aparecieron nuevas notaciones (*e.g.,* exponentes negativos y fraccionarios) y simbología.

Otras disciplinas académicas (*e.g.*, física, astronomía, fisiología, filosofía) también se vieron favorecidas por condiciones similares —especialmente por el redescubrimiento de los textos clásicos— y por una incipiente, pero constante, independencia de las doctrinas aristotélicas.

• Algunos de los más grandes creadores de las matemáticas (*e.g.,* Descartes y Leibniz, entre otros) dominan el mundo filosófico. El primero de ellos, en sus *Discursos sobre el Método*, recomienda un enfoque en donde uno debe romper un problema complejo en sus partes más simples, arreglar las partes en un orden apropiado, de lo más simple a lo más complejo, iniciando en el principio, demostrando cada paso y continuando hasta el final. Leibniz, por su parte, divide todas las proposiciones en analíticas (verdades de razonamiento) y factuales (de hechos). Las verdades de razonamiento —entre ellas las matemáticas— son necesarias y su contrario es imposible.

A partir de mediados del siglo XVII, las matemáticas y la filosofía empezaron a separarse y adquirir grados de independencia, entre ellas, hasta antes insospechados. Para mediados del siglo XVIII, los filósofos de frontera no necesariamente dominaban las más recientes metodologías matemáticas. A finales de este mismo siglo, eventos sociales (*e.g.*, revolución francesa), marcaron, de manera irreversible, los caminos de las disciplinas intelectuales.

• Kant rompe con la dicotomía de Leibniz y propone una nueva tricotomía que explique todas las proposiciones. Las analíticas de Kant coinciden con las de Leibniz (y Hume). Estas proposiciones son aquellas cuya negación es contradictoria en si misma. Estos juicios no añaden algo nuevo al conocimiento, sino que únicamente aclaran el significado de los términos. Pero a las factuales las llama sintéticas; y las subdivide en *a priori* y *a posteriori* (empíricas). Estas últimas dependen de la percepción sensible (posible de los sentidos: mi pluma es negra) o se derivan lógicamente de otras proposiciones que describen percepciones de los sentidos (*e.g.,* todos los cuervos son negros). En contraposición, las proposiciones sintéticas a *priori* no dependen de la percepción sensorial. Las proposiciones matemáticas son sintéticas *a priori* ya que, al describir el espacio y el tiempo, se describen entidades particulares y se analizan las características permanentes e invariables. Estos argumentos son independientes de las impresiones sensibles.

• Pero, en otras latitudes, hubo quienes formularon sistemas alternativos. John S. Mill (1806-1873) se convirtió en el máximo representante de aquellos que aseguraban que la fuente de todo conocimiento debía hallarse en la experiencia, incluyendo las matemáticas; en contraste con los racionalistas que afirmaban que la fuente primaria de conocimiento es la razón. Para Mill, y sus seguidores, la inferencia inductiva es la única parte de la lógica capaz de producir conocimiento. La inducción se mueve de hechos específicos a conclusiones generales.

¿Qué es un número?

• Para mediados del siglo XIX, diferentes matemáticos, con diferentes motivaciones, se formulan una misma pregunta que sorprende por su sencillez: ¿Qué es un número? Las respuestas que proporcionarían también serían diferentes y generarían una nueva rama de la disciplina llamada: Fundamentos de las Matemáticas.

• Gottlob Frege (1848-1925), matemático y lógico alemán, fue uno de los primeros en reaccionar en contra de las enseñanzas de Kant y de Mill. Frege pensaba que la división kantiana entre juicios sintéticos y analíticos no era exhaustiva y que menospreciaba a estos últimos. Coincidió con Kant en que los juicios de la geometría eran sintéticos *a priori*; pero, a diferencia de éste último, pensaba que los juicios de la aritmética eran más generales y eran equiparables a los de la lógica. Esto le confirió un nuevo estado a la matemática de mayor independencia y objetividad. Frege también atacó la postura de Mill que el conocimiento matemático se apoyaba sobre la observación. En su estudio sobre los fundamentos de la aritmética, Frege concibió al número cardinal como la clase de todas las clases cuyos miembros pueden ser puestos en una relación uno-a-uno. Desgraciadamente, la notación y nueva simbología por él introducida no fue del todo apreciada y aceptada por sus contemporáneos y sus ideas no tuvieron las repercusiones que debieron haber tenido por aquel entonces.

• Richard Dedekind (1831-1916), inicialmente motivado por cuestiones de carácter pedagógicas al escribir un libro de texto sobre cálculo diferencial, estaba particularmente interesado en definir el concepto de número irracional de una manera objetiva y lógica, sin depender de construcciones geométricas. Para hacerlo, el autor introduce el concepto de 'cortadura de Dedekind', donde cada número irracional se define a partir de dos conjuntos ajenos de números racionales.

• Giuseppe Peano (1858-1932), al igual que sus colegas anteriores, estaba particularmente interesado por proporcionar a las matemáticas un mayor grado de objetividad y certidumbre. Él estaba principalmente motivado por encontrar una forma de expresión que fuera universal y libre de toda incertidumbre. Para lograr su propósito introdujo un lenguaje simbólico que permitiera la expresión de cualquier fórmula matemática libre de toda ambigüedad. Estas expresiones estarían contenidas en un *Formulario Matemático*, que iría de lo más sencillo a lo más complejo. Obviamente uno de los conceptos más elementales sería el de número cardinal (o natural). Peano procedió a enunciar una serie de axiomas (principios básicos indemostrables) que caracterizaran, de manera única, a dicho concepto. Finalmente, Peano requirió de un conjunto de cinco axiomas o postulados. El primero de ellos nos indica donde inicia la serie; en un principio escogió al 'uno', pero más tarde seleccionó al 'cero'. El segundo de ellos indica que el que sigue a cualquier número, sigue siendo un número. El tercero señala que dos números diferentes no pueden tener al mismo sucesor, o dicho de otra manera, que la serie no puede tener vueltas. El cuarto aclara, al decir que el 'cero' no es el sucesor de ningún número, que la serie no puede reiniciar. El quinto axioma, conocido como el *Axioma de Inducción*, es el que señala como es que una propiedad que tiene el primero de la serie; que si cualquier otro de la serie también lo tiene, y el que le sigue también la tiene, entonces dicha propiedad la deben tener todos los miembros de la serie. Es importante señalar que Peano no define ciertos conceptos (llamados primitivos), ya que esto involucraría un proceso infinito, donde para presentar cualquier tipo de definición o postulado, se habrían que haber definido, con anterioridad, todos los conceptos involucrados en dicha definición o postulado. Por lo mismo, Peano no define los conceptos de 'número', 'cero' y 'sucesor'.

La axiomatización de Peano ha sido sumamente exitosa, en particular, desde el punto de vista pedagógico. A pesar que su programa no era tan ambicioso desde el punto de vista filosófico; en un sentido logró su meta. La mayor parte de los símbolos por él presentados son ahora universalmente aceptados y la matemática ha llegado a tal grado de objetividad de expresión a través de éstos, que se puede decir que el lenguaje cotidiano ha quedado fuera de algunas ramas de las matemáticas contemporáneas.

- Georg Cantor (1845-1918) quien, originalmente no se había propuesto explícitamente atacar dicha pregunta de qué es un número, es ahora considerado, de manera casi universal, como el fundador de la teoría de conjuntos. Pedagógicamente, esta rama de las matemáticas adquirió, una relevancia inusitada pues, a partir de la revolución didáctica de los años sesenta del siglo pasado, se pretendió difundir dicha teoría desde los niveles más elementales. ¿Por qué?

Cantor había iniciado su labor de investigación profesional al atacar un problema matemático dentro de la corriente tradicional. Sin embargo, poco a poco, sus investigaciones lo condujeron a analizar ciertas colecciones de puntos. Estas colecciones contenían un número infinito de elementos, cuestión que condujo a Cantor a preguntarse por las características y cualidades de colecciones infinitas de números. Él tuvo el genio de concebir, aún antes de desarrollar la teoría con detalle, que no se trataba de unos cuantos elementos aislados o patológicos. Los resultados eran tan sorprendentes que él mismo se quedaba perplejo. Cantor, con el apoyo del trabajo de precursores y contemporáneos, fue capaz de dominar uno de los conceptos más elusivos y complejos que el hombre había concebido y discutido: el infinito. Por tratarse de ideas tan revolucionarias también fueron muy controversiales y las críticas no se hicieron esperar. Cantor fue capaz de mostrar que una vez que uno daba el primer paso en la aceptación de los conjuntos infinitos, ya no existían límites; en particular, que no existía el mayor de todos ellos. Supuso, aunque él no lo pudo demostrar eficientemente, que todos ellos podían ser ordenados para así establecer una aritmética, con las operaciones básicas de adición, multiplicación y exponenciación, entre ellos.

Al final de su carrera académica (1895-1897), después de haber sufrido un sinnúmero de insatisfacciones profesionales y personales, Cantor presentó una versión ordenada de sus ideas. Empezó por definir lo que era un conjunto para, más adelante introducir una manera de 'contar' sus elementos sin necesidad de aclarar si el conjunto era finito o infinito. Una de sus más bellas y ricas contribuciones originales está contenida en el sexto apartado de su ensayo donde presenta su respuesta a la inquietante pregunta de qué es un número. En esta sección, Cantor 'construye' la sucesión ilimitada de números cardinales finitos a partir de la noción de conjunto

$$\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Inmediatamente, Cantor toma los postulados de Peano y los deduce de su construcción; de esta manera muestra que la noción de conjunto es más básica o primitiva que la de número.

El siguiente paso es casi mágico y muestra el talento de Cantor en todo su esplendor. Enseguida, toma la sucesión como un solo ente y se pregunta por su número cardinal. Al no encontrarlo en la sucesión que acababa de construir, y en lugar de simplemente negarlo o rechazarlo, supone que pertenece a una nueva sucesión, ésta de números cardinales ‘transfinitos’, es decir, que se encuentran más allá de los finitos. Esta nueva serie estaría comprendida por los números

$$\{\chi_o, \chi_1,\chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots\},$$

y sería la primera serie de un número ilimitado de ellas.

Cantor discutió las operaciones de suma, multiplicación y exponenciación entre números transfinitos. Más adelante, también introdujo los números ordinales, aquellos que guardan el orden y mostró, que en el caso de los números transfinitos, estos no se comportan de manera similar a los finitos. Las inferencias hicieron aún más rica su teoría. Cantor, como casi todo hombre dedicado al mundo de las ideas, no fue capaz de demostrar uno de los principios más importantes para el desarrollo de sus ideas.

• Bertrand Russell (1872-1970), por aquel entonces un joven emprendedor confiado en encontrar conocimiento que fuera veraz, encontró en el trabajo de Peano (su lenguaje simbólico) y en el de Cantor (su noción de conjunto) las herramientas ideales para expresar sus propias ideas en torno a los fundamentos del concepto de número. Sin proponérselo e ignorante de su trabajo, Russell llegó a conclusiones muy similares a las de Frege. También llegó a la aserción que el concepto de número cardinal se podía deducir de nociones más primitivas pertenecientes a la lógica. Es incluso sorprendente la similaridad de las definiciones de número cardinal finito propuestas por estos dos últimos pensadores. Cuando Russell publicó su gran obra, incluyó un apéndice donde discutía y pretendía popularizar las ideas de su antecesor.

Desgraciadamente, la obra de Russell resultó, también, muy polémica. En lo personal, Russell se enfrascó en discusiones con algunos de los matemáticos más respetados de aquella época, en torno a los fundamentos de la geometría (*e.g.*, Poincaré) y de las matemáticas en general (*e.g.*, Hilbert). Para desdicha de él, encontró dificultades teóricas en su libro que demeritaron la obra aún antes de ser publicada. A una de estas dificultades se le conoce hoy en día como ‘la paradoja del barbero’. Este es un argumento circular que si a cierta pregunta se responde de manera afirmativa se llega a su negación; pero, que si, se responde de manera negativa, entonces se llega a su afirmación. En aras de encontrar una respuesta a este rompecabezas, Russell encontró un número mayor de problemas y llegó a la conclusión que la raíz de éstos se encontraba dentro de los fundamentos de la lógica.

Epílogo

• Es fascinante examinar como una pregunta tan sencilla ha provocado diversidad de respuestas, cuando, supuestamente, se trata de uno de los conceptos más básicos de una disciplina. Tal vez, era de esperarse que la respuesta fuera única. Un factor fundamental de dicha discusión es el papel que juega la lógica en relación con las matemáticas, donde se tienen, al menos, tres opciones posibles: 1) la lógica es independiente de las matemáticas; 2) la lógica es una herramienta de las matemáticas; o, 3) las matemáticas son una rama de la lógica.

A pesar de los avances en lógica, filosofía y en las propias matemáticas, existe consenso entre los interesados en el problema que es imposible proporcionar una respuesta definitiva en los términos originales de la cuestión.