Mathesis 12 (1996) 145-223
Impreso en México. Derechos reservados © 1996 por UNAM ISSN 0185-6200

On the synthetic geometric character of Apollonius's *Conica*

Sabetai Unguru and Michael N. Fried

Abstract

Through a careful consideration of individual propositions as well as of the overall structure of the *Conica*, the paper argues that Apollonius's text can be read coherently without the importation of algebraic ideas or notations. The authors attack the algebraic interpretation of the *Conica* by showing that it is a text marked by an exclusive dependence on simple geometric entities, by an approach visual in spirit, and by an overriding concern with the sensible production of the curves that are the subject of Apollonius's treatise.

Ever since Zeuthen's *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (1886), the standard view of Apollonius's *Conica* has been that the *Conica* was a first step towards the kind of algebraic understanding of conic curves found in analytic geometry. According to this view [see for example Heath 1981, II, 139. Heath 1896, cxvi-cxvii. Boyer 1985, 172-173 and van der Waerden 1983, 92-93], Apollonius derived geometrical equivalents of the equations for the parabola, ellipse, and hyperbola and, guided by these 'equations', developed the properties of the curves. Our contention is that this position is unjustified and that, in fact, Apollonius's outlook was geometrical and that geometrical considerations, rather than algebraic ones, guided his thinking about the conic curves. The discussion will be divided into two parts. In the first part, we shall discuss the *Conica* itself, paying special attention to the definitions opening Book I, the definitions of the conic sections in propositions I.11-14, and the constructions which end Book I. In the second part, we shall discuss, briefly, the problem of 'geometric algebra' and the interpretation of the *Conica* which it implies. We shall show that Apollonius's text provides little support for this interpretation.

Mathesis 12 (1996) 149-221
 ISSN 0185-6200

Sobre el carácter sintético–geométrico de la *Cónica* de Apolonio

Sabetai Unguru y Michael N. Fried

Resumen

A través de una consideración cuidadosa de proposiciones individuales, así como de la estructura total de la *Cónica*, este documento plantea que el texto de Apolonio puede leerse coherentemente sin la adición de ideas o notaciones algebraicas. Los autores acometen la interpretación algebraica de la *Cónica* mostrando que ésta es un texto señalado por una dependencia exclusiva de entidades geométricas simples, por una intrínseca aproximación visual, y por su importante relación con la producción sensible de las curvas, que son el objeto del tratado de Apolonio.

Desde la obra de Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (1886), el punto de vista común ha sido que la *Cónica* de Apolonio era un primer paso hacia la comprensión algebraica de las curvas cónicas, similar a la encontrada en la geometría analítica. Desde este punto de vista [véase por ejemplo Heath 1981, II, 139; Heath 1896, cxvi-cxvii; Boyer 1985, 172-173 y van der Waerden 1983, 92-93], Apolonio derivó las equivalencias geométricas de las ecuaciones de la parábola, la elipse y la hipérbola y, guiado por estas *ecuaciones*, desarrolló las propiedades de las curvas. El presente debate se centra en demostrar que esta posición es injustificada y que, de hecho, la perspectiva de Apolonio fue geométrica, por lo que las consideraciones de esta clase, en lugar de las algebraicas, guiaron su pensamiento concerniente a las curvas cónicas. La discusión será dividida en dos partes. En la primera, discutiremos la *Cónica* misma, poniendo especial atención en las definiciones introductorias del Libro I, las definiciones de las secciones cónicas en las proposiciones I.11-14 y las construcciones que terminan el Libro I. En la segunda parte discutiremos brevemente el problema de elucidar el álgebra geométrica y la interpretación de la *Cónica* en estos términos. Demostraremos que el texto de Apolonio proporciona poco apoyo a esta interpretación.

1

In the letter prefacing Book I, Apollonius tells us that the first four books of the *Conica* 'belong to a course in the elements (*periēkein eis agōgēn stoicheiōdē*)'.[1] What are we to understand by 'a course in the elements'?' According to Heath [1896, lxxvi], the elementary nature of the first four books distinguishes them from the rest by

> the fact that the former contain a connected and scientific exposition of the general theory of conic sections as the indispensable basis for further extensions of the subject in certain special directions, while the fifth book is an instance of such specialization

Heath also calls the first four books a 'text-book or compendium of conic sections' and the last four books 'a series of monographs on special portions of the subject' [*ibid.*, lxxvi–lxxvii]. Toomer [1970, 187 col.1] adopts the same image when he writes,

> [Apollonius's] aim was not to compile an encyclopedia of all possible theorems on conic sections, but to write a systematic textbook on the *elements* and to add some more advanced theory which he happened to have elaborated

While these characterizations are not entirely wrong, they might lead one to think that as a 'textbook' the first books of the *Conica* were meant for a *beginner*. Proclus makes the serious nature of 'elements' quite clear when, writing about the purpose of Euclid's *Elements*, he says,

> If we start from the elements, we shall be able to understand the other parts of this science, without the elements we cannot grasp its complexity, and the learning of the rest will be beyond us. The theorems that are simplest and most fundamental and nearest to first principles are assembled here in a suitable order, and the demonstrations of other propositions take them as the most clearly known and proceed from them [Morrow 1970, 58–59]

Thus, the *elements* are the basic and formative parts of the science, and are, accordingly, the foundation on which the science rests.

This explains why it is not strange that Apollonius, the 'Great Geometer' by Geminus's description, should busy himself with 'a course in the ele-

1 Unless noted otherwise, all quotations from the *Conica* are translated by Taliaferro [1952].

I

En la carta introductoria al Libro I, Apolonio nos dice que los primeros cuatro libros de la *Cónica* "pertenecen al curso sobre los elementos (*peptôken eis agôgên stoicheiôdê*)".[1] ¿Qué debemos entender por un 'curso sobre los elementos'? De acuerdo con Heath [1896, lxxvi], la naturaleza elemental de los primeros cuatro libros los distingue del resto por:

> el hecho de que el primero contiene una exposición relacionada y científica de la teoría general de las secciones cónicas, como la base indispensable para desarrollos futuros del tema en ciertas direcciones especiales, mientras que el quinto libro es un ejemplo de tal especialización.

Heath también llama a los cuatro primeros libros un "compendio o libro de texto de secciones cónicas" y a los últimos cuatro libros una "serie de monografías sobre fragmentos especiales del tema" [*Ibid*, lxxvi-lxxvii]. Toomer [1970 I, 187 col. 1] adopta la misma imagen cuando escribe:

> La intención —de Apolonio— no fue la de compilar una enciclopedia con todos los teoremas posibles sobre las secciones cónicas, sino la de escribir un libro de texto sistemático sobre los 'elementos' y agregar algo más de teoría avanzada, que él ya tenía elaborada.

Estas caracterizaciones no son del todo equivocadas, pero pueden sugerirnos erróneamente que, como un 'libro de texto', los primeros libros de la *Cónica* fueron pensados para un 'principiante'. Proclo aclara la naturaleza formal de los 'elementos' cuando, escribiendo acerca del propósito de los *Elementos* de Euclides, lo siguiente:

> Si comenzamos por los elementos, seremos capaces de entender las otras partes de esta ciencia; sin los elementos no podemos comprender su complejidad, y el aprendizaje del resto estará más allá de nosotros. Los teoremas, que, son los más simples y los más fundamentales y cercanos a los primeros principios, están agrupados aquí en un orden conveniente, de modo que las demostraciones de otras proposiciones los toman [a los teoremas] como los más claramente conocidos y proceden de ellos [Morrow 1970, 58-59].

Por lo que los *elementos* son la base y la parte formativa de la ciencia y son, por consiguiente, el fundamento en el que descansa la ciencia.

Esto explica por qué no es extraño que Apolonio, 'el Gran Geómetra', según la descripción de Gemino, se ocupara de 'un curso de los ele-

1. A menos anotado de otra manera, todas las citas de la *Cónica* son traducidas por Taliaferro [1952].

ments', nor strange that he should address the first three books of the *Conica* to Eudemus. For although we know little about Eudemus beyond the fact that Apollonius knew him in Pergamum and that he died before Apollonius could send him the fourth book, as we learn from the letter accompanying that book, we can assume that he was either himself a working mathematician or someone perfectly capable of understanding the contents of the books Apollonius had sent him. In any case, Apollonius respected him enough to entrust him with "[going] through [the book] ... carefully and [acquainting] those with it worthy of sharing in such things", as Apollonius tells us in the preface to Book II. The opening books of the *Conica*, therefore, give what an accomplished mathematician such as Eudemus would consider the proper groundwork for a development of the conics. The geometric character which, as we shall show, these books possess must reflect, then, the character of such a groundwork and the sort of approach to the subject common to third century mathematicians.

Book I of the *Conica*, the first book of Apollonius's 'course in the elements', begins with nineteen definitions.[2] These definitions include that of the 'conic surface (*kōnikē epiphaneia*)', 'cone (*kōnos*)', 'diameter (*diametros*)' of a plane curve, lines 'drawn ordinatewise to the diameter (*tetagmenōs epi tēn diametron katēchthai*)', 'transverse diameter (diametros plagia)', 'upright diameter (*diametros orthia*)', 'conjugate diameters (*suzugeis diametroi*)', and 'axes'. Needless to say, all these definitions involve simple geometrical objects —points, lines, and planes— and, with perhaps one exception, simple geometric relationships —intersecting, bisecting, being parallel—. The definitions, for example, of the 'diameter' of a curved line, 'vertex' of a curved line, and lines 'drawn ordinatewise to the diameter' are as follows:

> Of any curved line which is in one plane I call that straight line the diameter which, drawn from the curved line, bisects all straight lines drawn to this curved line parallel to some straight line; and I call the end of that straight line (the diameter) situated on the curved line the vertex of the curved line, and I say that each of these parallels is drawn ordinatewise to the diameter.

As one can easily see, there is not (with the exception of 'ordinatewise') a word here which one cannot find among those defined in Book I of Euclid's *Elements*.

2 These nineteen definitions are arranged in eight groups in the Heiberg edition of the *Conica*. Taliaferro preserves Heiberg's arrangement in his translation.

mentos'. Tampoco sorprende que él atribuyera los tres primeros libros de la *Cónica* a Eudemo. Aunque conocemos poco acerca de Eudemo, más allá del hecho de que Apolonio lo conoció en Pérgamo y que murió antes que él, sabemos que pudo mandarle el cuarto libro, por la carta que acompañaba a éste; podemos asumir que era un matemático muy activo o alguien perfectamente capaz de entender el contenido de los libros que Apolonio le había enviado. En cualquier caso, lo respetaba lo suficiente para encargarle el '[ir] a través [del libro] ... cuidadosamente e [informando] aquellas cosas dignas de compartir', como Apolonio nos dice en el prefacio del Libro II. Los libros introductorios de la *Cónica*, por consiguiente, dan lo que un matemático diestro como Eudemo considerara el fundamento apropiado para el desarrollo de las cónicas. El carácter geométrico que —como demostraremos— poseen estos libros debe reflejar entonces el carácter de tal fundamento y un enfoque aproximado del tema, común para un matemático del siglo tercero.

El Libro I de la *Cónica*, 'curso sobre los elementos', se inicia con diecinueve definiciones.[2] Estas definiciones incluyen las de 'superficie cónica (*kōnikē epiphaneia*)', 'cono (*kōnos*)', 'diámetro (*diametros*)' de una curva plana, líneas 'trazadas de manera ordenada al diámetro (*tetagmenōs epi tēn diametron katēchthai*)', 'diámetro transverso (*diametros plagia*)', 'diámetro vertical (*diametros orthia*)', 'diámetros conjugados (*suzugeis diametroi*)' y 'ejes'. No es necesario decir que todas estas definiciones involucran objetos geométricos simples —puntos, líneas y planos— y, en algunos casos, relaciones geométricas simples —intersección, bisección, paralelismo—. Las definiciones, por ejemplo, de 'diámetro' de una línea curva, 'vértices' de una línea curva, y líneas 'trazadas ordenadamente en dirección al diámetro' son como sigue:

> De cualquier línea curva que está en un plano, llamo diámetro a esa línea recta trazada desde la línea curva y que biseca a todas las líneas rectas trazadas a esta línea curva, paralelas a alguna línea recta, y llamo al extremo de esa línea recta (el diámetro) situada en la línea curva, el vértice de la línea curva; y digo que cada una de estas paralelas está trazada ordenadamente en dirección del diámetro.

Como puede verse fácilmente no hay aquí (con excepción de 'ordenadamente') ninguna palabra que no pueda encontrarse en aquellas definidas en el Libro I de los *Elementos* de Euclides.

2 Estas diecinueve definiciones están ordenadas en ocho grupos en la edición de Heiberg de la *Cónica*. Taliaferro conserva el orden de Heiberg en su traducción.

The word 'diameter' itself is familiar from definition 17 in Book I of the *Elements* where it is defined for the circle: "a *diameter* of the circle is any straight line drawn through the centre and terminated in both directions by the circumference of the circle, and such a straight line also bisects the circle (*dikha temnei ton kuklon*)".[3] It is not entirely clear what Euclid means by saying the diameter 'bisects the circle'. He might mean that the diameter divides the circle into two equal areas,[4] a suggestion that finds some support in definition of the 'semicircle (*hêmikuklos*)' which immediately follows that of the 'diameter'. However, while Euclid does not prove this fact, he does prove in proposition III.3, right at the start of his book about circles, that the diameter bisects all chords drawn to it perpendicularly. Hence, the reader of the *Conica* can easily make the analogies[5] between 'diameter of a circle' and 'diameter of a curve', 'lines drawn perpendicularly to the diameter' and 'lines drawn ordinatewise to the diameter'; Apollonius will use the word 'diameter' for any line *like* the diameter of a circle and will use 'ordinatewise' *in the way* 'perpendicularly' is used regarding chords drawn to a circle's diameter, leaving it open whether 'ordinatewise' is identical to 'perpendicularly' (indeed, we must wait until proposition I.7 of the *Conica* to find out that they are *not* identical).

Apollonius's geometrical outlook is revealed in the opening definitions not only by the appeal to simple geometrical objects and relations and to analogies with well-known geometrical

---

3 All quotations from Euclid's *Elements* are taken from Heath [1956].

4 This, apparently, is what Thales proved (or thought he proved) according to Proclus:

> They say that Thales was the first to demonstrate that the circle is bisected by the diameter (*dichotomeisthai ton kuklon hupo tês diametrou*), the cause of the bisection being the unimpeded passage of the straight line through the centre (*[illegible]*)" [Translation by Thomas 1991].

Euclid might well be referring to Thales when he says the "diameter bisects the circle", although this goes no further in explaining what Euclid understands by 'bisecting the circle'.

5 One should note that there are other, clearer, analogies between propositions in the *Conica* and propositions about circles in Euclid's *Elements*. For example, *Elem.* III.4 states: "If in a circle two straight lines cut one another which are not through the centre, they do not bisect one another", while *Conica* II.26 states: "If in an ellipse or circumference of a circle two straight lines not through the center cut each other, then they do not bisect each other". *Elem.* III.10 states: "A circle does not cut a circle at more points than two", while *Conica* IV.25, 38, 40, 44, 46, 55 show that a conic does not cut a conic at more than four points [see Heath 1961, li, 15e]. Similar analogies can be made between *Elem.* III.1 and *Conica* II.45, between *Elem.* III.30 and *Conica* II.47, *Elem.* III.35, 36 and *Conica* III.17, 16 (this fact has been noticed also by Knorr [1986, 120-12[illegible]]). These analogies suggest, perhaps, that Apollonius might have been guided by the easily visualizable properties of circles in his thinking about the less intuitive properties of conic sections.

La palabra 'diámetro' en sí misma es familiar en la definición 17 del Libro I de los *Elementos* donde está definida para el círculo: "un diámetro del círculo es cualquier línea recta trazada por el centro y terminada en las dos direcciones por la circunferencia del círculo, y esa línea recta también biseca el círculo (*dicha temnei ton kuklon*)".[3] No es del todo claro lo que Euclides pensaba al decir el diámetro 'biseca al círculo'. Él puede haber pensado que el diámetro divide al círculo en dos áreas iguales,[4] sugerencia que encuentra algún apoyo en la definición del 'semicírculo (*hēmikuklion*)', que sigue inmediatamente a aquella del 'diámetro'. Euclides no prueba este hecho, pero sí prueba en la proposición III.3, justo al principio de su libro acerca de los círculos, que el diámetro biseca todas las cuerdas trazadas perpendicularmente a él. Por consiguiente, el lector de la *Cónica* puede hacer fácilmente las analogías[5] entre 'el diámetro de un círculo' y 'el diámetro de una curva', 'líneas trazadas perpendicularmente al diámetro' y 'líneas trazadas ordenadamente en dirección al diámetro'. Apolonio usará la palabra 'diámetro' para cualquier línea similar al diámetro de un círculo y usará la palabra 'ordenadamente en dirección a' *en la misma forma* que 'perpendicularmente' es usada respecto a las cuerdas trazadas a un diámetro del círculo, dejando abierta la pregunta si 'ordenadamente en dirección a' es idéntico a 'perpendicularmente' (en efecto, debemos esperar hasta la proposición 17 de la *Cónica* para darnos cuenta que no son idénticos).

La perspectiva geométrica de Apolonio es manifiesta en las definiciones introductorias, no sólo por recurrir a los objetos geométricos simples y después relacionarlos, sino también por las analogías bien

---

3 Todas las citas de los *Elementos* de Euclides están tomadas de la traducción de Heath [1956].

4 Esto, aparentemente, es lo que Tales probó (o pensó que probó) de acuerdo con Proclo:

> Ellos dicen que Tales fue el primero en demostrar que el círculo es bisectado por el diámetro (*dichotomeisthai ton kuklon hupo tēs diametrou*), siendo la causa de la bisección el paso ininterrumpido de la línea recta a través del centro (*tēn tēs eutheias aparegkliton dia tou kentrou phoran*) [traducido por Thomas 1991].

Euclides pudo referirse a Tales cuando dice 'el diámetro biseca al círculo', aunque no va más allá en la explicación de lo que Euclides entiende por 'bisecando el círculo'.

5 Uno debería notar que hay otra analogía más clara entre las proposiciones de la *Cónica* y proposiciones sobre círculos en los *Elementos* de Euclides. Por ejemplo, *Elementos* III.4 afirma: "Si en un círculo dos líneas rectas se cortan mutuamente, sin pasar por el centro, entonces mutuamente no se bisectan ellas", mientras que la *Cónica* II.26 afirma: "Si en una elipse o circunferencia de un círculo dos líneas rectas no se cortan mutuamente por el centro, entonces ellas no se bisectan mutuamente". *Elementos* III.10 afirma: "Un círculo no corta a un círculo en más de dos puntos", mientras que la *Cónica* IV.24, 38, 43, 44, 46, 55 muestran que una cónica no corta a una cónica en más de cuatro puntos [ver Heath 1981 II, 158]. Analogías similares pueden hacerse entre *Elementos* III.1 y *Cónica* II.45, entre *Elementos* III.30 y *Cónica* II.47, *Elementos* III.35, 36 y *Cónica* III.17, 16 (éste último ha sido también reportado por Knorr [1986, 120-121]). Estas analogías sugieren, que posiblemente Apolonio pudo guiarse por las propiedades fácilmente visualizables de los círculos en su pensamiento acerca de las propiedades menos intuitivas de las secciones cónicas.

facts, but it is also betrayed by Apollonius's *uneasiness* with notions which, though they may be logically necessary, lack visual intuitiveness. Consider the definitions corresponding to the 'diameter', 'vertex', and 'ordinatewise' in the case of two curves. Apollonius writes:

> Likewise of any two curved lines lying in one plane I call that straight line the transverse diameter which cuts the two curved lines and bisects all the straight lines drawn to either of the curved lines parallel to some straight line; and I call the ends of the diameter situated on the curved lines the vertices of the curved lines, and I call that straight line the upright diameter which, lying between the two curved lines, bisects all the straight lines intercepted between the curved lines and drawn parallel to some straight line; and I say that each of the parallels is drawn ordinatewise to the diameter.

To illustrate these definitions one might as well consider two identical non-intersecting circles.

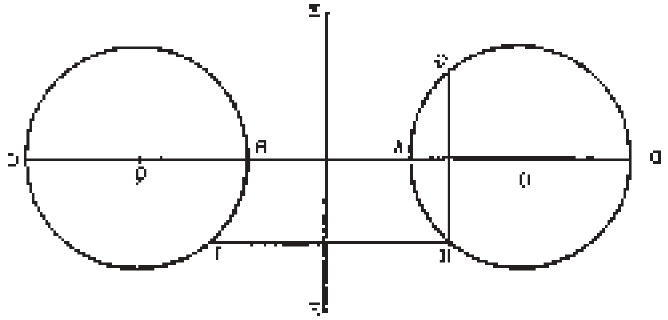


Figure 1

If the centers of these circles are O and Q, the the line joining O and Q is the 'transverse diameter', and A and B are the 'vertices', as are D and C. EF, the perpendicular bisector of AB is, in this case, the 'upright diameter'. GH is drawn 'ordinatewise' to the transverse diameter while HI is drawn 'ordinatewise' to the upright diameter. An example such as the above, of course, does not appear in the text of the *Conics*. It is obvious, moreover, that when Apollonius defined the transverse and upright diameters he had in mind the 'opposite sections (*tomai antikeimenai*)', which he would discuss very soon. Still, the example of the circles above brings out two points: 1) that there exist simple and well known geometrical objects through which the definitions may be understood, and which may have guided Apollonius in his conocidas de hechos geométricos. Ella también es revelada por la *inconformidad* de Apolonio con nociones que, aunque lógicamente pueden ser necesarias, les falta intuición visual. Consideremos las definiciones correspondientes al 'diámetro', 'vértice' y 'ordenadamente' en el caso de *dos* curvas. Apolonio escribe.

> Del mismo modo, de dos líneas curvas cualesquiera situadas en un plano, llamo diámetro transverso a esa línea recta que corta a las dos líneas curvas y biseca todas las líneas rectas trazadas a cualquiera de las líneas curvas, paralelas a alguna línea recta; llamo a los extremos del diámetro situados en las líneas curvas los vértices de las líneas curvas; y le llamo diámetro vertical a esa línea recta que, situada entre las dos líneas curvas biseca a todas las líneas rectas interceptadas entre las líneas curvas y la paralela trazada a alguna línea recta, y digo que cada una de las paralelas está trazada ordenadamente en dirección al diámetro.

Para ilustrar estas definiciones uno puede también considerar dos círculos idénticos no interceptados.

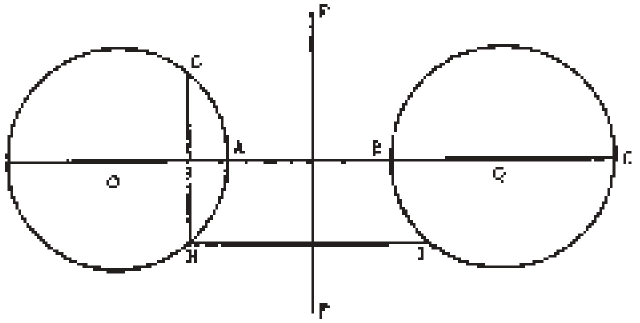


Figura 1

Si los centros de estos círculos son O y Q, la línea que une O y Q es el 'diámetro transverso'; A y B son los 'vértices', como lo son también D y C. EF es la línea perpendicular que biseca a AB y es, en este caso, el 'diámetro vertical'. GH es trazado 'ordenadamente en dirección' al diámetro transverso mientras que HI es trazado 'ordenadamente en dirección' al diámetro vertical. Un ejemplo como el anterior, por supuesto, no aparece en el texto de la *Cónica*. Es obvio, más aún, que cuando Apolonio definió los diámetros transverso y vertical tenía en mente las 'secciones opuestas (*tomai anti keimenai*)', que discutirá más adelante. Sin embargo, el ejemplo anterior de los círculos pone de manifiesto: (i) que existen objetos geométricos simples y conocidos a través de los cuales las definiciones pueden ser entendidas, y que pudieron haber guiado a Apolonio en su creation, and 2) that the diameters spoken of here are of 'two curves (*duo kampulōn grammōn*)'. This second point might suggest that Apollonius considers the opposite sections as two curves *tout court*. But this is far from clear. Apollonius's ambivalence concerning the duality or singularity of the opposite sections runs all through the *Conics*. For example, Apollonius often uses the word 'transverse (*plagia*)' to describe the diameter of a *single* curve. Thus, at the end of proposition I.13, he refers to the diameter of the ellipse as the 'transverse side', and in proposition I.14, the proposition introducing the opposite sections, he refers to the diameter of each of the hyperbolas —and Apollonius does treat the opposite sections here as *two* hyperbolas— as the 'transverse side of the figure (*tou eidous hē plagia pleura*)'. In neither case, however, does Apollonius refer, *explicitly*, to the 'transverse *diameter*', leaving, thus, the whole matter rather ambiguous. Moreover, the upright diameter whose definition makes sense *only* with regard to two curves, never appears in Book I and appears only briefly in Book II (propositions II.37, 38). In Book I, one finds the 'second diameter' defined after proposition I.16, but most often one finds the 'conjugate diameter' where one would expect the 'upright diameter'. Even in the two propositions, II.37, 38, where Apollonius mentions the upright diameter explicitly, he is quick to point out that it is conjugate to the transverse diameter. Indeed, Apollonius prefers the conjugate diameter to the upright diameter since the former is defined equally for one and two curved lines (*kampulēs grammēs kai duo kampulōn grammōn*) and this allows him to 'avoid the question' of the numerical nature of the opposite sections. But however ambiguous the text on the issue of whether the opposite sections are one or two curves, the definition of the transverse and upright diameters refers unambiguously to *two* curves. The reason for this is that, while there is a sense in which the opposite sections are one curve, as a *visual* object the opposite sections are clearly two. Therefore, Apollonius is working from this *visual* or *geometrical* intuition when he writes these definitions and it is the conflict with this intuition which is at the root of his uneasiness concerning the nature of the opposite sections and his avoidance of the clearly defined upright diameter. It seems, then, that Apollonius is unwilling to commit himself completely to the opposite sections as a single curve if such a commitment cannot be grounded in some immediate visual intuition.

This tension we have described with regards to the opposite sections is also evident in Apollonius's treatment of the 'cone' and the 'conic surface'. Apollonius defines these as follows:

creación: y 2) que los diámetros de los que se habla aquí son de 'dos curvas (*duo kampulōn grammōn*)'. Este segundo punto puede sugerir que Apolonio considera las secciones opuestas como dos curvas (*duo curves*). Pero esto está lejos de ser claro; la ambivalencia de Apolonio concerniente a la dualidad o singularidad de las secciones opuestas se encuentra a través de toda la *Cónica*. Por ejemplo, él usa con frecuencia la palabra 'transverso (*plagia*)' para describir el diámetro de una curva *simple*. De ahí, al final de la proposición I.13, él se refiere al diámetro de la elipse como el 'lado transverso', y en la proposición I.14, que introduce las secciones opuestas, se refiere al diámetro de cada una de las hipérbolas —y trata aquí las secciones opuestas como *dos* hipérbolas— como el 'lado transverso de la figura (*tou eidous hē plagia pleura*)'. En ningún caso, sin embargo, Apolonio se refiere, *explícitamente*, al '*diámetro* transverso' dejando, de esta manera, todo el asunto algo ambiguo. Más aún, el diámetro vertical cuya definición tiene sentido *sólo* con respecto a dos curvas, nunca aparece en el Libro I, y sólo brevemente en el Libro II (proposiciones II.37, 38). En el Libro I se encuentra definido el 'segundo diámetro' después de la proposición I.16, pero con mayor frecuencia se encuentra el 'diámetro conjugado' donde uno esperaría el 'diámetro vertical'. En las dos proposiciones II.37 y 38, Apolonio menciona explícitamente el diámetro vertical, y señala rápidamente que esto está relacionado con el diámetro transverso. En efecto, Apolonio prefiere el diámetro conjugado al diámetro vertical, ya que el primero está definido igualmente para una y dos líneas curvas (*kampulēs grammēs kai duo kampulōn grammōn*) y esto le permitió 'evitar la pregunta' sobre la naturaleza numérica de las secciones opuestas. Sin embargo, el texto es ambiguo respecto a si las secciones opuestas son de una o dos curvas, mientras que la definición de los diámetros transverso y vertical se refiere claramente a *dos* curvas. La razón de esto es que, mientras que por un lado tiene sentido el que las secciones opuestas sean de una curva, por el otro, como un objeto *visual*, las secciones opuestas son claramente dos. Por lo tanto, Apolonio está trabajando en esta intuición *visual* o *geométrica* cuando escribe estas definiciones; el conflicto con esta intuición está en la raíz de su inconformidad con la naturaleza de las secciones opuestas y en su evasión del claramente definido diámetro vertical. Parece entonces que Apolonio no está interesado en arriesgarse por completo y considerar las secciones opuestas como una curva simple, si tal compromiso no puede estar fundamentado en alguna intuición visual inmediata.

Esta situación que hemos descrito con respecto a las secciones opuestas es también evidente en el tratamiento del 'cono' y de la 'superficie cónica' por parte de Apolonio. Él define estos como sigue:

> 1. If from a point a straight line is joined to the circumference of a circle which is not in the same plane with the point, and the line is produced in both directions, and if, with the point remaining fixed, the straight line being rotated about the circumference of the circle returns to the same place from which it began, then the generated surface composed of the two surfaces lying vertically opposite one another, each of which increases indefinitely as the generating line is produced indefinitely, I call a conic surface (*kōnikēn epiphaneian*), and I call the fixed point the vertex, and the straight line drawn from the vertex to the center of the circle the axis.
> 2. And the figure (*schēma*) contained by the circle and by the conic surface between the vertex and the circumference of the circle I call a cone (*kōnon*), and the point which is also the vertex of the surface I call the vertex of the cone, and the straight line drawn from the vertex to the center of the circle the axis, and the circle the base of the cone.
> 3. I call right cones those having axes perpendicular to their bases, and oblique those not having axes perpendicular to their bases.

As in the case of the diameter, there is a certain analogy between these and the corresponding definitions in Book XI of the *Elements*. In particular, the somewhat unusual use of motion in Apollonius's definition of the conic surface has a clear precedent in Euclid's definition of the cone as well as Euclid's definitions of the sphere and cylinder [Euclid XI, definitions 14-23]. The sphere is defined in Book XI by the rotation of a semicircle about its fixed diameter, the cylinder by rotating a rectangle about one of its sides, and the cone by rotating a right triangle about one of its legs. The axis of Euclid's cone is the fixed leg about which the right triangle is turned, while the base is the circle produced by the moving leg. By definition, the axis of Euclid's cone is, then, perpendicular to the base, so that Euclid's cone is what Apollonius calls a 'right cone'. By rotating a line, fixed at a point, along a fixed circle, however, Apollonius can produce this type of cone as well as 'oblique cones', which cannot be produced, needless to say, by any rotation of a triangle. So, Apollonius's cone is more general than Euclid's cone and, thus, while there is an analogy between them, it is a limited one. What has *no* analogy in Euclid's definitions is the conic surface. The conic surface differs from the cone in two crucial respects. First, the conic surface is a 'double' surface. This is why Apollonius often refers to the conic surface as the 'vertically opposite *surfaces* (*epiphaneiai*) [emphasis added]'. The cone is contained by the vertex and the circular base and so is a single surface. The 'doubleness' of the conic surface is important since the opposite sections can be produced, as is seen in proposition I 14, only by slicing

> 1. Si desde un punto una línea recta es unida a la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano con el punto, y la línea es extendida en ambas direcciones, y si, dejando fijo el punto, la línea recta es rotada sobre la circunferencia del círculo, y ésta regresa al mismo lugar de donde partió, entonces la superficie generada compuesta de las dos superficies situadas verticalmente, opuestas una a la otra, cada una de las cuales aumenta indefinidamente conforme la línea generadora es extendida indefinidamente, es a lo que llamo una superficie cónica (*kônikê epiphaneia*), y llamo al punto fijo, el vértice, y a la línea recta trazada del vértice al centro del círculo, el eje.
> 2. Y a la figura (*schêma*) contenida en el círculo y en la superficie cónica, entre el vértice y la circunferencia del círculo, la llamo un cono (*kônos*); el punto que es también el vértice de la superficie lo llamo el vértice del cono; la línea recta dibujada del vértice al centro del círculo lo denomino el eje y, finalmente, el círculo es la base del cono.
> 3. Llamo conos rectos a aquellos que tienen ejes perpendiculares a sus bases, y oblicuos a aquellos que no tienen ejes perpendiculares a sus bases.

Como en el caso del diámetro, hay cierta analogía entre éstas y las definiciones correspondientes en el Libro XI de los *Elementos*. En particular, el uso poco común del movimiento en la definición de superficie cónica dada por Apolonio tiene un precedente claro en la definición del cono, así como en las definiciones de la esfera y del cilindro enunciadas por Euclides [1956 XI, definiciones 14-23]. La esfera es definida en el Libro XI por la rotación de un semicírculo sobre su diámetro fijo; el cilindro, por la rotación de un rectángulo sobre uno de sus lados; y el cono, por la rotación de un triángulo recto sobre uno de sus catetos. El eje del cono de Euclides es el cateto fijo sobre el cual el triángulo recto es girado, mientras que la base es el círculo producido por el movimiento del otro cateto. Por definición, el eje del cono de Euclides es, entonces, perpendicular a la base; de tal forma que el cono de Euclides es lo que Apolonio llama un 'cono recto'. Rotando una línea fija en un punto alrededor de un círculo fijo, por lo tanto, Apolonio puede producir este tipo de conos, así como 'conos oblicuos', los cuales, sobra decir, no pueden ser producidos por ninguna rotación de un triángulo. Así, el cono de Apolonio es más general que el cono de Euclides y, de este modo, mientras que hay una analogía entre ellos, ésta es limitada. Lo que *no* tiene analogía con las definiciones de Euclides es la superficie cónica. La superficie cónica se diferencia del cono en dos aspectos cruciales. Primero, la superficie cónica es una superficie 'doble'. Esto es por lo que Apolonio constantemente se refiere a la superficie cónica como las 'superficies verticalmente *opuestas* (*epiphaneiai*)'. El cono está entre el vértice y en la base circular y por tanto es una sola superficie. La 'duplicidad' de la superficie cónica es importante ya que la sección opuesta puede ser producida, como veremos en la proposición I.14, sólo cortando la the conic surface. Second, the conic surface is unbounded (*apeiron*). This, of course, is essential since neither a parabola nor a hyperbola could be produced from a bounded surface. (It is perhaps a trivial observation that even the ellipse or circle, which are bounded, are not realizable in a cone if the cutting plane cuts the base of the cone.) Hence, the conic sections, as sections, are only properly defined in relation to the conic surface. Yet in the whole first book, Apollonius refers explicitly to the conic surface in only four propositions: I.1, 2, 4, and 14. Moreover, these do not include the propositions defining the parabola and the single branched hyperbola. We take this to be an active avoidance of the conic surface or, equivalently, a preference for the bounded, more visually appealing cone. In this connection, let us consider propositions I.4.

Proposition I.4 states:

> If either one of the vertically opposite surfaces is cut by some plane parallel to the circle along which the straight line generating the surface is moved, the plane cut off within the surface will be a circle having its center on the axis, and the figure contained by the circle and the conic surface intercepted by the cutting plane on the side of the vertex will be a cone.

The proposition tells us, thus, two things: 1) that a section parallel to the generator circle is itself a circle and 2) that this circular section can be thought of as the base of a cone. The second point, which is of interest to us in the present discussion, makes this proposition a kind of bridge between the conic surface and the cone. Here is Apollonius's proof of the theorem:

> Let there be a conic surface whose vertex is the point A and whose circle along which the straight line generating the surface is moved is BC; and let it be cut by some plane parallel to the circle BC and let it make on the surface as a section the line DE.
> I say that the line DE is a circle having its center on the axis.
> For let the point F be taken as the center of the circle BC and let AF be joined. Therefore AF is the axis and meets the cutting plane. Let it meet it at the point G, and let some plane be produced through AF. Then the section will be the triangle ABC. And since the points D, G, E are points in the cutting plane, and are also in the plane of the triangle ABC, therefore DGE is a straight line.

superficie cónica. Segundo, la superficie cónica es ilimitada (*apeiron*). Esto, por supuesto, es esencial ya que ni una parábola ni una hipérbola podrían ser producidas por una superficie limitada. (a lo mejor es una observación trivial señalar que a pesar de que la elipse o el círculo, que son limitados en su dimensión, no podrían ser realizables en el caso de que el plano que corta al cono divida a su base). Por lo tanto, las secciones cónicas, como secciones, son definidas propiamente en relación con la superficie cónica. No obstante, en todo el primer libro, Apolonio se refiere explícitamente a la superficie cónica en sólo cuatro proposiciones: I.1, 2, 4 y 14. Más aún, esto no incluye la proposición que define a la parábola y a la hipérbola de una rama. Tomamos esto como una limitante de la superficie cónica o, equivalentemente, una preferencia por lo delimitado, un cono visualmente más atractivo. En esta conexión consideraremos la proposición I.4.

La proposición I.4 afirma

> Si cualquiera de las superficies verticalmente opuestas es cortada por algún plano paralelo al círculo, alrededor del cual la línea recta que genera la superficie se desplaza, la sección resultante al cortar dentro de la superficie será un círculo que tendrá su centro en el eje; y la figura limitada por la superficie cónica interceptada por el plano cortador y el vértice, será un cono.

La proposición nos dice entonces dos cosas: 1) que una sección paralela al círculo generador es en sí misma un círculo, y 2) que esta sección circular puede ser pensada como la base de un cono. El segundo punto es de interés para nosotros en la presente discusión, ya que esta proposición establece una relación entre la superficie cónica y el cono. Aquí está la demostración del teorema dada por Apolonio:

> Sea una superficie cónica cuyo vértice es el punto A y cuyo círculo alrededor del cual la línea recta se desplaza generando la superficie BC; y sea cortada por algún plano paralelo al círculo BC, quedando en la superficie como una sección a la línea DE.
> Digo que la línea DE es un círculo que tiene su centro en el eje.
> Sea el punto F tomado como el centro del círculo BC, y unamos A con F. De esta forma AF es el eje y se intersecta con el plano que corta a la figura en el punto G, y sea algún plano que pasa a través de AF. Entonces la sección generada será el triángulo ABC. Y dado que los puntos D, G, E son puntos en el plano que corta a la figura, y están también en el plano del triángulo ABC, por consiguiente DGE es una línea recta.

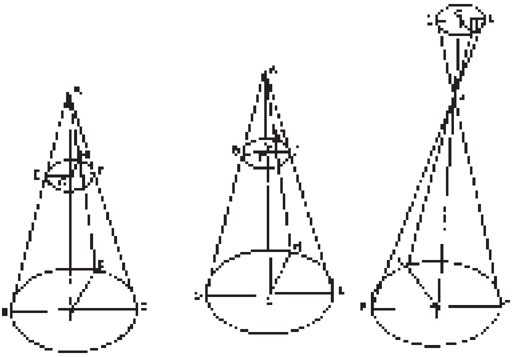


Figure 2

Then let some point H be taken on the line DE, and let AH be joined and produced. Then it falls on the circumference BC. Let it meet it at K, and let GH and FK be joined. And since two parallel planes DE and BC are cut by a plane ABC, their common sections are parallel. Therefore the straight line DE is parallel to the straight line BC. Then for the same reason the straight line GH is also parallel to the straight line KF. Therefore,

$$FA : AG :: FB : DG :: FC : GE :: FK : GH$$

And,

$$BF = KF = FC$$

Therefore also,

$$DG = GH = GE.$$

Then likewise we could show also that all the straight lines falling from the point G on the line DE are equal to each other.

Therefore the line DE is a circle having its center on the axis.

And it is evident that the figure contained by the circle DE and the conic surface cut off by it on the side of the point A is a cone.

And it is therewith proved that the common section of the cutting plane and of the axial triangle is a diameter of the circle.

The bulk of this proof shows that the section described, parallel to the base circle, is itself a circle; that Apollonius has produced herewith a cone from the conic surface is summed up only in the phrase 'it is evident (*kai phaneron*)'. Why is this *evident*, and if it is so evident why does Apollonius need to state it, even in the enunciation? First, why is it evident that the figure contained by DE, A, and the conic surface is a cone? The line AH joins the vertex with a point on the surface therefore it lies entirely on the surface by I.1. Extended, this line must fall on the circumference of BC as stated in the proof. So one may see the line AH as the line generating the conic surface. As AH moves along the circumference

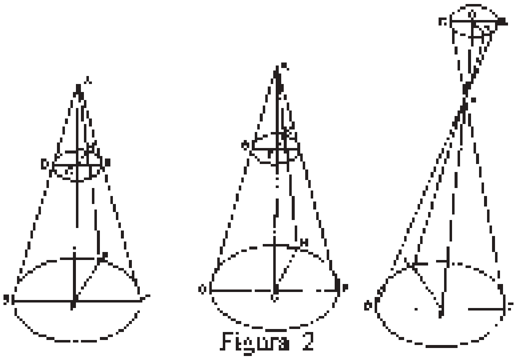


Figura 2

Entonces, sea algún punto H tomado en la línea DE [círculo con diámetro DE], y prolonguemos la unión de A con H. Entonces ésta cae en la circunferencia BC, intersectándose en K; y unamos GH y FK. Y ya que los dos planos paralelos DE y BC se cortan por un plano ABC, sus secciones comunes son paralelas. Por lo que la línea recta DE es paralela a la línea recta BC. Entonces por la misma razón la línea recta GH es también paralela a la línea recta KF. Por consiguiente,

$$FA:AG = FB:DG = FC:GE = FK:GH$$

Y

$$BF = KF = FC$$

Por consiguiente también,

$$DG = GH = GE$$

Entonces de la misma manera podríamos también demostrar que todas las líneas rectas que pasan por el punto G sobre la línea DE son iguales entre sí.
Por lo tanto, la línea DE es un círculo que tiene su centro en el eje.
Es evidente que la figura contenida entre el círculo DE, la superficie cónica cortada por éste, y el punto A, es un cono.
Y con esto se prueba, que la sección común del plano cortador y del triángulo axial es un diámetro del círculo.

El resto de esta prueba muestra que la sección descrita, paralela a la base del círculo, es en sí un círculo que Apolonio ha obtenido aquí con un cono de la superficie cónica, que se resume sólo en la frase: 'es evidente (*kai phaneron*)'. ¿Por qué es esto *evidente*?, y si es tan evidente ¿por qué Apolonio necesita afirmarlo, aún en el enunciado? Primero, ¿por qué es evidente que la figura contenida entre DE, A, y la superficie cónica es un cono? La línea AH une el vértice con un punto en la superficie, y por lo tanto, descansa enteramente sobre la superficie por I.1. Prolongada, esta línea debe caer en la circunferencia BC, como se afirma en la prueba. Es así que se puede ver a la línea AH como la línea generadora de la superficie cónica. Como AH se mueve a lo largo de la circunferencia

BC it also moves about the line DE. With this, and having proved that DE is a circle, one can then *say* it is evident that we have a cone with DE as its base since the line AH moving along the circle DE generates a conic surface. The three diagrams given in the body of the proof, which, incidentally, correspond exactly to the sequence of diagrams given in I.1 and I.2, may be thought of as three *snapshots* of the generation of the surface we have described. In each, one sees the line AH joining A and the circumference of the circles BC and DE emphasizing the symmetry of their roles. Indeed, the first two diagrams are indistinguishable except for the labeling of the upper and lower circle, while in the third diagram the configuration one sees above the vertex A is indistinguishable from that below A except, again, for the labeling. These arguments are not proofs but visualizations and they are convincing to the extent that one can see in the proof and in the diagram the genesis of the conic surface and the figure of the cone as described in Apollonius's definitions. The visualizations have weight because DE *is proved* to be a circle. Since DE being a circle is the *only* thing proved in the proposition and arguments such as those we have just given are unstated, one must conclude that when Apollonius says "*it is evident* (emphasis added) that the figure contained by the circle DE and the conic surface cut off by it on the side of the point A is a cone", he means just that, namely, that what is stated can be seen to be so. Incidentally, the word 'evident (*phaneron*)' literally means, 'open to sight'.[6]

The cone's being 'open to sight' is perhaps the reason why Apollonius prefers the cone to the conic section, as we observed above, and why he emphasizes both in the enunciation and proof of I.4 that by sectioning a conic surface parallel to its generating circle one produces a cone, even though this is 'evident'. Indeed, one of the differences between Apollonius's description of the cone and that of the conic surface is that the cone, unlike the conic

6. The visual character of Greek mathematics that we are emphasizing here is restricted to the approach to mathematical problems and concepts. This is not the same thing as saying that Greek mathematics was a visual mathematics. [See Szabó 27, 34–42], for an elaboration of what Szabó calls the 'anti-illustrative tendency' in Greek science.) The Greek mathematician clearly wanted to anchor his ideas in *logoi*, in precise words without recourse to imprecise pictures. Hence, no diagram ever accompanies a definition or an enunciation. On the other hand, the parts of a proposition following the enunciation, the 'setting-out (*ekthesis*)', 'specification (*diorismos*)', and 'construction (*kataskeuē*)' present always a specific case given together with a diagram, with the proof which follows referring to this case and this diagram (an interesting discussion of the importance of diagrams in the proof of propositions can be found in Knorr [1975, 69–74]). It is in this part of Greek mathematics that the visual character of the ideas, the possibility of their being represented in a diagram, is crucial.

BC, por lo anterior, también se mueve alrededor de la línea *DE*. Y habiendo probado que *DE* es un círculo, entonces se puede decir que evidentemente tenemos un cono con *DE* como su base, ya que la línea *AH*, moviéndose a lo largo del círculo *DE*, genera una superficie cónica. Los tres diagramas presentados para la prueba, incidentalmente, corresponden a la secuencia de diagramas presentados en I.1 y I.2, y pueden ser pensados como tres *representaciones* de la generación de la superficie que hemos descrito. En cada una, se ve la línea *AH* que se une al punto *A* y las circunferencias de los círculos *BC* y *DE* enfatizando su simetría. En efecto, los primeros dos diagramas se distinguen por la notación de los círculos superior e inferior; en el tercer diagrama la configuración que se ve arriba del vértice *A* se diferencia de aquella debajo de *A*, de nuevo por la notación. Estos argumentos no son pruebas sino visualizaciones convincentes hasta el punto en el que pueda verse en el diagrama la génesis de la superficie cónica y la figura del cono como se describe en las definiciones de Apolonio. Las visualizaciones son importantes porque se probó que *DE* es un círculo, pero ésta es la *única* cosa probada en la proposición. Y de hecho, con argumentos tan imprecisos como los que hemos presentado, se debe concluir que cuando Apolonio dice, "*Es evidente* que la figura limitada por el círculo DE y la superficie cónica cortada por éste en el lado del punto A es un cono": él quiere decir solamente que lo que se afirma puede visualizarse. Incidentalmente, la palabra 'evidente' (*phaneron*) literalmente significa 'abierto a la vista'.[6]

El hecho que los conos estén 'abiertos a la vista' es posiblemente la razón por la cual Apolonio prefiere el cono a la sección cónica, como observamos anteriormente. Ésta es también la razón por la cual él enfatiza, tanto en el enunciado como en la prueba de I.4, que seccionando una superficie cónica paralela a su círculo generador se produce un cono, aunque esto sea 'evidente'. En efecto, una de las diferencias entre la descripción del cono de Apolonio y aquella de la superficie cónica es precisamente que el cono,

6. El carácter visual de las matemáticas griegas que estamos señalando aquí está restringido a la *presentación* de problemas y conceptos matemáticos. Esto no es lo mismo que decir que las *matemáticas* griegas fueron unas matemáticas visuales [ver Szabo 27, 34-47], pues la elaboración de lo que Szabo llama la 'tendencia anti-ilustrativa' en ciencias griegas. Los matemáticos griegos claramente querían asegurar sus ideas en *logos*, en palabras precisas sin el recurso de dibujos imprecisos. De aquí que, ningún diagrama acompaña a una definición o a un enunciado. Por otro lado, las partes de la proposición siguiendo al enunciado son el 'planteamiento (*ékthesis*)', la 'especificación (*diorismós*)' y la 'construcción (*kataskeué*)'. Esta última presenta siempre un caso especificado junto con un diagrama, con la prueba que sigue refiriéndose a *este* caso y a *este* diagrama (una discusión interesante de la importancia de los diagramas en la demostración de proposiciones puede ser encontrada en Knorr [1975, 69-74]). En esta parte de las matemáticas griegas el carácter visual de las ideas y la posibilidad de ser representadas en un diagrama, es crucial.

surface, is called a 'figure (*schēma*)'. In Euclid's definition, too, the cone is a *figure*, as is the pyramid, prism, sphere, cylinder, cube, octahedron, icosahedron, and dodecahedron [Euclid XI, def. 12-14, 21, 25-28]. Euclid defines *figure* in the first book of the Elements as 'that which is contained by any boundary or boundaries (*tinos ē tinōn horōn*)', where a 'boundary is that which is an extremity (*peras*) of anything [*Ibid.*, I, def. 13, 14]'. This is more or less the 'geometrical' definition Socrates gives in the Meno [Plato 1961]: "I say that shape (*schēma*) is that in which a solid terminates (*perainei*), or more briefly, it is the limit (*peras*) of a solid". Earlier, Socrates gives a slightly different definition which he seems to prefer. He says to Meno [*Ibid.*, 75b8-c1],

> Well now, let's try to tell you what shape (*schēma*) is. See if you accept this definition. Let us define it as the only thing which always accompanies color. Does that satisfy you, or do you want it in some other way? I should be content if your definition of virtue were on similar lines.[7]

Thus, the cone as a figure is bounded, it has limits (*perata*), as opposed to the conic surface which, as we noted above, is unbounded (*apeiron*). The cone can, thus, be grasped whole by the eye, which the conic surface as a whole can never be. In this sense, we reaffirm that the cone is a visual object in a way that the conic surface is not. Indeed, Socrates' preferred definition of figure which links figure inseparably with color links figure inseparably, therefore, with vision. Is it not for this reason, too, that we call diagrams, which are obviously the most visual elements of a text, 'figures'? So it is as a figure, as a thing which the eye can grasp whole, that Apollonius prefers using the cone in the text rather than the conic surface.

Apollonius understands, however, the necessity of the conic surface for properly defining the conic curves, and so it is imperative that there be a proposition linking the conic surface and cone in such a way that it be possible to speak about these curves in terms of the cone. This is what proposition I.4 accomplishes in showing how from a given conic surface one may derive a cone having its base as far as one pleases from the vertex and on whatever side. Indeed, this is precisely the way Apollonius uses I.4 in proposition I.8 which concerns sections, namely the parabola and hyperbola, which 'increase indefinitely' when the 'surface of the

7 For an enlightening discussion of the entire passage, see Klein [1965, 55-70].

no la superficie cónica, es llamada una 'figura (*schēma*)'. En la definición de Euclides, también, el cono es una 'figura', como lo son la pirámide, el prisma, la esfera, el cilindro, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro [Euclides XI, def. 12-14, 21, 25-28]. Euclides define 'figura' en el primer libro de los *Elementos* como "aquel que está contenido en algún límite o límites (*tinos ē tinōn horōn*)" donde un "límite es aquel que está en un extremo (*peras*) de cualquier cosa" [*Ibid.*, I, def. 13, 14]. Esta es más o menos la definición 'geométrica' que Sócrates da en el *Menón* [Platón 1961]: "Yo digo que la forma (*schēma*) es aquella en la que un sólido termina (*perainei*), o más brevemente, es el límite (*peras*) de un sólido". Anteriormente, Sócrates da una definición un poco diferente, la que parece preferir. Él le dice a Menón [*Ibid.*, 75b8-c1].

> Bueno, ahora vamos a tratar de decirte qué es la forma (*schēma*). Veamos si aceptas esta definición. Definámosla como la única cosa que siempre acompaña al color. ¿Esta te satisface, o la quieres de alguna otra manera? Yo estaría satisfecho si tu definición de virtud estuviera formulada en líneas similares.[7]

Por consiguiente, el cono como una figura delimitada tiene límites (*pera*), como lo opuesto a la superficie cónica, que como señalamos antes es ilimitada (*apeiron*). El cono, por lo tanto, puede ser captado en su totalidad por el ojo, mientras que la superficie cónica, como un todo, nunca puede serlo. En este sentido, reiteramos que el cono es visible, de una manera en que la superficie cónica no lo es. En efecto, la definición de figura preferida por Sócrates, que vincula figura inseparablemente del color, también vincula figura con visión. ¿No es por esta razón, también, que nosotros llamamos a los diagramas, que son obviamente los elementos más visuales de un texto, "figuras"? Es así que por ser una figura, un objeto que el ojo puede captar totalmente, que Apolonio prefiere usar el cono en el texto en lugar de la superficie cónica.

Apolonio entiende, sin embargo, la necesidad de la superficie cónica para definir propiamente las curvas cónicas, lo que hace necesario que exista una proposición que vincule a la superficie cónica y el cono de tal manera que sea posible hablar sobre estas curvas en términos del cono. Esto es lo que la proposición I.4 logra mostrar, que a partir de una superficie cónica dada uno puede derivar un cono teniendo su base tan distante del vértice como se quiera y en cualquier lado. En efecto, ésta es precisamente la forma en la que Apolonio usa I.4 en la proposición I.8, la concerniente a secciones, es decir, la parábola y la hipérbola, las que 'crecen indefinidamente' cuando la 'superficie

7. Para una discusión ilustrativa del pasaje, ver Klein [1965, 55-70].

cone [*tou kōnou epiphaneia* and not the 'conic surface (*kōnikēn epiphaneian*)'] and the cutting plane are produced indefinitely". Moreover, in I.5, Apollonius proves that when an oblique cone is cut subcontrariwise the section produced is a circle, but he does *not* point out that the figure contained by the surface of the cone, the subcontrary circle, and the vertex is a cone. This can only mean that Apollonius is not interested in a theoretical query concerning the number of ways a cone may be derived from a conic surface, only that there be *some* way. For having some way to move back and forth between the conic surface and the cone allows Apollonius to avoid the conic surface altogether and talk only about the cone.

Let us review the argument. Although the conic surface is produced by a visually appealing procedure, it is not itself a visually appealing object. In particular, it is not a bounded figure (*schēma*), a shape, the sort of thing portrayable wholly by a diagram. The cone is. Apollonius's concern with this point induces him to use the cone rather than the conic surface whenever possible, even when using the conic surface would have been more appropriate.

The most conspicuous omission from the opening definitions is, of course, that of the definitions of the parabola, hyperbola, ellipse, and opposite sections. Apollonius delays the definitions of these curves until after the first ten propositions and then defines them in the course of propositions I.11-14. The reason for this delay becomes clear when we consider what the ten preliminary propositions say and how they fit together: these propositions form a mini-treatise on the cone and the general properties of sections in a cone.

Propositions I.1 and I.2 are at once general propositions about the conic surface and also important lemmas for the remaining eight propositions. They are both used implicitly in I.3 which defines the first elementary section, the triangle, produced when the cutting plane passes through the vertex.

The second elementary section, the circle, is given in propositions I.4 and I.5. Proposition I.4, as we discussed above, shows that a section made parallel to the generator circle produces a circle, and I.5 shows that there is another distinct section producing a circle, what Apollonius calls the subcontrary section (*hupenantia tomē*). That the subcontrary section is a circle is the first result unique to the oblique cone and, although it never appears again in the *Conics*, the proposition serves to show that sectioning an oblique cone is not a trivial procedure and demands careful development.

Proposition I.9 would appear to complete the sequence I.4,5. It states that "If a cone is cut by a plane meeting both sides of the axial triangle, and neither parallel to the base nor situated subcontrariwise, then the section will not be a circle". Thus, the three propode un cono [*tou kōnou epiphaneia* y no la 'superficie cónica (*kōnikēn epiphaneian*)'] y el plano cortador son producidos indefinidamente. Más aun, en I.5 Apolonio prueba que cuando un cono oblicuo es cortado en sentido contrario, la sección que se genera es un círculo, pero *no* señala que la figura limitada por la superficie del cono, el círculo subcontrario, y el vértice, es un cono. Esto solamente puede significar que Apolonio no está interesado en la cuestión teórica concerniente al número de formas por las que un cono puede ser generado por una superficie cónica, sino que solo le interesa que exista *alguna* forma. El hecho de poderse mover hacia atrás y hacia adelante entre la superficie cónica y el cono, permite a Apolonio no tener que usar toda la superficie cónica, y usar sólo el cono.

Revisemos el argumento. Aunque la superficie cónica es generada por un procedimiento visualmente atractivo, no es en sí mismo un objeto atractivo. En particular, no es una figura (*schēma*) limitada, ni una forma, ni alguna cosa totalmente descriptible por un diagrama. El cono es el interés de Apolonio en este punto. Él se siente motivado a usarlo siempre que sea posible en lugar de la superficie cónica, aún cuando usar ésta última sería lo más apropiado.

Las omisiones más notables en las definiciones introductorias son las definiciones de parábola, hipérbola, elipse y las secciones opuestas. Apolonio las deja hasta después de las primeras diez proposiciones y posteriormente las define en el transcurso de las proposiciones I.11-I.14. La razón de este retraso es clara, cuando consideramos lo que dicen las diez proposiciones preliminares y cómo se conjuntan: estas proposiciones forman un minitratado sobre el cono y las propiedades generales de sus secciones.

Las proposiciones I.1 y I.2 son proposiciones generales acerca de la superficie cónica y también importantes lemas para las ocho restantes. Ambas son usadas implícitamente en I.3. Ésta última define la primera sección elemental, el triángulo, producido cuando el plano cortador pasa por el vértice.

La segunda sección elemental, el círculo, está dada en las proposiciones I.4 y I.5. La proposición I.4, como discutimos anteriormente, demuestra que una sección que es paralela al círculo generador produce un círculo, y la I.5 demuestra que existe otra sección distinta que produce un círculo, a la que Apolonio llama la sección subcontraria (*hupenantia tomē*). Que la sección subcontraria sea un círculo es el único resultado para el cono oblicuo y, aun cuando nunca aparece otra vez en la *Cónica*, la proposición sirve para mostrar que el seccionar un cono oblicuo no es un procedimiento común, sino que demanda un desarrollo cuidadoso.

La proposición I.9 se presenta para completar la secuencia I.4, 5. Esta afirma que: "Si un cono es cortado por un plano, que intersecta ambos lados del triángulo axial, y no es paralelo a la base ni al situado subsitions together say that a section will be a circle *if and only if* it is made according to I.4 or I.5. However, this raises the question why does I.9 not follow I.4,5? One reason, of course, is that it depends on I.7, the proposition establishing, together with the porism following it, the existence and manner of producing a diameter of a section. This explains why it cannot appear immediately after I.5, but not why it does not appear immediately after I.7. Since it does not depend on proposition I.8 Apollonius apparently wanted to stress the couple I.8,9 rather than the triple I.4,5,9, or, put another way, Apollonius saw I.9 as the complement of I.8 rather than the completion of I.4,5. This is so in the sense that while in I.8 the cutting plane either is parallel to a side of the axial triangle or meets a side of the axial traingle beyond the vertex, in I.9 the cutting plane cuts both sides of the axial triangle (by 'sides' Apollonius means the sides having as common vertex, the vertex of the cone) on the same side of the vertex. These sections represent, in general, the outcome of the three ways of cutting a cone. One notes, also, that these three sections correspond to the perpendicular sections of the three right cones, the right-angled, the obtuse-angled, and acute-angled cone, respectively, investigated by Menaechmus and Euclid [see Heath 1981 II, 110-118]. In this way, I.8,9 present a more coherent preparation for I.11-13, in which the parabola, hyperbola, and ellipse are defined, than would the sequence I.4,5,9. The correspondence between I.8,9 and I.11-13 is seen also in the nearly identical hypotheses of I.8 and I.11,12 and of I.9 and I.13.

The inclusion of this mini-treatise on the cone and the general properties of its sections at the very beginning of the *Conica* shows that Apollonius did not think the conic curves as definable *before* developing sufficiently the geometry of the general section of the general cone. It is crucial to see in these preliminary propositions the importance Apollonius places on understanding the nature of sectioning. The cone and the general geometric character of its sections are the first elements of the conic curves. The cone is the fundamental mathematical object of the *Conica*. All other objects, including the sections, are derived from it. The cone is not a mere likeness of something more basic, a sort of mathematical *simulacrum* behind which lurks a simpler and more general way of deriving the curves. The definition of the curves for Apollonius is inconceivable without the cone. Therefore, any apt consideration of propositions I.11-14, and of Apollonius's understanding of the parabola, hyperbola, and ellipse embodied in them, must be done against the background of the geometrical character of the cone contrario, entonces la sección resultante no será un círculo. De este modo, las tres proposiciones juntas dicen que una sección será un círculo *si y sólo si* está hecho de acuerdo con I.4 o I.5. Sin embargo, esto motiva la pregunta ¿por qué I.9 no sigue a I.4 ni a I.5? Una razón, por supuesto, es que ésta depende de I.7, la proposición establece, junto con el porisma que le sigue, la existencia y la manera de producir el diámetro de una sección. Esto explica porque no puede aparecer inmediatamente después de I.5, pero no por qué no aparece inmediatamente después de I.7. Dado que esta no depende de la proposición I.8, Apolonio aparentemente quería enfatizar la pareja I.8, I.9 en lugar de la tercia I.4, I.5, I.9; o por ponerlo de otra manera, Apolonio vio I.9 como el complemento de I.8 en lugar del complemento de I.4, I.5. Esto es en el sentido que, mientras que en I.8 el plano cortador o es paralelo al lado del triángulo axial o interseca un lado del triángulo axial más allá del vértice, en I.9 el plano que corta divide a los dos lados del triángulo axial ("por lados" Apolonio quiere decir los lados que tienen como vértice común al vértice del cono) en el mismo lado del vértice. Estas secciones representan, en general, el resultado de tres formas de cortar un cono. Se nota que estas tres secciones corresponden a las secciones perpendiculares de los tres conos rectos, el recto angulado, el obtuso angulado y el cono angulado agudo, respectivamente, investigadas por Menecmo y Euclides [véase Heath 1981 II, 110-118]. De esta manera I.8, I.9 hacen más comprensible a I.11-I.13, donde la parábola, la hipérbola y la elipse son definidas como lo serían en I.4, I.5, I.9. La correspondencia entre I.8, I.9 y I.11-I.13 es casi idéntica en las hipótesis de I.8 y I.11, I.12, así como de I.9 y I.13.

La inclusión de este minitratado sobre el cono y las propiedades generales de sus secciones al principio de la *Cónica* muestran que Apolonio no pensó en las curvas cónicas como definibles *antes* de desarrollar suficientemente la geometría de la sección general del cono general. Es crucial ver en estas proposiciones preliminares la importancia que Apolonio da al entendimiento de la naturaleza de seccionar. El cono y las características geométricas generales de sus secciones son los primeros elementos de las curvas cónicas. El cono es el objeto matemático fundamental de la *Cónica*. Los otros objetos, incluyendo las secciones, se derivan de él. El cono no es el reflejo de algo más básico, no es un *simulacro* matemático detrás del cual se oculta una forma más simple y general para derivar las curvas. La definición de las curvas de Apolonio es inconcebible sin el cono. Por consiguiente, cualquier consideración pertinente a partir de las proposiciones I.11-I.14 y del entendimiento de Apolonio sobre la inclusión de la parábola, la hipérbola y la elipse en ellas, debe ser hecha contrastando el antecedente de carácter geométrico del cono y sus secand its sections, revealed in propositions I.1-10. In this light, let us look at I.11

The enunciation of I.11 is as follows:

> If a cone is cut by a plane through its axis, and also cut by another plane cutting the base of the cone in a straight line perpendicular to the base of the axial triangle, and if further the diameter of the section is parallel to one side of the axial triangle, then any straight line which is drawn from the section of the cone to its diameter parallel to the common section of the cutting plane and of the cone's base, will equal in square the rectangle contained by the straight line cut off by it on the diameter beginning from the section's vertex and by another straight line which has the ratio to the straight line between the angle of the cone and the vertex of the section that the square on the base of the axial triangle has to the rectangle contained by the remaining two sides of the triangle. And let such a section be called a parabola.

Reading this rather long enunciation, one sees that, indeed, it is both an enunciation of a proposition as well as a definition, ending, as it does, with the words 'And let such a section be called a parabola (*kaleisthō de hē toiautē tomē parabolē*)'. What, however, does the phrase 'such a section (*hē toiautē tomē*)' refer to exactly? There are two possibilities: 1) 'such a section' is the section possessing the 'fundamental property' given, the *symptōma*, namely, that if K is some point on the section and

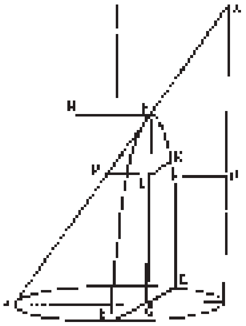


Figure 3

KL is drawn parallel to the common section DE of the cutting plane and the base of the cone, and meeting the diameter FG at L then,

$$\text{sq. } KL = \text{rect. } HF, FL$$

where HF is a fixed line, determined by FA, and the three sides of the axial triangle (HF:FA::sq.BC:rect.AB,AC), or 2) it is the section ciones, descritas en las proposiciones I.1-I.10. Desde este enfoque veamos a I.11.

El enunciado de I.11 es como sigue:

> Si un cono es cortado por un plano a través de su eje, y también es cortado por otro plano, dividiendo la base del cono en una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, y si, adicionalmente, el diámetro de la sección es paralelo a un lado del triángulo axial, entonces cualquier línea recta que es dibujada de la sección del cono a su diámetro paralelo a la sección común del plano cortador y de la base del cono, será igual al cuadrado del rectángulo contenido por la línea recta cortada por ésta en el diámetro, empezando por el vértice de la sección, y por otra línea recta que tiene la razón de la línea recta entre el ángulo del cono y el vértice de la sección, que el cuadrado en la base del triángulo axial tiene al rectángulo contenido en los dos lados restantes del triángulo. Y sea llamada tal sección una parábola

Leyendo este largo enunciado, se ve que, en efecto, es al mismo tiempo el enunciado de una proposición así como una definición, finalizando como lo hace, con las palabras "y sea llamada tal sección una parábola (*kaleisthō de hē toiautē tomē parabolē*)". ¿Sin embargo, a qué se refiere exactamente la frase "tal sección (*hē toiautē tomē*)"? Hay dos posibilidades: 1) "tal sección" es la sección que posee la "propiedad fundamental" dada, el *symptōma*, esto es, que si K es algún punto

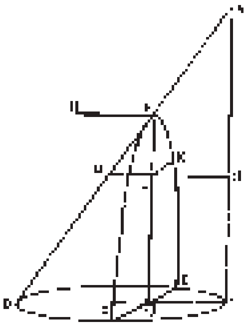


Figura 3

en la sección y KL es trazada paralelamente a la sección común DE del plano cortador y de la base del cono, e intersectando el diámetro FG por L, entonces,

$$\text{cuad.}\, KL = \text{rect.}\, HF, FL$$

donde HF es una línea fija, determinada por FA y los tres lados del triángulo axial ($HF:FA::\text{cuad.}\,BC:\text{rect.}\,AB,AC$), n. 2) es la sección produced so that its diameter *FG* is parallel to one side *AC* of the axial triangle *ABC*. Which of these does Apollonius consider as the definition of the parabola?

Two arguments support 1) as being the definition. The first is that the *names* of the curves given by Apollonius correspond to the *symptōmata*, and the second is that the *symptōmata* provide a means of *identification* and *distinction* of the conic sections. As to the first, it is true that the names, 'parabola (*parabolē*)', 'hyperbola (*hyperbolē*)', and 'ellipse (*elleipsis*)' derive from the language of application of areas which is, of course, the language, too, of the *symptōmata* and it is fairly clear that Apollonius wanted to connect these curves to the tradition of application of areas. This we have on the authority of Proclus who writes [Thomas 1991, 186-190]:

> These things are ancient, says Eudemus, being the discoveries of the Muse of the Pythagoreans, I mean the application of areas (*parabolē tōn chōriōn*), their exceeding (*hyperbolē*) and their falling short (*elleipsis*). From these men the more recent geometers took the names that they gave to the so-called conic lines, calling one of these the parabola, one the *hyperbola* and one the *ellipse*, inasmuch as those god-like men of old saw the things signified by these names in the construction, in a plane, of areas upon a finite straight line.

But however important this may be, and the association with application of areas is important, such association alone does not prove that Apollonius sees in the application of areas the 'whatness' of the conic curves, that is, that the property of the curves connected with the application of areas is enough to *define* the curves. The problem with the second argument, that the *symptōmata* provides a means of *identification* and *distinction* of the conic sections is that while the *symptōma* of, say, the parabola distinguishes that curve from all other conic *sections* it is *not* clear that it also distinguishes it from all other curves. Thus, Apollonius says "And let such a section [emphasis added] be called a parabola", and not "And let such a curve be called a parabola". Indeed, *KL*, *HK*, and *FL*, in terms of which the *symptōma* is defined, are determined by the way Apollonius sections the given cone, so that the *symptōma* is subordinate to Apollonius's sectioning procedure. Since the second possibility above refers *directly* to this sectioning procedure, it would appear to be the most reasonable of the two.

Three further arguments support the conclusion that, for Apollonius, what determines, and thus defines, the conic curves is, first of all, *the way the cone is sectioned*, and not the *symptōmata*.

producida como se describió, así que su diámetro *FH* es paralelo al lado *AC* del triángulo axial *ABC*. ¿Cuál de éstas considera Apolonio como la definición de la parábola?

Dos argumentos apoyan a 1): el primero, es que los *nombres* de las curvas dadas por Apolonio corresponden a los *symptōmata*; y el segundo, es que los *symptōmata* proporcionan un medio de *identificación y distinción* de las secciones cónicas. Sobre el primero, es verdad que los nombres 'parábola (*parabolē*)', 'hipérbola (*hyperbolē*)' y 'elipse (*elleipsis*)' derivan del lenguaje de aplicación de áreas que es también, el lenguaje de los *symptōmata* y es claro que Apolonio quería relacionar estas curvas con la tradición de aplicación de áreas. Además de esto, tenemos la autoridad de Proclo quien escribe

> Estas cosas son antiguas, dice Eudemo, siendo los descubrimientos de la Musa de los pitagóricos, significa la aplicación de áreas (*parabolē tōn chōriōn*), sus excedentes (*hē hyperbolē*) y sus deficiencias (*hē elleipsis*). De estos hombres, los geómetras más recientes tomaron los nombres que ellos les dieron a las así llamadas líneas cónicas, llamando a una de éstas la *parábola*, a otra la *hipérbola*, y finalmente a otra la *elipse*, ya que aquellos hombres antiguos como Dios, vieron el significado de las cosas en estos nombres, en la construcción, en un plano, de áreas sobre una línea recta finita [Thomas 1991 I, 186-189].

No obstante lo importante que esto pueda ser, y que la asociación con la aplicación de áreas *es* importante, por sí sola, tal asociación no prueba que Apolonio vea en la aplicación de áreas el 'significado' de las curvas cónicas, esto es, que la propiedad de las curvas relacionada con la aplicación de áreas es insuficiente para *definir* las curvas. El problema con el segundo argumento, es que los *symptōmata* nos dan un medio de identificación y distinción de las secciones cónicas, mientras que el *symptōma* de la parábola, que distingue a esta curva de las otras *secciones* cónicas *no* es claro, al igual que el distinguirla de todas las otras *curvas*. De este modo, Apolonio dice "Y tal *sección* sea llamada una parábola" y no "y tal *curva* sea llamada una parábola". En efecto, *KL*, *HF* y *FL*, en los términos en que el *symptōma* está definido, están determinados por la forma en la que Apolonio seccionó el cono dado, por eso el *symptōma* está subordinado a este procedimiento. Dado que la segunda posibilidad se refiere *directamente* a este procedimiento de seccionar, parecería ser la más razonable de las dos.

Tres argumentos adicionales apoyan la conclusión, que para Apolonio lo que determina y define las curvas cónicas es, antes que nada, *la forma en que el cono es seccionado* y no los *symptōmata*.

1) The most obvious argument is that what is *proved* in I.11 is the *symptōma*: a definition is not something which needs proof, rather, in Aristotle's words, a definition 'only need[s] to be understood [*Post. Anal.*, 76b37]'. And, recalling our discussion of the definition of the cone and conic surface, what understanding the definition of the parabola means for Apollonius is that its genesis has been presented to the eye. Indeed, what is *shown* in I.11 is the way in which the cone is to be sectioned whereas what is deduced is the *symptōma* of the section thus obtained.

2) If it is its *symptōma* which is the 'essence (*to ti esti*)', the definition, of the parabola, it would be hard to understand Apollonius's careful development of the properties of sections as such, the 'mini-treatise' comprising the first ten propositions. In fact, it would be hard even to understand the need for the general oblique cone. For if the *symptōma* is the *definiens* of the parabola then the cone becomes merely a derivative way of representing the parabola, of displaying its geometrical occurence. But for this *any* cone would do. In particular, if this were the only purpose of the cone, the 'Euclidean' cone would be sufficient.

3) In the prefatory letter to Book I, Apollonius clearly separates the genesis of the conic curves, and thus their definitions, from their *symptōmata*. For he writes,

> The first book contains the generation of the three sections and of the opposite branches, *and* [emphasis added] the principal properties in them (*kai ta en autais archika symptōmata*) [...]

The *symptōma* is a *property* of the parabola; it is separable from the parabola when the curve is generated and, thus, cannot be its definition. One sees this separation very clearly in proposition I.52 in which Apollonius 'constructs' the parabola. The enunciation is as follows:

> Given a straight line in a plane bounded at one point, to find in the plane the section of a cone called parabola, whose diameter is the given straight line, and whose vertex is the end of the straight line, and where whatever straight line is dropped from the section to the diameter at a given angle, will equal in square the rectangle contained by the straight line cut off by it from the vertex of the section and by some other given straight line.

Let us consider Apollonius's construction when the given angle is right (the completion of the proposition for the general case is, in fact, contained in proposition I.53). To start, we are given two straight lines *AB* and *CD* in which '*AB* [is] given in position and bounded at the point

1) El argumento más obvio es que lo que está *probado* en I.11 es el *symptōma*: una definición no es algo que necesita probarse, como diría Aristóteles, una definición "sólo necesita ser entendida" [*Analíticos posteriores* 76b37]. Y recordando nuestra discusión sobre la definición del cono y de la superficie cónica, lo que significa entender la definición de la parábola para Apolonio, es que su génesis ha sido presentada explícitamente. En efecto, lo que es *mostrado* en I.11 es la forma en la que el cono será seccionado, a la vez que se obtiene el *symptōma* de la sección.

2) Si su *symptōma* es la 'esencia (*to ti esti*)' en la definición de la parábola, sería difícil entender el cuidadoso desarrollo dado por Apolonio a las propiedades de las secciones tales como las primeras diez proposiciones que comprende el 'minitratado'. De hecho, aún sería más difícil entender la necesidad del cono oblicuo. Ahora, si el *symptōma define* a la parábola, entonces el cono se convierte solamente en otra forma de representar la parábola, de exhibir su cualidad geométrica. Pero para esto *cualquier* cono funcionaría. En particular, si éste fuera el único propósito del cono, el cono 'euclidiano' sería suficiente.

3) En la carta preliminar al Libro I, Apolonio separa la génesis de las curvas cónicas y las definiciones, de los *symptōmata*. Por lo que escribe

> El primer libro contiene la generación de tres secciones y de las ramas opuestas, y *las propiedades principales en ellas* (*kai ta en autais archika symptōmata*) ...

El *symptōma* es una *propiedad* de la parábola, éste es separable de la parábola cuando la curva es generada y, por consiguiente, no puede ser su definición. Esta separación se ve en la proposición I.52 en la que Apolonio 'construye' la parábola. El enunciado es el siguiente:

> Dada una línea recta en un plano limitado en un punto, para encontrar en el plano la sección de un cono llamada parábola, cuyo diámetro es la línea recta dada y, cuyo vértice es el extremo de la línea recta, y donde cualquier línea recta es trazada de la sección al diámetro en un ángulo dado, igualará su cuadrado al rectángulo contenido por la línea recta cortada por ésta del vértice de la sección y por alguna otra línea recta dada.

Consideremos la construcción de Apolonio cuando el ángulo dado es recto (el complemento de la proposición para el caso general está, de hecho, contenida en la proposición I.53). Para empezar, damos dos líneas rectas *AB* y *CD* en la que '*AB* [está] dada en posición y limitada

A' while CD is 'given in magnitude'. We are required to find a parabola in the plane of reference for which CD will be the upright side (*orthia*) and AB, the diameter (in fact, the axis, as Apollonius points out,

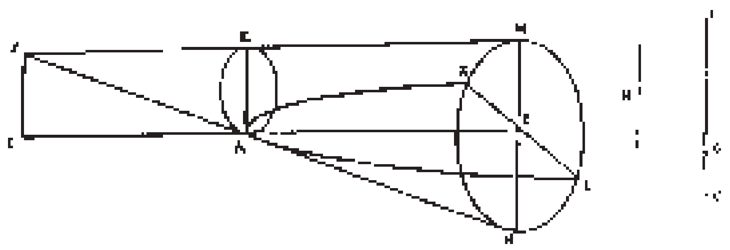


Figure 4

since in this special case the lines drawn ordinatewise to AB will be at right angles to AB). Next, Apollonius builds a cone which will have the desired parabola as a section! He says,

> let AB be produced to E, and let CG be taken as the fourth part of CD, and let
>
> $$EA = CG$$
>
> and let
>
> $$CD : H :: H : EA.$$
>
> Therefore
>
> $$CD : EA :: \text{sq.}H : \text{sq.}EA$$
>
> and
>
> $$CD = 4EA.$$
>
> Therefore also,
>
> $$\text{sq.}H = 4\,\text{sq.}EA.$$
>
> Therefore
>
> $$H = 2EA.$$

Therefore, one can construct an isosceles triangle EAF having its base equal to H and its sides equal to EA. Apollonius constructs this triangle perpendicular to the plane of reference and then another, AFK, whose en el punto A', mientras que CD es 'dada en magnitud'. Requerimos encontrar una parábola en el plano de referencia donde CD será el lado vertical (*orthia*) y AB el diámetro (de hecho, el eje, como Apolonio lo

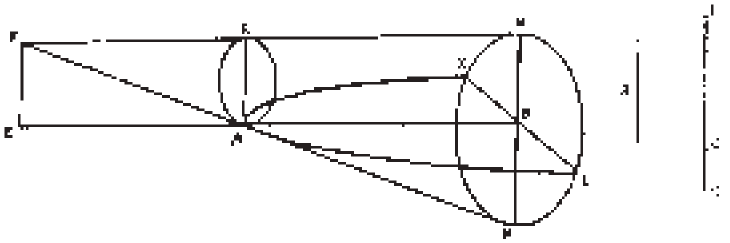


Figura 4

señala, en este caso especial las líneas dibujadas ordenadamente con dirección AB, estarán en ángulo recto con AB). Después, Apolonio construye un cono ¡que tendrá la parábola deseada como una sección! Él dice:

> Sea AB prolongada hasta E, y sea CG tomada como la cuarta parte de CD, y sea
>
> $$EA > CG$$
>
> y sea
>
> $$CD : H :: H : EA$$
>
> Por lo tanto
>
> $$CD : EA :: \text{sq } H : \text{sq } EA$$
>
> y
>
> $$CD < 4EA$$
>
> luego también,
>
> $$\text{cuad.} H < 4 \text{cuad.} EA$$
>
> Por consiguiente
>
> $$H < 2EA.$$

Por lo tanto, se puede construir un triángulo isósceles EAF siendo su base igual a H y sus lados iguales a EA. Apolonio construye este triángulo perpendicular al plano de referencia, y después otro, AFK.

base, AK, is parallel to FE and whose side FK is parallel to EA. From this, he produces a right cone of which AFK is an axial triangle:

> [L]et a cone be conceived whose vertex is the point F and whose base is the circle about $K\Lambda$ at right angles to the plane through AFK. Then the cone will be a right cone, for $AF = FK$.

At this stage, Apollonius shows that the plane of reference cuts the cone precisely as prescribed in proposition I.11. He writes:

> And let the cone be cut by a plane parallel to the circle $K\Lambda$, and let it make as a section the circle $MN\Xi$, at right angles clearly to the plane through MFN, and let the straight line MN be the common section of the circle $MN\Xi$ and of the triangle MFN; therefore it is the diameter of the circle. And let the straight line $\Xi\Lambda$ be the common section of the plane of reference and of the circle. Since then circle $MN\Xi$ is at right angles to triangle MFN, and the plane of reference also at right angles to triangle MFN, therefore the straight line $\Lambda\Xi$, their common section, is at right angles to triangle MFN, that is to triangle KFA [the 'axial triangle'], and therefore it is perpendicular to all the straight lines touching it and in the triangle; and so it is perpendicular to both MN and AB.
>
> Again since a cone, whose base is the circle $MN\Xi$ and whose vertex is the point F, has been cut by a plane at right angles to the triangle MFN and makes as a section circle $MN\Xi$, and since it has also been cut by another plane, the plane of reference, cutting the base of the cone in a straight line $\Xi\Lambda$ at right angles to MN which is the common section of the circle $MN\Xi$ and the triangle MFN, and the common section of the plane of reference and of the triangle MFN, the straight line AB, is parallel to the side of the cone FKM, *therefore the resulting section of the cone in the plane of reference is a parabola* [emphasis added], and its diameter AB, and the straight lines dropped ordinatewise from the section to AB will be dropped at right angles, for they are parallel to $\Xi\Lambda$ which is perpendicular to AB.

To this point Apollonius has constructed a parabola as a section of an equally constructed cone. Now, and only now, *after* he has said that he has found a parabola, does Apollonius go on to show that he has found the parabola having CD as its upright side. (We shall not continue the proof.) Apollonius's proof, one observes, is consistent with the wording of the enunciation. For there too, Apollonius *first* requires a parabola to be found and *then* specifies that it must be such that

> whatever straight line is dropped from the section to the diameter at a given angle, will equal in square the rectangle contained by the straight line cut off by it from the vertex of the section and by some other given straight line.

cuya base AK es paralela a FE y cuyo lado FK es paralela a EA. Con esto, él produce un cono recto del que AFK es un triángulo axial:

> Sea concebido un cono cuyo vértice es el punto F y cuya base es el círculo referente a KA en ángulo recto al plano a través de AFK. Entonces el cono será un cono recto, pues $AF = FK$.

En esta parte, Apolonio muestra que el plano de referencia corta al cono precisamente como es descrito en la proposición I.11. Él escribe:

> Y sea el cono cortado por un plano paralelo al círculo KA, y sea generado como una sección el círculo MNX, en ángulo recto con el plano a través de MFN, y sea la línea recta MN la común al círculo MNX y al triángulo MFN; por consiguiente, es el diámetro del círculo. Y sea la línea recta XL la sección común al plano de referencia y al círculo. Dado que el círculo MNX está en ángulo recto al triángulo MFN, y el plano de referencia también está en ángulo recto al triángulo MFN, por consiguiente la línea recta LX, que es común, está en ángulo recto al triángulo MFN, y al triángulo KFA [el "triángulo axial"], y por lo tanto es perpendicular a todas las líneas rectas del triángulo; y en consecuencia perpendicular a MN y AB.
>
> De nuevo, se observa que un cono, cuya base es el círculo MNX y cuyo vértice es el punto F, ha sido cortado por un plano en ángulo recto sobre el triángulo MFN seccionando al círculo MNX, y también ha sido dividido por otro plano, el plano de referencia, que corta a la base del cono con una línea recta XL en ángulos rectos a MN, que es la sección común del círculo MNX y el triángulo MFN, y la sección común del plano de referencia y del triángulo MFN, es la línea recta AB paralela al lado del cono FKM, *por consiguiente la sección resultante del cono en el plano de referencia es una parábola* y su diámetro AB, y las líneas rectas trazadas ordenadamente en dirección de la sección a AB serán trazadas en ángulos rectos, por lo que son paralelos a XL que es perpendicular a AB.

Hasta este punto, Apolonio ha construido una parábola como una sección de un cono construido de la misma forma. Sólo ahora, *después* de que ha dicho que encontró una parábola, Apolonio continúa mostrando que ha encontrado *la* parábola teniendo a CD como su lado vertical. (No se continuará la prueba). Se observa que la prueba de Apolonio es consistente con la estructura del enunciado. También, por eso, Apolonio requiere *primero* encontrar una parábola y *después* especifica que debe de ser aquella que cumple que

> cualquier línea recta que es trazada de la sección al diámetro en un ángulo dado, igualará su cuadrado al rectángulo contenido por la línea recta cortada por ésta del vértice de la sección y por alguna otra línea recta dada.

To be able to find the parabola *before* displaying the *symptōma* with its appropriate upright side *means* that *what* the parabola is, is independent of the *symptōma*. And from the proof of I.52, it is clear that what the parabola is, is given by a careful description of a planar section of a cone —to define a parabola means to define the relative positions of a cutting plane, an axial triangle, and the base of a cone. Put another way, constructing a parabola in a plane, the task of I.52 and I.53, comes down to finding a *cone* which the plane cuts in the right way.[5] Needless to say, Apollonius finds a hyperbola and ellipse in propositions I.54,55 and propositions I.56,57,58 respectively, in precisely the same way.

Hence, Apollonius's basic understanding of the conic sections is entirely geometric; it is an understanding expressed in terms of planes and cones and their relative positions and their mutual intersections and it is *only* in these terms that Apollonius describes the generation of the conic curves. One never finds in the *Conica* the *symptōmata* described in some general way independent of the cone and then used to generate a curve. In other words, Apollonius dealt with sections of cones and not with *general curves*. Lines in Apollonius have properties. Disembodied properties in search of lines, Pirandellian creatures, do not populate Greek geometry. This makes Greek geometry, and the *Conica* in particular, nonanalytic.

II.

Our reading of the *Conica* differs, of course, from the usual account which originated in Zeuthen's *Die Lehre* [Zeuthen 1886], adopted entirely by the great English historian Sir Thomas Heath, and repeated without question by almost every historian of mathematics since. In Heath's [1896, cxvi] words,

5 Referring to the same proposition, Heath admits [*Apollonius*, xxvi] this centrality of the cone saying

> Hence *finding* a particular conic was understood as being synonymous with locating it in a cone, and we actually meet with this idea in Apollonius I. 52-58, where the problem of 'finding' a parabola, and ellipse, and a hyperbola satisfying certain conditions takes the form of finding a cone of which the required curves are sections. Menaechmus and his contemporaries would perhaps hardly have ventured, without such a geometrical definition, to regard the loci represented by the three equations [!] as being really curves. When however they were found to be producible by cutting a cone in a particular manner, this fact was a sort of guarantee that they were genuine curves; and there was no longer any hesitation in proceeding with the further investigation of their properties in a plane, without reference to their origin in the cone.

El ser capaz de encontrar la parábola *antes* de exhibir el *symptōma* con sus lados verticales apropiados significa que *lo* que es la parábola, es independiente del *symptōma*. Y de la prueba de I.52 es claro que lo que la parábola es, está dado por una descripción cuidadosa de una sección plana de un cono —definir una parábola significa, definir la posición relativa de un plano cortado, un triángulo axial, y la base de un cono—. Poniéndolo de otra manera, construir una parábola en un plano, la tarea de I.52 y I.53, se reduce a encontrar un *cono* cortado en forma correcta por un plano.[8] No es necesario decir que Apolonio encuentra una hipérbola y una elipse en las proposiciones I.54, I.55, así como en las proposiciones I.56, I.57, I.58 respectivamente, y de la misma forma.

Por lo tanto, el entendimiento básico de Apolonio sobre las secciones cónicas es enteramente geométrico; éste es un entendimiento expresado en términos de planos y de conos, así como de sus posiciones relativas y sus intersecciones mutuas; y es *sólo* en estos términos que Apolonio describe la generación de curvas cónicas. Uno nunca encuentra en la *Cónica* los *symptōmata* descritos en una forma general independiente del cono y luego usados para generar una curva. En otras palabras, Apolonio trata con las secciones de conos y no con *curvas generales*. Las líneas en Apolonio tienen propiedades. Dar las propiedades en busca de líneas, creaciones pirandelianas, no popularizan la geometría griega. Esto hace a la geometría griega, y a la *Cónica* en particular, no analítica.

II

Nuestra lectura de la *Cónica* difiere, por supuesto, de la visión común que se originó en *el Die lehre* de Zeuthen [Zeuthen 1886], adoptada por completo por el gran historiador inglés Sir Thomas Heath y que ha sido, desde entonces, repetida sin cuestionarse por casi todos los historiadores de las matemáticas. En las palabras de Heath [1896, cxvi]:

8. Refiriéndose a la misma proposición, Heath admite [*Apollonius*, cxvii] esta centralidad del cono diciendo:

   [...] Y por lo tanto, encontrar una cónica particular fue entendida como sinónimo de *localizarla* en un cono, y nosotros nos encontramos actualmente con esta idea en Apolonio I.52-I.58, donde el problema de 'encontrar' una parábola, una elipse y una hipérbola satisfaciendo ciertas condiciones toma la forma de encontrar un cono del que las curvas requeridas son secciones. Menecmo y sus contemporáneos a lo mejor difícilmente se hubieran aventurado, sin tales definiciones geométricas, [a ver a los lugares geométricos representados por las tres ecuaciones] como si fueran realmente curvas. Cuando, sin embargo, se encontró que eran producibles cortando un cono de una manera particular, este hecho fue una forma de garantía de que eran curvas genuinas, y no hubo ningún titubeo en proceder con la investigación futura de sus propiedades en un plano, sin referencia a sus orígenes en el cono.

> [...] Apollonius, in deriving the three conics from any cone cut in the most general manner, seeks to find the relation between the coordinates of any point on the curve referred to the original diameter and the tangent at its extremity as axes (in general oblique), and proceeds to deduce from this relation, when found, the other properties of the curves. *His method does not essentially differ from that of modern analytical geometry except that in Apollonius geometrical operations take the place of algebraic calculations* [emphasis added].

In the usual account of the *Conics*, then, the diameter and ordinate direction are equivalent to coordinate axes and the *symptomata* to equations. So, if we introduce into the Apollonian diagram for I.11, say, an oblique system of coordinates, in which the diameter of the section serves as X-axis and an arbitrary ordinate as Y-axis, while calling the *latus rectum*, the *orthia*, p, then what Apollonius proved is that $y^2 = px$ and, 'therefore', there is no essential difference between the analytic and the Apollonian treatment of the parabola, trivial differences aside, namely, the 'cumbersome' Greek rhetoric coupled with Apollonius's 'refusal' to use algebraic symbols.

At the foundation of the usual account is another conception revived and baptized by Zeuthen, adopted by Heath, and repeated by almost every historian of mathematics since. We are, of course, referring to the notion of 'geometrical algebra'. Supporters of 'geometrical algebra' see no difficulty in translating statements concerning rectangles and squares occurring in ancient texts into equations involving products and powers. Van der Waerden [1975, 200], for example, having defined algebra as the art of handling algebraic expressions and equations, can say that,

> If this definition is applied to any Babylonian or Arab text it is unimportant what symbolism the text uses. Our relation
>
> $$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
>
> can be stated in words thus:
> 'The square of a sum is the sum of the squares of the terms and twice their product'.
> *The statement in words says exactly the same thing as the formula* [emphasis added].

It is from this type of premise that Heath [1896, clii; see also 1981 I, 153] and [1956 I, 346, 372-374] concludes that Book II of Euclid's *Elements*

> [...] supplies the means for solving the problems of modern algebra so long as they do not involve expressions above the second degree, and provided, so far as the solution of quadratic equations is concerned, that negative and imaginary solutions are excluded [...]

> [...] Apolonio, derivando las tres cónicas de cualquier cono cortado de la *manera* más general, busca encontrar la relación entre las coordenadas de cualquier punto en la curva referida al diámetro original y la tangente a su extremo como ejes (en general oblicuos), y procede a deducir de esta relación, cuando la encuentra, las otras propiedades de las curvas. *Su método esencialmente no difiere de aquél de la moderna geometría analítica, excepto que en Apolonio las operaciones geométricas toman el lugar de los cálculos algebraicos* [enfatizo].

En el punto de vista común de la *Cónica*, el diámetro y la dirección ordenada son equivalentes a los ejes coordenados, y los *symptomata* a las ecuaciones. Con ello, si nosotros introducimos en un diagrama apolónico para I.11, digamos un sistema oblicuo de coordenadas, en el que el diámetro de la sección sirve como un eje x y una ordenada arbitraria como eje y, mientras que llamando al *latus rectum*, el *orthia*, p, entonces lo que Apolonio probó es que $y^2 = px$, y, 'por consiguiente', no hay una diferencia esencial entre el tratamiento analítico y el apolónico de la parábola, salvo diferencias *formales*, como la 'pesada' retórica griega junto con el 'rechazo' de Apolonio a usar símbolos algebraicos.

El fundamento de la visión común es otro concepto revivido y bautizado por Zeuthen, adoptado por Heath, y repetido por casi todos los historiadores de las matemáticas. Nos estamos, desde luego, refiriendo a la idea del 'álgebra geométrica'. Los defensores del 'álgebra geométrica' no ven dificultad en interpretar los enunciados concernientes a los rectángulos y cuadrados que aparecen en los textos antiguos como ecuaciones que involucran productos y potencias. Van der Waerden [1975, 200], por ejemplo, habiendo definido al álgebra como el arte de manejar las ecuaciones y expresiones algebraicas, puede decir que

> si esta definición es aplicada a cualquier texto babilónico o árabe, es de poca importancia qué simbolismos use el texto. Nuestra relación
>
> $$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
>
> puede ser expresada con palabras en estos términos:
> El cuadrado de una suma es la suma de los cuadrados de los términos y el doble de su producto.
> *El enunciado en palabras, dice exactamente lo mismo que la fórmula* [enfatizo]

Es por este tipo de premisa que Heath [1896, cii; 1981 I, 153; 1956 I, 346, 372-374] concluye que el Libro II de los *Elementos* de Euclides

> [...] suple los intentos de resolver los problemas de álgebra moderna siempre y cuando ellos no involucren expresiones superiores al segundo grado, y dado que hasta ahora la solución de la ecuaciones cuadráticas es lo que nos concierne, por eso las soluciones negativas e imaginarias están excluidas [...]

This characterization of Book II of the *Elements* is particularly significant since this book contains the basic propositions relating to the 'application of areas' (*parabolē tōn chōriōn*) which, we recall, Apollonius uses to describe the *symptōmata* of the conic sections. To the extent that this characterization is plausible, then, the characterization of the *Conica* as an incipient work in analytical geometry is plausible. However, one of us has shown elsewhere that, in fact, *there is no ancient historical evidence for the notion of 'geometrical algebra', which while giving, perhaps, some satisfaction to the mathematician, can only be abhorrent to the serious historian* [see Unguru 1975, also 1979, 1981]. Space will not allow us to go over the arguments against 'geometrical algebra' as a valid general notion in the interpretation of Greek mathematics, but let us consider the arguments against the *Conica* being an incipient work in analytical geometry, that is, against the view that the *symptōmata* are equations and the diameter and ordinate directions are coordinate axes.

So, are the *symptōmata* equations? To answer this, one must answer two related questions 1) are the *symptōmata algebraic* in character, and 2) do the *symptōmata function* as equations? As to 1), the arguments against 'geometrical algebra' are, of course, as damning to an algebraic interpretation of Apollonius as they are to an algebraic interpretation of Book II of the *Elements*. The *symptōmata*, like the propositions of Euclid's second book, are stated in terms of rectangles and squares; there is no hint in *Apollonius's text* that these rectangles and squares are meant to represent the arithmetical operations of multiplication and squaring. Moreover, the fact that *one who already knows symbolic algebra* can easily rewrite the *symptōmata* as algebraic equations does not, of course, prove that this is the way *Apollonius* understands the *symptōmata*. Indeed, there is ample evidence in the text to show that when Apollonius says that a certain square equals a certain rectangle he means just that and nothing more. Let us consider two examples.

1) In each of the '*symptōmata* propositions', I.11-14, the squares on an ordinately drawn segment is compared to the rectangle applied to a certain fixed line (*lines* in the case of the opposite sections) and having as its breadth the segment cut off on the diameter by the ordinately drawn segment. In I.11, for example, the square on LK is *equal* to the rectangle on the fixed line HF and FL.

Esta caracterización del Libro II de los *Elementos* es particularmente importante ya que este libro contiene las proposiciones básicas relacionadas con la 'aplicación de áreas' (*parabolē tōn chōriōn*) que, recordemos, Apolonio usa para describir los *symptōmata* de las secciones cónicas. Hasta cierto punto, esta caracterización es plausible, por lo que la caracterización de la *Cónica* como un trabajo incipiente en geometría analítica también lo es. Sin embargo, uno de nosotros ha demostrado en otro lugar que, de hecho, *no hay evidencia histórica antigua a favor de la noción de 'álgebra geométrica', la que por un lado satisface en cierto modo a los matemáticos, y por el otro, es rechazada por los historiadores serios* (véase Unguru, 1975, 1979, 1981). El espacio no permite exponer argumentos en contra del 'álgebra geométrica' vista como una noción general válida en la interpretación de las matemáticas griegas, pero sí considerando los argumentos en contra de la *Cónica* como un trabajo incipiente en la geometría analítica, esto es, en contra del punto de vista de que los *symptōmata* son ecuaciones y donde el diámetro y la dirección ordenada son los ejes coordenados.

Entonces, ¿los *symptōmata* son ecuaciones? Para contestar esto, uno debe responder a dos preguntas relacionadas: 1) ¿Los *symptōmata algebraicos* están caracterizados?, y 2) ¿Los *symptōmata funcionan* como ecuaciones? Respecto a la primera, los argumentos en contra del 'álgebra geométrica' son, por supuesto, tan condenables para una interpretación algebraica de Apolonio como lo son para una interpretación algebraica del Libro II de los *Elementos*. Los *symptōmata*, como las proposiciones del segundo libro de Euclides, están enunciados en términos de rectángulos y cuadrados; no hay indicios en los *textos de Apolonio de* que estos rectángulos y cuadrados estén hechos para representar las operaciones aritméticas de multiplicación y raíz cuadrada. Más aún, el hecho de que *quien ya conoce álgebra simbólica* pueda fácilmente reescribir los *symptōmata* como ecuaciones algebraicas no prueba, por supuesto, que ésta es la forma en la que Apolonio entiende los *symptōmata*. De hecho, hay amplia evidencia en el texto para mostrar que cuando Apolonio dice que cierto cuadrado iguala a cierto rectángulo, él quiere decir sólo esto y nada más. Consideremos dos ejemplos.

1) En cada una de las 'proposiciones de los *symptōmata*', I.11-I.14, los cuadrados en un segmento trazado ordenadamente es comparado con el rectángulo aplicado a cierta línea fija (*líneas* en el caso de secciones opuestas) y teniendo como ancho el segmento cortado en el diámetro por el segmento trazado ordenadamente. En I.11, por ejemplo, el cuadrado de *LA* es *igual* al rectángulo de las líneas fijas *HF* y *FL*.

Apollonius's proof, somewhat abridged, is as follows. Having drawn *MN* and *KL* parallel to *BC* and *DE* respectively in the base of the cone (where *BC* and *DE* are perpendicular by the construction of the section), Apollonius concludes (by I.4) that the plane through *KL* and *MN*, being parallel to that through *BC* and *DE*, is a circle and that, therefore, rect *ML*,*LN* = sq.*KL*. Apollonius has previously set

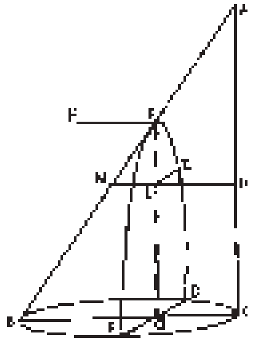


Figure 5

up *FH* perpendicular to the diameter *FG* and 'contrived' *FH* to be such that

sq.*BC*:rect *BA*,*AC*::*FH*:*FA*.

This, together with the fact, proven in *Elem.* VI.23, that

sq.*BC*:rect.*BA*,*AC* comp. *BC*:*CA*,*BC*:*BA*[9]

implies that

HF:*FA* comp. *BC*:*CA*,*BC*:*BA*.

From here, Apollonius continues,

But

BC:*CA*::*MN*:*NA*::*ML*:*LF*

and

BC:*BA*::*MN*:*MA*::*LM*:*MF*::*NL*:*FA*

Therefore

HF:*FA* comp. *ML*:*LF*,*NL*:*FA*

But

rect *ML*,*LN*:rect.*LF*,*FA* comp. *ML*:*LF*,*LN*:*FA*.

9 We are following the convention used by Taliaferro and others in which the phrase 'the ratio of rectangle *AB*,*BC* to rectangle *CD*,*DE* is compounded of the ratio of *AB* to *CD* and of *BC* to *DE*' is abbreviated as 'rect.*AB*,*BC*:rect.*CD*,*DE* comp. *AB*:*CD*,*BC*:*DE*'.

La prueba de Apolonio, resumida de alguna manera, es como sigue: Habiendo trazado MN y KL paralelas a BC y DE respectivamente, en la base del cono (donde BC y DE son perpendiculares por la

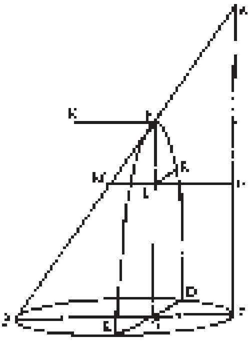


Figura 5

construcción de la sección), Apolonio concluye (por I.4) que el plano que pasa por KL y MN, es paralelo al que pasa por BC y DE, que es un círculo y que, por consiguiente, rect.ML,LN = cuad.KL. Apolonio previamente ha construido FH perpendicular al diámetro FG y 'propuso' que FH sea tal que

$$\text{cuad.}BC:\text{rect.}BA,AC::FH:FA.$$

Esto, junto con el siguiente hecho, demostrado en los *Elementos* VI.23

$$\text{cuad.}BC:\text{rect.}BA,AC \text{ comp. } BC:CA,BC:BA$$ [9]

implica que

$$HF:FA \text{ comp. } BC:CA,BC:BA.$$

De aquí, Apolonio continúa

Pero

$$BC:CA::MN:NA::ML:LF$$

y

$$BC:BA::MN:MA::LM:MF::NL:FA$$

Por lo tanto

$$HF:FA \text{ comp. } ML:LF,NL:FA.$$

Pero

$$\text{rect.}ML,LN:\text{rect.}LF,FA \text{ comp. } ML:LF,LN:FA.$$

9. Estamos usando la convención usada por Taliaferro y otros, en la cual la frase "la razón del rectángulo AB, BC con el rectángulo CD, DE está compuesta de la razón de AB a CD y de BC a DE" es abreviado como "rect.AB,BC:rect.CD,DE comp.$AB:CD,BC:DE$".

Therefore

$$HF : FA :: \text{rect}\ ML, LN : \text{rect}\ LF, FA$$

But, with the straight line FA taken as common height,

$$HF : FL :: \text{rect}\ HF, FL : \text{rect}\ LF, FA$$

therefore

$$\text{rect}\ ML, LN : \text{rect}\ LF, FA :: \text{rect}\ HF, FL : \text{rect}\ LF, FA$$

Therefore

$$\text{rect}\ ML, LN = \text{rect}\ HF, FL$$

But

$$\text{rect}\ ML, LN = \text{sq}\ KL$$

therefore also

$$\text{sq}\ KL = \text{rect}\ HF, FL.$$

It is quite clear that this proof can be readily translated into algebraic language by someone who knows algebra. Indeed, for such an algebra knower the correspondences between rectangles and products, ratios and fractions, compounding ratios and multiplying fractions are obvious. With $KL = y$, $HF = p$, and $FL = x$, the *symptom* proven becomes the equation $y^2 = px$ where p is a parameter, as many authors refer to HF [see, for example, Heath 1896, lxxx–lxxxi], in the equation. Apollonius calls HF the "straight line to which the straight lines drawn ordinatewise to the diameter are *applied* in square (*par' hēn dunantai hai katagomenai tetagmenōs epi tēn diametron*)" or simply the *orthia*, the 'upright side'. Consistent with its name, the *orthia* is set up perpendicular to the diameter at the very outset of Apollonius's proof. Setting up the *orthia* in this way has no algebraic interpretation and fulfills no algebraic requirement; for an algebraic interpretation it is enough that the *orthia* is a fixed length. As the actual side of a rectangle, however, setting up the *orthia* perpendicular to the diameter from which the other side of the rectangle is cut off has obvious significance.

2) Book VI[12] of the *Conica*, one of the non-elementary books of the *Conica*, concerns the similarity and equality of conic sections. Two conic sections are said to be equal when one can be superimposed on the other in such a way that the two coincide throughout without cutting one another [*Conica* VI, def 1]. This definition recalls Euclid's fourth Common Notion in Book I of the *Elements*: "Things which coincide (*epharmozonta*) with one another are equal to one another". The notion is quite intuitive geometrically when one applies it to

12 Quotations from Book VI are based on Paul Ver Eecke's [1963]. For the sake of consistency, however, we have used Latin letters in place of Ver Eecke's Greek ones, reproducing faithfully the Apollonian text.

Luego

$$HF:FA :: \text{rect } ML.LN : \text{rect } LF.FA$$

Pero, con la línea recta *FL* tomada a una altura común,

$$HF:FA :: \text{rect.} HF.FL : \text{rect.} LF.FA$$

por consiguiente

$$\text{rect.} ML.LN : \text{rect.} LF.FA :: \text{rect.} HF.FL : \text{rect.} LF.FA.$$

De donde

$$\text{rect.} ML.LN = \text{rect.} HF.FL.$$

Pero

$$\text{rect.} ML.LN = \text{cuad.} KL$$

por lo tanto también

$$\text{cuad } KL = \text{rect } HF.FL$$

Es claro que esta prueba puede ser trasladada a lenguaje algebraico por quien conoce el álgebra. En efecto, para tal conocedor la correspondencia entre rectángulos y productos, razones y proporciones, razones compuestas y proporciones multiplicadas es obvia. Con $KL = y$, $HF = p$ y $FL = x$, el *symptōma* probado se convierte en la ecuación $y^2 = px$ donde p es un parámetro, como al que muchos autores se refieren como *HF* en la ecuación [ver por ejemplo Heath 1896, lxxx-lxxxi]. Apolonio llama a *HF* la "línea recta a la cual las líneas rectas trazadas ordenadamente en dirección al diámetro son usadas al cuadrado (*par' hēn dunantai hai katagomenai tetagmenōs epi tēn diametron*)"[11] o simplemente el *orthia*, el 'lado vertical'. Conforme a su nombre, el *orthia* es construido perpendicular al diámetro, al principio de la demostración de Apolonio. Construir el *orthia* de esta manera no tiene interpretación ni requisito algebraico alguno, es suficiente que el *orthia* sea de una longitud determinada. El que el lado de un rectángulo fije de cualquier manera el *orthia* como perpendicular al diámetro, desde el cual el otro lado del rectángulo es cortado, tiene un significado obvio.

2) El Libro VI[10] de la *Cónica*, uno de los libros no elementales, trata las similitudes y paridades de las secciones cónicas. Se dice que dos secciones cónicas son iguales cuando una puede ser sobrepuesta en la otra de tal manera que las dos coincidan a lo largo sin cortarse mutuamente [*Cónica* VI, def 1]. Con esta definición se recuerdan las cuatro Nociones Comunes el Libro I de los *Elementos* de Euclides en: "Cosas que coinciden (*epharmozonta*) entre sí son iguales entre sí"[12]. La noción es muy intuitiva geométricamente cuando se le aplica a puntos y líneas

10. Los textos citados del Libro VI están basados en la traducción del francés Paul Ver Eecke [1963]. No obstante en favor de la consistencia, , hemos utilizado caracteres latinos de Ver Eecke en lugar de los griegos, producidos fielmente en el texto de Apolonio.

points and straight lines, as Euclid does in *Elem.* I 4,8. It is somewhat more problematic when one applies it to curved lines. Thus, when Apollonius uses the definition of equal conic sections in Book VI, he reduces the procedure of superimposing curves to one of superimposing points and rectilinear figures. In this, the importance of his expressing the *symptōmata* in terms of rectangles and squares is obvious. The first two propositions in Book VI show that two parabolas are equal whenever their upright sides referred to the axis are equal and that two hyperbolas or ellipses are equal whenever the *figures* (defined in def.XI) constructed on the axes are equal. The proof of VI 1 runs as follows: Let there be two parabolas whose axes are the lines *AD* and *FH* and, first, let their upright sides *AE* and *FM* be equal. Then the sections will be equal.

For suppose, when one applies the axis *AD* on the axis *FH*, some point of parabola *AB* does not coincide with parabola *FG*. Take *B* on the non-congruent part of *AB*, draw *BK* perpendicular to *AD*, and complete the rectangle *KE*. Further, take *FL*=*AK*, draw *LG* perpendicular to *FL* and complete the rectangle *LM*. Since *AK* and *AE* are equal to *FL* and *FM*, respectively, the rectangle *KE* must be equal to the rectangle *LM*. But the square on *KB* is equal to the rectangle

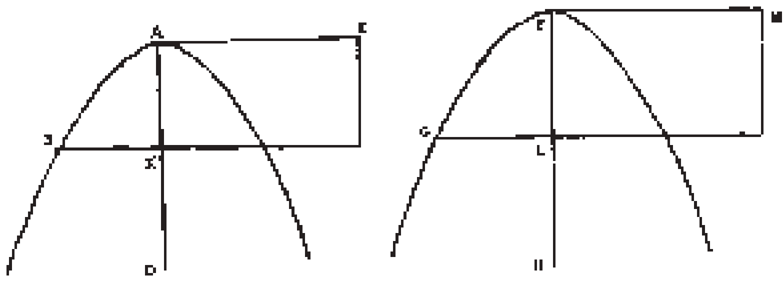


Figure 6

KE and the square on *LG* is equal to the rectangle *LM* (here, of course, we are using the *symptōma* as it is given in I.11) from which it follows that the straight line KB is equal to the straight line *LG*. Hence, if we place axis *AK* on axis *FL* so that the two coincide, *BK* will fall on *LG*, and point *B* on point *G* contradicting the hypothesis that *B* is on the part of the parabola *AB* which does *not* coincide with *FG*. So, the rectas, como Euclides lo hace en los *Elementos* I.4, I.8. De alguna manera es más problemático cuando se le aplica a líneas curvas. Entonces, cuando Apolonio usa la definición de secciones cónicas iguales en el Libro VI, reduce el procedimiento de sobreponer curvas a uno de sobreponer puntos y figuras rectilíneas. De ahí que la importancia de su expresión de los *symptomata* en términos de rectángulos y cuadrados es obvia. Las primeras dos proposiciones en el Libro VI muestran que dos parábolas son iguales siempre que sus lados verticales referidos al eje son iguales y que dos hipérbolas o elipses son iguales siempre que las 'figuras' (definidas en def. X) construidas en los ejes sean iguales. La prueba de VI.1 es como sigue: sean dos parábolas cuyos ejes son las líneas AD y FH y, si sus lados verticales AE y FM son iguales, entonces las secciones serán iguales.

Supongamos que cuando se sobrepone el eje AD en el eje FH, algún punto de la parábola AB no coincide con la parábola FG. Tome B en la parte no congruente de AB, trace BK perpendicular a AD y complete el rectángulo KE. Además, tome $FL=AK$, trace LG perpendicular a FL y complete el rectángulo LM. Ya que AK y AE son iguales a FL y FM, repectivamente, el rectángulo KE debe ser igual al rectángulo LM. Pero el cuadrado en KB es igual al rectángulo

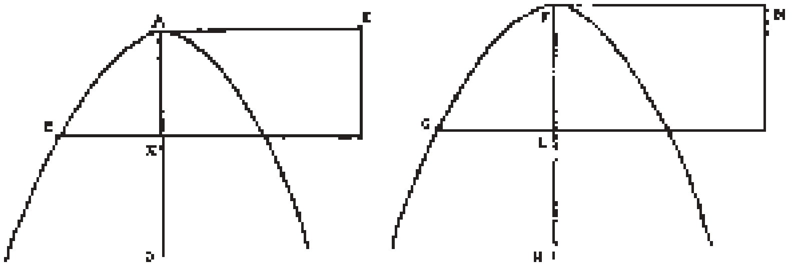


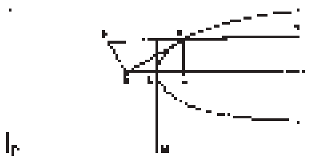
Figura 6

KE y el cuadrado en LG es igual al rectángulo LM (aquí se usan los *symptomata* como están dados en I.11) de lo que se sigue que la línea recta KB es igual a la línea recta LG. Por lo tanto, si se pone el eje AK sobre el eje FL de tal manera que los dos coincidan, BK caerá sobre LG, y el punto B en el punto G, contradiciendo la hipótesis de que B está en aquella parte de la parábola AB, que no coincide con FG. Por lo parabolas must coincide throughout and are, therefore, equal. The converses are proven similarly. One should note that the rectangles KE and LM are equal because they are superimposed on one another, AK on FL and AK on FM, so that their equality is, in fact, congruence. Apollonius demonstrates proposition VI.2 in exactly the same manner of applying one *eidos* on another, corresponding one rectangle to one rectangle, then a square to a square, then the side of the square to the side of the square. So, not only are the *symptōmata* expressed geometrically, but also *used* geometrically. The language of squares and rectangles which they employ leads to the comparison of *congruent* and *similar* [*Ibid.* VI, 12, 13] figures, that is, comparisons not only of area, but also of shape.

That the *symptōmata* are not algebraic in character should now be clear. This conclusion, however, does not exclude the possibility that the *symptōmata* are somehow *analogous* to equations of curves, or *function* in this way. Thus, our second question above. But, in fact, we have already answered this question in the first part by showing that the *symptōmata* alone do not define or determine the conic sections: in Apollonius's text, a *symptōma* never identifies an *arbitrary* curve as a parabola, hyperbola, or ellipse.[11] Even in the (Greek) mathematics

---

11 It is true that sometimes Apollonius *seems* to use the *symptōma* to show that a point is on a certain conic section. This is the use of the *symptōma* one sees in I.52. But in every case, the conic is *already given* before the *symptōma* is applied. Consider, for example, I.53. Apollonius must find a parabola whose upright side is CD as in I.52, but where the straight lines dropped ordinatewise are *not* dropped at a right angle to the diameter. Apollonius begins as follows.

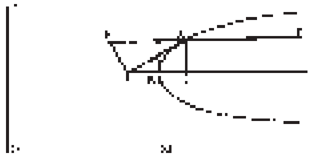


Let the angle HAE be made equal to the given angle and let AH = half CD. Let HE be perpendicular to AE, EL parallel to AH, and AL perpendicular to EL. Let EL be bisected by K and let KM be drawn perpendicular to EL and such that rect.LK,KM = sq AL. Next, relying on I.52, Apollonius describes a parabola having KL as its axis and KM as its upright side and he writes "... [the parabola] will pass through the point A because sq AL = rect LK,KM", which is the *symptōma* with reference to diameter KL and parameter KM. So it is only *after* Apollonius describes *a parabola* according to the geometric construction given in I.52 that he applies the *symptōma*. One must reject, thus, any claim that Apollonius uses what amounts to the *converse* of I.11 here: Apollonius does not claim that the point A lies on *a* parabola because sq AL = rect LK,KM but, rather, that A lies on *the* parabola *already drawn* having KL as axis and KM as upright side.

anterior, las parábolas deben coincidir completamente y ser por consiguiente, iguales. Lo opuesto es probado de igual manera. Nótese que los rectángulos *KE* y *LM* son iguales porque están sobrepuestos uno sobre el otro, *AK* sobre *FL* y *AE* sobre *FM*, de tal manera que su equivalencia es congruente. Apolonio demuestra la proposición VI. 2 exactamente de la misma manera sobreponiendo un eje en otro, correspondiendo así un rectángulo en otro rectángulo, después un cuadrado a otro cuadrado y el lado del cuadrado en el lado del cuadrado. Con ello, no sólo los *symptōmata* son expresados geométricamente, sino también *usados* geométricamente. El lenguaje de cuadrados y rectángulos usado lleva a la comparación de figuras *congruentes* y *similares* [*Ibid.* VI, 12, 13], esto es, comparaciones no sólo de área sino también de forma.

Que los *symptōmata* no sean de carácter algebraicos debería ser ahora claro. Esta conclusión, sin embargo, no excluye la posibilidad de que los *symptōmata* sean de alguna manera *análogos* a ecuaciones de curvas, o *funciones* de esta manera. Entonces nuestra segunda pregunta, antes mencionada, de hecho ya la hemos contestado en la primera parte, demostrando que los *symptōmata solos* no definen o determinan las secciones cónicas: en el texto de Apolonio, un *symptōma* nunca identifica una curva arbitraria como una parábola, una hipérbola o una elipse.[11] Aún en las matemáticas [griegas] de un

11 Es verdad que algunas veces Apolonio *parece* usar el *symptōma* para mostrar que un punto está en una cierta sección cónica. Éste es el uso del *symptōma* que se ve en I.52. Pero en cada caso, la cónica *ya está dada* antes que el *symptōma* sea aplicado. Considere, por ejemplo, I.53. Apolonio debe encontrar una parábola cuyo lado vertical es *CD* como en I.52, pero donde las líneas rectas trazadas ordenadamente *no* son trazadas en un ángulo recto al diámetro. Apolonio inicia como sigue.



Sea el ángulo *HAE* igual al ángulo dado y sea *AH* = la mitad de *CD*. Sea *HE* perpendicular a *AE*, *EL* paralela a *BH* y *AL* perpendicular a *EL*. Sea *EL* bisectada por *K* y sea *KM* trazada perpendicularmente a *EL* y tal que rect *LK*, *KM* = cuad *AL*.

Después apoyándose en I.52, Apolonio describe una parábola que tiene *KL* como su eje y a *KM* como su lado vertical y escribe "[...] [la parábola] pasará por el punto *A* ya que cuad. *AL* = rect. *LK*, *KM*", que es el *symptōma* que se refiere al diámetro *KL* y al parámetro *KM*. Entonces, después de que Apolonio describe una parábola de acuerdo con la construcción geométrica dada en I.52 es que él aplica el *symptōma*. Se debe rechazar por consiguiente, cualquier aseveración que Apolonio use para lograr lo *inverso* de I.11 aquí. Apolonio no afirma que el punto *A* yace en esta parábola porque cuad. *AL* = rect *LK*,*KM* sino, por el contrario, que *A* yace en la parábola ya trazada, teniendo *KL* como eje y a *KM* como lado vertical.

of a much later period, one does not find the *symptōmata* taking on this function. In *On the Section of a Cylinder* by the fourth century A.D. mathematician Serenus, for example, there is a proposition showing that a section of an oblique cylinder which is neither subcontrary nor parallel to the base has a property identical to the *symptōma* of an ellipse and afterwards, significantly, there is a proposition showing that "it is possible to exhibit a cone and a cylinder which are alike cut in one and the same ellipse" [translation from Heath 1981 II, 520]. Thus, Serenus, like Apollonius, thought that a curve having the *symptōma* of an ellipse still could not legitimately be called an ellipse until he could find a cone of which it was a section.

This is the place to point out the long-established difference between *symptōma* and *ousia* in mathematico-philosophical discourse. A *symptōma* is a property. Properties are of something, in mathematics this is certainly the case. Mugler translates *symptoma* as: '*Proprietas, propriété, Eigenschaft, Property*' and defines it as 'Fait géométrique qui est la conséquence de conditions réalisées par une figure'. He goes on to cite examples from Archimedes, Apollonius, Pappus, and Proclus, substantiating his translation. *Ousia* is, of course, something else. It is "that which is one's own, one's substance, property [!]... real property [!], being, existence", but "in the phil. of Plat., and still more in that of Arist., the doctrine of οὐσία plays an important part". The meanings given by *LSJ* are: the being, essence, true nature of a thing, the essence, species, or true definition of a thing, reality, a primary substance, element, any organic substance, the material cause. In short, it seems that linguistic usage in the relevant mathematico-philosophical discourse lends full support to what was said above about the *symptōmata* versus the definitions, essences of the conic sections. The *symptōmata* are not *ousiai*. The *true definitions* of the conics are provided by their generations, not by their properties.

Further evidence for what we have been saying can be found in Apollonius's treatment of the three and four-line locus problem. Apollonius mentions the locus problem in his introductory letter to Book I of the *Conica*. There he says, concerning the contents of Book III, that it

> contains many incredible theorems of use for the construction of solid loci and for limits of possibility (*tous diorismous*) of which the greatest part and the most beautiful are new. And when we had grasped these, we knew that the three-line and four-line locus had

período posterior, no se encuentra a los *symptômata* llevando a cabo esta función. En *Sobre la sección de un cilindro*, escrito alrededor del siglo IV d.C., el matemático Sereno, por ejemplo, formula una proposición que muestra una sección de un cilindro oblicuo que no es ni subcontrario ni paralelo a la base pero tiene una propiedad idéntica a la del *symptôma* de una elipse. Posteriormente hay una proposición que muestra que "es posible exhibir un cono y un cilindro que son cortados en forma similar, resultando la misma elipse" [traducción de Heath 1981 II, 520]. Por eso, Sereno al igual que Apolonio, pensó que una curva que tiene el *symptôma* de una elipse no podría ser llamada legítimamente una elipse hasta que él encontrara el cono del cual éste fue seccionado.

Este es el lugar para señalar la diferencia establecida entre *symptôma* y *ousía* en el discurso matemático-filosófico. Un *symptôma* es una propiedad. Las propiedades provienen de algo y en matemáticas este es ciertamente el caso. Mugler traduce *symptôma* como, "*Proprietas, propriété, Eigenschaft, Property*" y lo define como, "Fait géométrique qui est la conséquence de conditions réalisées par une figure". Para hacer más sólida su traducción continúa citando ejemplos de Arquímides, Apolonio, Pappus y Proclo. *Ousía* es, por supuesto, otra cosa. Es "[a]llo que es de uno, substancia de uno, propiedad [!], [...] propiedad real [¡!], ser, existir", pero "en la filosofía de Platón, y aún más en aquella de Aristóteles, la doctrina de οὐσία juega una parte importante". Los significados dados por LSJ son, el ser, esencia, naturaleza verdadera de una cosa, la esencia, especies, o la verdadera definición de una cosa, realidad, una substancia primaria, elemento, cualquier substancia orgánica, la causa de la materia. En resumen, parece ser que el uso del lenguaje en los discursos matemático-filosófico relevantes dan un apoyo completo a lo que se dijo anteriormente con respecto a los *symptômata* contra las definiciones, esencia de las secciones cónicas. Los *symptômata* no son *ousíai*. Las *definiciones correctas* de las cónicas son proporcionadas por la forma en que se generan, no por sus propiedades.

Una evidencia adicional para lo que hemos venido diciendo puede ser encontrada en el tratamiento, dado por Apolonio, del problema del lugar geométrico de tres y cuatro líneas. Apolonio menciona el problema del lugar geométrico en la parte introductoria del Libro I de la *Cónicas*. El Libro III, dice

> contiene muchos teoremas increíbles para el uso de la construcción de lugares geométricos sólidos y para límites de posibilidades (*pros diorismous*), de los cuales la parte más grande y más hermosa es nueva. Y cuando habíamos entendido esto, supimos que el lugar geométrico de tres

> not been constructed by Euclid, but only a chance part of it and that not very happily. For it was not possible for this construction to be completed without the additional things found by us.

The theorems in Book III which relate most closely to the three and four-line locus are propositions III.54-56, the last three propositions of the book. Let us consider III.54. It states:

> If two tangents to a section of a cone or to a circumference of a circle meet, and through the points of contact parallels to the tangents are drawn, and from the points of contact, to the same point of the line of the section, straight lines are drawn across cutting the parallels, then the rectangle contained by the straight lines cut off to the square of the straight line joining the points of contact has a ratio compounded of the ratio which the inside segment line joining the point of meeting of the tangents and the midpoint of the straight line joining the points of contact has in square to the remainder, and of the ratio which the rectangle contained by the tangents has to the fourth part of the square on the straight line joining the points of contact.

Thus, in the diagram below, if ABC is the section, AD and CD are tangents meeting at point D, E is the mid-point of AC, AF and CG are parallel to CD and AD respectively, H is an arbitrary point of the section, and CH and AH are extended to F and G respectively, then the theorem states that the ratio rect.AF,CG:sq.AC is compounded of the ratios sq.EB:sq.BD and rect.AD,DC:fourth sq.AC.

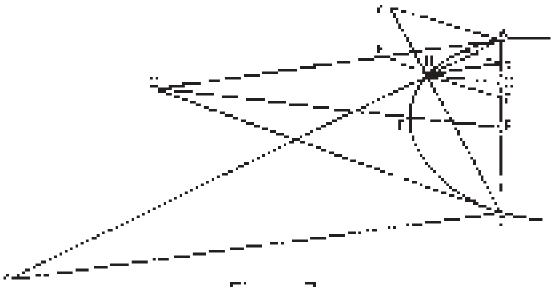


Figure 7

As Taliaferro [1952, 799] rightly points out, the three-line locus property for all but the opposite sections follows easily from this proposition. For if HX, HY, and HZ are drawn from H to AC parallel to AD, BE, and DC respectively, then we have $CZ:ZH::AC:AF$ and $AX:XH::AC:CG$ by similar triangles and from these proportions and *Elem.* VI.23 we have

> y cuatro líneas no había sido construido por Euclides, sino sólo una parte casual de éste y no con mucho entusiasmo. Por lo que no fue posible para esta construcción ser completada sin las cosas adicionales encontradas por nosotros.

Los teoremas en el Libro III que se relacionan más cercanamente a el lugar geométrico de tres y cuatro líneas son las proposiciones III.54-III.56, las tres últimas del libro. Consideremos III.54 que afirma:

> Si dos tangentes a una sección de un cono o a una circunferencia de un círculo se intersectan, y son trazadas, por los puntos de contacto, paralelas a las tangentes, y de los puntos de contacto al mismo punto de la línea de la sección, son trazadas líneas rectas cortando a las paralelas, entonces el rectángulo contenido por las líneas rectas, que cortan al cuadrado de la línea recta que une los puntos de contacto, tiene una razón compuesta por la razón de la línea interna segmentada al unir el punto de encuentro de las tangentes y el punto medio de la línea recta y al unir los puntos de contacto, que tiene con el cuadrado del resto, y de la razón que el rectángulo contenido por las tangentes tiene con la cuarta parte del cuadrado en la línea recta, uniendo los puntos de contacto.

Por consiguiente, en el diagrama de abajo, si ABC es la sección; AD y CD son tangentes que se intersectan en el punto D; E es el punto medio de AC; AF y CG son paralelos a CD y a AD respectivamente; H es un punto arbitrario de la sección y, CH y AH se prolongan a F y G respectivamente, entonces el teorema afirma que la razón rect.AF.CG:cuad.AC está compuesta por las razones cuad.EB:cuad.BD y rect.AD.DC:cuarta cuad.AC.

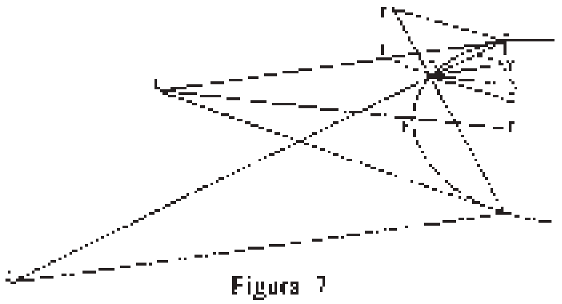


Figura 7

Como correctamente señala Taliaferro [1952, 799], la propiedad del lugar geométrico de tres líneas para las secciones opuestas, se sigue fácilmente de esta proposición. Si HX, HY y HZ son trazadas desde H a AC, y estas tres son paralelas a AD, BE y DC, respectivamente, entonces tenemos $CZ:ZH::AC:AF$ y $AX:XH::AC:CG$ por triángulos similares y de estas proposiciones y de los *Elementos* VI.23 tenemos rect.CZ,AY:rect.ZH,HY::sq.AC:rect.AF,CG

But from *Conics* III.54, sq.AC:rect.AF,CG is a fixed ratio, being compounded of fixed ratios and, therefore the ratio rect.CZ,AY:rect.ZH,HY is also fixed. By a similar argument we obtain the proportion rect.ZH,HY:sq.HX :: rect.CD,DE:sq.DE so that rect.ZH,HY : sq.HX, too, is a fixed ratio. Therefore, the ratio rect.CZ,AY:sq.HX is, *ex aequali*, a fixed ratio. Now since HY is parallel to AD, AY can be thought of as the distance from H to line AD and, similarly, CZ can be thought of as the distance from H to CD. Hence, if H is an arbitrary point of section ABC, the rectangle whose sides are the distances from H to the lines AD and CD bears a constant ratio to the square whose side is the distance from H to the line AC. Moreover, if the distance from H to, say, AD is taken at a different angle, say, along HR, then the theorem still holds. For if one draws line PY parallel to HR then, noting that PY:AY is a fixed ratio, again we have rect.CZ,PY:sq.HX is constant though it is not necessarily the same ratio as rect.CZ,AY:sq.HX.

Assuming that this reconstruction is correct, what does it show? To answer this, consider what Proclus has to say about loci and locus-theorems:

> I call locus-theorems those which deal with the same property (*symptôma*) throughout the whole of a locus, and a locus I call a position of a line or surface which has (*poiousan*) throughout one and the same property. Furthermore, since lines may be plane or solid —plane being those which are simply generated in a plane, like the straight line, and solid those which are generated from some section of a solid figure, like the cylindrical helix or the conic sections— it would appear that line-loci may be plane loci or solid loci [Thomas 1991 I, 1-9]]

Proclus's description of loci and locus-theorems makes a clear distinction between the property possessed by the curve and its geometrical origin. The property, therefore, cannot be understood as *generating* the curve or in any way *defining* the curve. In this connection, we point out parenthetically that Proclus saw *Elem.*, I.35, that "Parallelograms which are on the same base and in the same parallels are equal to one another", as the first locus-theorem in the *Elements* [Heath 1956 I, 329]. Indeed, it would be a far-fetched conclusion that Euclid saw *Elem.*, I.35 as *defining* parallel lines. An ellipse, parabola, circle, and hyperbola are *defined* as sections of a cone, although at the same time they answer the question, what curve has the property that if from any of the points on it distances are taken at fixed rect.CZ,AY:rect.ZH,HY:: cuad.AC:rect.AE,CG.

Pero en la *Cónica* III.54, cuad.AC:rect.AE,CG es una razón fija, compuesta de razones fijas siendo, por lo tanto, la razón rect.CZ,AY:rect.ZH,HY también fija. Mediante un argumento similar se obtiene la proporción rect.ZH,HY:cuad.HX:: rect.CD,DA:cuad.DE de tal manera que rect.ZH,HY:cuad.HX, también, es una razón fija. Por consiguiente, la razón rect.CZ,AY:cuad.HX es, *ex aequali*, una razón fija. Ahora, dado que HY es paralela a AD, AY puede ser pensada como la distancia de H a la línea AD y, de igual manera, CZ puede ser pensada como la distancia de H a CD. Por lo tanto, si H es un punto arbitrario de la sección ABC, el rectángulo cuyos lados son las distancias de H a las líneas AD y CD sostiene una razón constante al cuadrado cuyo lado es la distancia de H a la línea AC; más aún, si la distancia de H a, digamos, AD es tomada en un ángulo diferente, digamos, a lo largo de HR, entonces el teorema sigue siendo válido. Si uno traza una línea PF paralela a HR entonces, notamos que PF:AF es una razón fija, otra vez tenemos que rect.CZ,PF:cuad.HX es constante aunque no es necesariamente la misma razón que rect.CZ,AY:cuad.HX.

Asumiendo que esta reconstrucción es correcta, ¿qué es lo que muestra? Para contestar esto, consideremos lo que Proclo tiene que decir acerca de los lugares geométricos y sus teoremas:

> Llamo teoremas de lugar geométrico a aquellos que se ocupan de la misma propiedad *específica* en la totalidad de un lugar geométrico, y llamo un lugar geométrico a una posición de una línea o superficie que tiene [*comporta*] por todas partes una y la misma propiedad. Más aún, dado que las líneas pueden ser planas o sólidas —siendo planas aquellas que son simplemente generadas en un plano, como la línea recta, y sólidas aquellas que son generadas por alguna sección de una figura sólida, como la hélice del cilindro o las secciones cónicas— parecería que los lugares geométricos lineales pueden ser lugares geométricos planos o lugares geométricos sólidos [Thomas 1991 I, 491].

La descripción de Proclo de lugares geométricos y de los teoremas de lugar geométrico hace una clara distinción entre la propiedad que posee la curva y su origen geométrico. Por consiguiente, la propiedad no puede ser entendida como *generadora* de la curva o, de ninguna manera, *definiendo* la curva. En esta relación, señalamos entre paréntesis que Proclo vio en los *Elementos*, I.35, que "los paralelogramos que están en la misma base y en las mismas paralelas son iguales unos a otros", como el primer teorema de lugar geométrico en los *Elementos* [Heath 1956 I, 329]. En efecto, sería una conclusión aventurada que Euclides vió los *Elementos* I.35, como *definición* de las líneas paralelas. Elipse, parábola, círculo e hipérbola se *definen* como secciones de un cono, y al mismo tiempo contestan la pregunta: ¿qué curva tiene la propiedad de que si de cualquiera de sus puntos en su distancia son angles to fixed lines, the rectangle whose sides are two of the distances bears a fixed ratio to the square whose side is the third distance. Hence, when in his prefatory letter Apollonius speaks of constructing the three and four-line locus, he is not referring to an alternate way of producing conic sections, but to the demonstration that the points on a given conic section provide a solution to the locus problem: the conic section itself must be *produced* according to its *geometric* definition.

The way in which Descartes approached Pappus's challenge of generalizing the three and four-line locus, what has come to be known as the 'Pappus problem', played, indeed, a pivotal role in the development of analytical geometry —and, indeed, one sees in it the immense gap between the explicitly algebraic thinking of *La Géométrie* and Apollonius's and Pappus's geometrical thinking. Not only does Descartes, by means of his "arithmetic of lines", [Smith 1954, 1-17] transform Apollonius's and Pappus's rectangles and squares into 'line products', but he also changes the very conception of the problem. For Apollonius, the problem is to find a *curve* whose points satisfy a certain locus, and although a point may first be found through an 'analysis', the real solution of the problem is in the 'synthesis' where the curve is constructed geometrically. For Descartes, however, the problem is *to find a point* satisfying the given conditions and, as he says, "since there is always an infinite number of different points satisfying these requirements, it is also required to discover and trace the curve containing all such points" [*Ibid.*, 22]. The shift from identifying a curve to finding a point may appear insignificant, especially to modern readers of Descartes, but in fact it is crucial. To understand why, one must ask what it means *to find a point* or, rather, how one is to answer the question, *where* is a point. In the Greek approach to the locus problem, a point is found on a curve given in position (*thesei dedomenos*) where 'given', in this case, means *constructed* along the lines, say, of *Conica*, I.52-60.[12] In Descartes' approach to the problem, a point is found, as expressed by the opening sentence of his book, through "a knowledge of the lengths of certain straight lines..." [Smith 1954, 2], in this case, the lines drawn from the point to the given lines (the three and four lines in the three and four-line locus or the n lines in the generalized problem). Therefore, finding a point is independent of the curve on which it lies. It is only because there is

12 Significant support for what we have said about Apollonius's and Pappus's approach to the locus problem and about the difference between this and Descartes' approach can be found in a recent book by Lachterman [1989].

tomadas en un ángulo fijo hacia líneas fijas, el rectángulo cuyos lados son dos de las distancias sostienen una razón fija con el cuadrado cuyo lado es la tercera distancia? Por lo tanto, cuando en su parte introductoria Apolonio habla de construir el lugar geométrico de tres y cuatro líneas, no se está refiriendo a una manera alternativa de producir secciones cónicas sino a la demostración de que los puntos sobre una sección cónica dada lleva a una solución del problema del lugar geométrico: la sección cónica debe *producirse* de acuerdo con la definición *geométrica*.

La forma en la que Descartes aborda el intento de Pappus de generalizar el lugar geométrico de tres y cuatro líneas, conocido como el 'problema de Pappus', ha jugado un papel fundamentalmente, en el desarrollo de la geometría analítica —en efecto, aquí se ve la inmensa distancia entre el pensamiento algebraico explícito de *La Géométrie* y el pensamiento geométrico de Apolonio y Pappus. No sólo Descartes, por medio de su 'aritmética de las líneas' [Smith 1954, 1-17], transforma los rectángulos y cuadrados de Apolonio y Pappus sino que los transforma en 'productos' de las líneas, cambiando con ello la concepción misma del problema. Para Apolonio, el problema es encontrar *una curva* cuyos puntos satisfagan un cierto lugar geométrico, y aunque un punto puede primero ser encontrado a través de un 'análisis', la solución real del problema está en la 'síntesis', donde la curva es construida geométricamente. Para Descartes, sin embargo, el problema es *encontrar un punto* que satisfaga las condiciones dadas y, como dice "ya que hay siempre un número infinito de puntos diferentes que satisfacen estos requerimientos, es también necesario descubrir y trazar la curva que contiene todos esos puntos" [*Ibid.*, 22]. El cambio de identificar una curva a encontrar un punto puede parecer insignificante, especialmente para los lectores modernos de Descartes, pero de hecho es crucial. Para entender por qué, se debe preguntar qué significa *encontrar un punto* o, mejor dicho, cómo contestar a la pregunta, *dónde* está un punto. En el enfoque griego al problema del lugar geométrico, un punto es encontrado sobre una curva dada, en posición (*thesei dedomenes*), donde 'dado', en este caso, significa *construido* a lo largo de las líneas, digamos, de *Cónicas* I.52-60.[12] En el enfoque de Descartes al problema, un punto es encontrado, como se expresa en la frase inicial de su libro, a través de "un conocimiento de la longitud de ciertas líneas rectas [...]" [Smith 1954, 2], en este caso, las líneas trazadas del punto a las líneas dadas (las tres y cuatro líneas en el lugar geométrico de tres y cuatro líneas o las *n* líneas en el problema generalizado). Por consiguiente, encontrar un punto es independiente de la curva sobre la que éste se encuentre. Esto es sólo porque hay una infinidad

12. Un apoyo significativo a lo que hemos dicho acerca de cómo abordan Apolonio y Pappus el problema del lugar geométrico y acerca de las diferencias entre ésto y cómo lo aborda Descartes puede ser encontrado en un libro reciente de Lachterman [1989].

an infinity of points satisfying the locus condition that one thinks to look for a curve. The points on a curve are, thus, *prior* to the curve itself; where a point is is governed soley by the 'arithmetical' relationship among the lengths drawn from the point to given lines and this same relationship, therefore, determines the curve on which the point lies. While Descartes is not entirely explicit about this, he is certainly aware that this understanding of the origin of curves is an unavoidable outcome of his new algebraic approach to the Pappus problem and that this approach embodies a radically new understanding of the problem. Indeed, immediately after the initial discussion of the problem he launches into a book-long discussion of the nature of curves.

The view that the origins of analytical geometry lie in the *Conics* arises, to a great degree, through an underestimation of the conceptual difference between the algebraic approach to problems such as the three and four-line locus, adopted by mathematicians like Descartes and the purely geometrical approach of the Greeks. In his various writings, Jacob Klein makes this difference particularly clear by drawing on the distinction made in medieval logic between *intentiones primae* and *intentiones secundae* [Klein 1981, 28-30; 1985, 60-65; 1968, 174-175, 192-206 *ff.* 299-300, Kretzmann 1967 VII, 359 *ff*. *Intentiones primae* are concepts which refer to any thing other than a concept as such. 'Red', 'family', 'circle', are all *intentiones primae*, for all refer to distinct entities. *Intentiones secundae*, on the other hand, are concepts which refer to other concepts. Thus, 'quality', 'relationship', 'shape', are *intentiones secundae* for we say 'red is a quality', and 'a circle is a shape'. According to Klein, ancient mathematics is dominated by *intentiones primae*. A Greek mathematician always looks at a circle, a parabola, or a spiral, and when, for example, he classifies curves, he classifies distinct curves before his eyes; he does not attempt to classify all the curves which *can be*. This dominance of *intentiones primae* is also the reason, evidently, why Greek geometry is a visual science which cannot do without diagrams: a proof in Greek geometry focuses on some distinct object 'imaged', as Klein says [1981, 27-28], in the diagram. So characterizing Greek mathematics as a mathematics dealing with *intentiones primae* means that its geometrical approach does not arise out of the abstract problem of incommensurable magnitudes, say, but rather out of its *direct confrontation* with the objects of its study. Modern mathematics, on the other hand, is characterized by a kind of synthesis of *intentiones primae* and *intentiones secundae*. Modern mathematics becomes modern when it becomes symbolic and it becomes symbolic only when *intentiones* de puntos que satisfacen la condición del lugar geométrico que uno piensa buscar en una curva. Los puntos en una curva son, por lo tanto, *anteriores* a la curva misma: en dónde se sitúe el punto estará dado solamente por la relación 'aritmética' entre las longitudes trazadas desde el punto a las líneas dadas y su misma relación, determinando así la curva sobre la cual el punto se encuentra. Mientras que Descartes no es enteramente explícito acerca de esto, él está consciente que esta comprensión del origen de las curvas es una consecuencia ineludible de su nueva forma de abordar el problema algebraico de Pappus y que este enfoque incluye una comprensión radicalmente nueva del problema. En efecto, inmediatamente después de la discusión inicial del problema, inicia en el libro uno larga discusión sobre la naturaleza de las curvas.

El punto de vista de que los orígenes de la geometría analítica descansan en la *Cónica* surge, en gran medida, por la subestimación de la diferencia conceptual entre el enfoque algebraico de problemas como el del lugar geométrico de tres y cuatro líneas, adoptada por matemáticos como Descartes, y el enfoque puramente geométrico de los griegos. En varios de sus escritos, Jacob Klein hace esta diferencia particularmente clara esbozando la distinción hecha en la lógica medieval entre las *intentiones primae* y las *intentiones secundae* [Klein 1981, 28-30; 1985, 60-63; 1968, 174-175, 192, 206 *ff.*, 299-300], Kretzmann [1967 VII, 369]). *Intentiones primae* son conceptos que se refieren a cualquier otra cosa que no sea un concepto como tal: 'Rojo', 'familia' y 'círculo', son *intentiones primae*, porque todas ellas se refieren a entidades diferentes. *Intentiones secundae*, por otro lado, son conceptos que se refieren a otros conceptos. Así, 'cualidad', 'relaciones', 'forma' son *intentiones secundae*, por lo que decimos 'rojo es una cualidad' y 'un círculo es una forma'. De acuerdo con Klein las matemáticas antiguas están dominadas por *intentiones primae*. Un matemático griego siempre ve a un círculo, una parábola o una espiral, y cuando, por ejemplo, él clasifica las curvas, las clasifica como curvas distintas ante sus ojos; no intenta clasificar todas las curvas que *puedan ser*. Este dominio de las *intentiones primae* es evidentemente también la razón del por qué la geometría griega es una ciencia visual que no puede hacerse sin diagramas: una prueba en la geometría griega se enfoca en algún objeto distinto 'representado', como dice Klein, en un diagrama [Klein 1981, 27-28]. De este modo, caracterizar las matemáticas griegas como unas matemáticas que se ocupan de *intentiones primae* significa que su enfoque geométrico no surge de un problema abstracto de magnitudes inconmensurables, sino de sus *confrontaciones directas* con los objetos de su estudio. Las matemáticas modernas, por otro lado, se caracterizan por un tipo de síntesis entre *intentiones primae* e *intentiones secundae*. Las matemáticas modernas llegan a ser modernas cuando se convierten en simbólicas y llegan a ser simbólicas *secundae* become *intentiones primae* (*ibid.*). Here is how Klein [1985, 62-63] puts it:

> [...] if we have an expression such as $a - 2ab + c$, what does 'a' mean? 'a' can mean, of course, any possible number of the kind the Greeks dealt with: 'a' can be 4, or 6, or 150, or any possible one, but 'a' is not 4, or 6, or 150, or any other one. Thus, 'a' doesn't mean certain objects, namely units, the multitude of which it indicates, but rather the *concept* of the number as a multitude of units. So, at first glance, 'a' belongs to the concepts of the second class, to the class of concepts which are applied not to individual objects but to concepts themselves. This, however, is only the first step. Actually, we deal with 'a' and with all such algebraic numbers in exactly the same way as arithmetic deals with ordinary numbers. In other words, in algebra we use concepts of the second class as though they were concepts of the first class. We identify, in the process of algebraic thinking, concepts of the first class with concepts of the second class. What we call a symbol is nothing else but a concept of the second class interpreted as a concept of the first class. Therefore, we can now state that the 'peculiar kind of abstraction' used in algebra is a *symbolic* abstraction.

In this light, Descartes' *concepts* of 'abscissa' and 'ordinate' bear the same relation to Apollonius's 'corresponding' *objects* as 'a' bears to '4', or '6', or '150'. For they do not stand for some particular abscissa and ordinate in some distinct ellipse or hyperbola; the x and y axes are not specific lines such as *FL* and *LK* in fig.5 above, but the very *concept* of such lines, the 'general procedure' [Klein 1981, 28-29] by which *any* such *FL* and *LK* like lines are produced. Yet these axes are treated as if they were distinct particular objects and as is any object built with their assistance. For this reason Descartes (and we) can speak of '$y^2 = px$' as the object called a parabola, since in the sense elucidated above '$y^2 = px$' is a parabola. In other words, the algebraic representation of a curve has become the curve itself [Klein 1968, 123].

The difference between Apollonius's purely geometrical approach to the study of conic curves and an algebraic approach such as that of Descartes, can be seen readily in Apollonius's treatment of the *diameters* of conic sections. As we have seen, Apollonius defines the diameter of a curve in general at the start of the *Conica*. In the porism to proposition I.7, we learn that a section of a cone, in particular, has a diameter. The exact enunciation of I.7 is as follows:

> If a cone is cut by a plane through the axis, and if it is also cut by another plane cutting the plane the base of the cone is in, in a straight line perpendicular either to the base of the axial triangle or to it produced, then the straight lines drawn from the resulting section

sólo cuando *intentiones secundae* se convierten en *intentiones primae* [*Ibid.*]. He aquí cómo lo expresa Klein [1985, 62-63]:

> [...] si nosotros tenemos una expresión tal como a + 2ab + c, ¿qué significa 'a'? 'a' puede significar, por supuesto, cualquier número posible del tipo con el que los griegos trazan. 'a' *puede ser* 4, o 150 o cualquier otro posible, pero 'a' no es 4, 6, 150 o cualquier otro. De este modo 'a' no significa ciertos objetos, nombrados unidades, la multitud que esto indica, sino por el contrario el *concepto* del número como una multitud de unidades. Así, a primera vista, 'a' pertenece a los conceptos de la segunda clase, a la clase de los conceptos que son aplicados no a objetos individuales sino a los conceptos mismos. Esto, sin embargo, es el primer paso. Actualmente, nosotros tratamos con 'a' y con todos esos números algebraicos exactamente de la misma manera como la aritmética trata con los números ordinarios. En otras palabras, en álgebra usamos conceptos de la segunda clase como si fueran conceptos de la primera clase. Identificamos en los procesos del pensamiento algebraico, conceptos de la primera clase con conceptos de la segunda clase. Lo que llamamos un símbolo no es otra cosa que un concepto de la segunda clase interpretado como un concepto de la primera clase. Por consiguiente, podemos ahora afirmar que el 'peculiar tipo de abstracción' usado en álgebra es una abstracción *simbólica*.

Con esta visión, los *conceptos* de Descartes de 'abscisa' y 'ordenada' sostienen la misma relación que los *objetos* 'correspondientes' de Apolonio, como 'a' sostiene a '4, 6 o 150'. Para ellos, no están colocados en alguna abscisa y ordenada particular, en alguna elipse o hipérbola distinta; los ejes x y y no son líneas específicas tales como *FL* y *LK* en la figura 5, sino el mismo *concepto* de tales líneas, el 'procedimiento general' [Klein 1981] por el que cualesquier línea como *FL* y *LK* son producidas. No obstante, estos ejes son tratados como si fueran objetos particulares distintos, al igual que cualquier objeto construido con su asistencia. Por esta razón, Descartes (y *cualquiera de nosotros*) puede hablar de '$y^2 = px$' como el objeto llamado parábola, ya que en el sentido antes aclarado '$y^2 = px$' es una parábola. En otras palabras, la representación algebraica de una curva se ha convertido ella misma en una curva [Klein 1968, 123].

La diferencia entre enfoque geométrico puro de Apolonio con respecto al estudio de las curvas cónicas y el enfoque algebraico como el de Descartes, puede verse fácilmente en el tratamiento de Apolonio para los diámetros de las secciones cónicas. Como hemos visto, Apolonio define el diámetro de una curva en general al principio de la *Cónica*. En el porisma de la proposición I.7, aprendemos que la sección de un cono, en particular, tiene un diámetro. El enunciado exacto de I.7 es como sigue:

> Si un cono es cortado por un plano a través del eje, y si éste es también cortado por otro plano que corta al plano que contiene a la base del cono, en una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial o a lo que éste produce, entonces las líneas rectas trazadas de la sección

> on the cone's surface, made by the cutting plane, parallel to the straight line perpendicular to the base of the triangle will fall on the common section of the cutting plane and of the axial triangle, and further produced to the other side of the section, are bisected by the common section, and if it is a right cone the straight line in the base will be perpendicular to the common section of the cutting plane and of the axial triangle, and if oblique, it will not always be perpendicular, but whenever the plane through the axis is perpendicular to the base of the cone.

One observes that the word 'diameter' appears nowhere in this enunciation nor, for that matter, in the proof which follows it. Only after the proof, almost incidentally, does Apollonius say in the form of a porism that

> from this [proposition] it is evident that the straight line FG [which is the common section of the cutting plane and the axial triangle] is the diameter of the section *DFE*, since it bisects the straight lines drawn parallel to some straight line *DE* [the common section of the cutting plane and the plane of the cone's base], and that it is possible for some parallels to be bisected by the diameter *FG* and not be perpendicular.

Hence, the focus of proposition I.7 is a *sectioning procedure* which happens to contain *within it* the construction of a diameter and the determination of the corresponding ordinate direction. Accordingly, when Apollonius applies I.7 in I.11-14 he does so with the same detailed description of how the various planes must be oriented with respect to the cone, and it is through this description that we know how to cut the cone to produce the desired section. The reader of these propositions sees, therefore, that the production of the conic sections is simultaneous with the production of a diameter. In this sense, the diameter is inseparable from the conic section in which it is found, and conversely, the definition of a conic section includes the position of its diameter.

What we have been saying might appear at odds with what is certainly one of the main themes of Book I, namely, that every conic has an indefinite number of diameters. The way Apollonius develops this theme, however, only *emphasizes* the distinction of the diameter produced by the sectioning procedure of I.7. In the first step of this development, Apollonius proves the existence of a conjugate (*suzugês*) diameter for the ellipse (I.15) and opposite sections (I.16). It is important to note that beginning with the conjugate diameter is not required by the book's logical structure: proposition I.47 which finally shows that an ellipse has an unlimited number of diameters does not depend on proposition I.15. Far from it, one can easily imagine a sequence in which I.15 follows I.47, for since the one case I.47 does not cover is that of the conjugate diameter, I.15 would, in such a sequence, be the completion of I.47. However, Apollonius does not proceed in this way because he wants to maintain, from the start, as close

> resultante en la superficie del cono, hechas por el plano cortante, paralelo a la línea recta perpendicular a la base del triángulo caerán en la sección común del plano cortante y del triángulo axial, prolongándose hasta el otro lado de la sección y bisectados por una sección común y, si éste es un cono recto, la línea recta en la base será perpendicular a la sección común del plano cortante y el triángulo axial, y si es oblicuo sólo será perpendicular cuando el plano a través del que sea perpendicular a la base del cono.

Uno observa que la palabra 'diámetro' no aparece en este enunciado ni en la prueba que le sigue. Sólo después de la prueba, y casi incidentalmente, Apolonio dice en la forma de un porisma que

> en esta [proposición] es evidente que la línea recta *FG* [que es la sección común del plano cortante y el triángulo axial] es el diámetro de la sección *DFE*, dado que éste bisecta las líneas rectas trazadas paralelamente a la línea recta *DE* [la sección común del plano cortante y el plano de la base del cono], es posible para algunas paralelas ser bisectadas por el diámetro *FG* y no ser perpendiculares.

Por lo tanto, el enfoque de la proposición I.7 es un *proceso de seccionamiento* que contiene *en sí mismo* la construcción de un diámetro y la determinación de la dirección ordenada correspondiente. Por lo tanto, cuando Apolonio aplica I.7 en I.11-I.14 lo hace con la misma descripción detallada de cómo varios planos deben ser orientados con respecto al cono, y es a través de esta descripción que sabemos cómo cortar el cono para producir la sección deseada. El lector de estas proposiciones ve, por consiguiente, que la producción de las secciones cónicas es simultánea a la de un diámetro. En este sentido, el diámetro es inseparable de la sección cónica en la que se encuentre, y contrariamente, la definición de una sección cónica incluye la posición de su diámetro.

Lo que se ha estado diciendo puede parecer estar en desacuerdo con uno de los temas centrales del Libro I, es decir, el que cada cónica tiene un número indefinido de diámetros. La forma en la que Apolonio desarrolla este tema, sin embargo, sólo *enfatiza* la distinción del diámetro producido por el procedimiento de seccionar de I.7. En el primer paso de este desarrollo, Apolonio prueba la existencia de un diámetro conjugado (*suzuges*) para la elipse (I.15) y las secciones opuestas (I.16). Es importante notar que no se necesita empezar con el diámetro conjugado: por la estructura lógica del libro, la proposición I.47, que finalmente muestra que una elipse tiene un número ilimitado de diámetros no depende de la proposición I.15. Lejos de esto, uno puede imaginar fácilmente una secuencia en la que I.15 sigue de I.47, ya que I.47 no cubre el caso del diámetro conjugado. I.15 sería, por tal, una secuencia, el complemento de I.47. Sin embargo, Apolonio no procede en esta forma porque quiere mantener, desde el principio, un a connection as possible between the original diameter and any new diameter. Hence, he begins with the *conjugate* diameter, being, as the name suggests, a new diameter *wedded* to the original diameter.

The next step in Apollonius's developement of this theme is the set of propositions, I.46,47,48. These show, in effect, that any line parallel to the diameter of a parabola is itself a diameter and any line (with a certain qualification required by I.43 on which I.47 relies) from a point on an ellipse, hyperbola, or opposite sections through the center is a diameter. Significantly, Apollonius does not call these new diameters 'diameters' in propositions I.46-48; nor does he call them 'diameters' in I.49,50,51, which further develop I.46-48. Let us look at I.47:

> If a straight line touching an hyperbola or ellipse or circumference of a circle meets the diameter, and through the point of contact and the center a straight line is drawn in the direction of the section, it bisects the straight lines drawn in the section parallel to the tangent.

Here is Apollonius's proof:

> Let there be an hyperbola or ellipse or circumference of a circle whose diameter is the straight line *AB* and center *C*, and let the straight line *DE* be drawn tangent to the section, and let the straight line *CE* be joined and produced, and let a point *N* be taken at random on the section, and through *N* let the straight line *HNOG* be drawn parallel.
>
> I say that *NO* = *OG*.
>
> For let the straight lines *XNF*, *BL* and *GMK* be dropped ordinatewise. Therefore by the things already shown in the forty-third theorem,
>
> trgl.*HNF* = quadr.*LBFX*,
>
> and,
>
> trgl.*GHK* = quadr.*LBKM*.

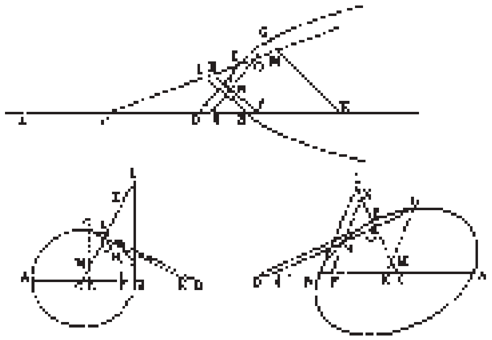


Figure 8

cerca como sea posible una conexión entre el diámetro original y cualquier otro diámetro nuevo. De ahí que él empieza con el diámetro *conjugado* siendo, como el nombre lo sugiere, un diámetro *unido* al diámetro original.

El próximo paso de Apolonio en el desarrollo de este tema es el conjunto de proposiciones I.46, I.47, I.48. Esto muestra, en efecto, que cualquier línea paralela al diámetro de una parábola es ella misma un diámetro y que cualquier línea (con cierta característica requerida por I.43, en la que I.47 se apoya) de un punto en una elipse, una hipérbola o en las secciones opuestas, que pase a través del centro, es un diámetro. Significativamente, Apolonio no llama a estos nuevos diámetros 'diámetros' en las proposiciones I.46-I.48; tampoco les llama 'diámetros' en I.49, I.50 y I.51, que desarrolla anteriormente en I.46-I.48. Véase I.47:

> Si una línea recta que toca a una hipérbola, a una elipse o a una circunferencia de un círculo, encuentra el diámetro y, por el punto de contacto y el centro es trazada una línea recta en la dirección de la sección, ésta biseca a la línea recta trazada en la sección paralela a la tangente.

Aquí está la prueba de Apolonio:

> Sea una hipérbola, una elipse o una circunferencia de un círculo cuyo diámetro es la línea recta *AB* y el centro *C*, sea la línea recta *DE* trazada tangente a la sección y unimos la línea recta *CE*, sea un punto N tomado al azar en la sección, y por N trazamos la línea recta *HNOG* paralela.
> Yo digo que *NO* = *OG*.
> Sean las líneas rectas *XNF*, *BL* y *GMK* trazadas ordenadamente. Por consiguiente, por las cosas ya mostradas en el cuadragésimo tercer teorema,
>
> trgl. *HNF* = cuadr. *LBFX*.
>
> y,
>
> trgl. *GHK* = cuadr. *LBKM*.

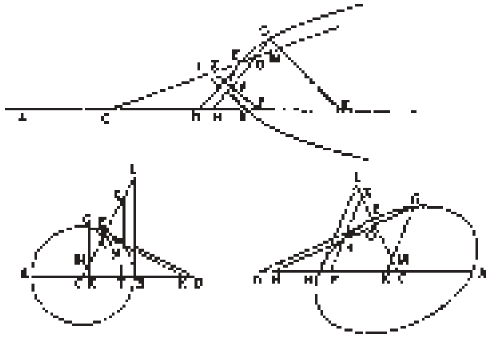


Figura 8

> Therefore the remainders quadr.$N\Theta KF$ = quadr.$MKNX$. Let the common pentagon $O\Xi TKM$ be subtracted, therefore the remainders trgl.OMG = trgl.$X\Xi O$. And the straight line MG is parallel to the straight line NX, therefore $NO=OX$.

The proof of the proposition rests on I.43, and its diagrams are almost identical to those accompanying I.43. This earlier proposition is not at all easy to understand, especially with its long enunciation. However, the picture becomes clearer when one realizes that most of the enunciation of I.43 is, in fact, a description of the diagram, and the diagram is full of symmetries: two lines from the center to the curve, two tangents, two lines through a point on the curve parallel to the two tangents. I.47 extends the symmetry of the diagram in I.43 by showing that CE is a "diameter" as CB, that is, CE bisects all chords parallel to the tangent at E just as CB bisects all chords parallel to the tangent at B. Apollonius develops this symmetry in I.49-51. In these propositions, he shows that *symptōmata* like those described in terms of the original diameters can be described in terms of the new diameters. At the end of I.51, Apollonius finally makes all this explicit, calling the lines in I.46-51 'diameters' for the first time and confirming the symmetry of the roles:

> And with these things shown, it is at once evident that in the parabola each of the straight lines drawn off parallel to the original diameter is a diameter, but in the hyperbola and ellipse and opposite sections each of the straight lines drawn through the center is a diameter, and that in the parabola the straight lines dropped to each of the diameters parallel to the tangents will equal in square the rectangles applied to it, but in the hyperbola and opposite sections they will equal in square the areas applied to it and exceeding by the same figure, but in the ellipse the areas applied to it and defective by the same figure; *and that all the things which have been already proved about the sections as following when the principal diameters (tōn archikōn diametrōn) are used, will also, those very same things, follow when the other diameters are taken* [emphasis added]

What is important to see here is that although these new diameters share the same general properties as the original diameter, they do not yet share the same status. Apollonius still refers to the original diameter as the *principal* diameter, separating it from the others. In this sense, one cannot really speak of an *arbitrary* diameter. Indeed, in the proofs of I.46-51 and their lemmas I.42,43,

> Por consiguiente, los restantes cuadr.$MGKE$ = cuadr.$NKEY$. Sea el pentágono común $QNEKM$ substraído, por lo que los restantes son trgl.QMG = trgl.NXQ. Y la línea recta MG es paralela a la línea recta NX, por consiguiente $NQ = QG$.

La prueba de la proposición descansa en I.43, y sus diagramas son casi idénticos a aquellos que acompañan a I.43. Esta primera proposición no es fácil de entender, debido especialmente a su enunciado tan largo. Sin embargo, la descripción se hace clara cuando uno se da cuenta que gran parte del enunciado de I.43 es, de hecho, una descripción del diagrama, lleno de simetrías: dos líneas del centro de la curva, dos tangentes, dos líneas a través de un punto en la curva paralela a las dos tangentes. I.47 extiende la simetría del diagrama en I.43 mostrando que CE es un 'diámetro' como CB, esto es, CE biseca a todas las cuerdas paralelas a la tangente en E, así como CB biseca a todas las cuerdas paralelas a la tangente en B. Apolonio desarrolla esta simetría en I.49-I.51. En esta proposición, él muestra a los *symptomata*, como aquellos descritos en términos de los diámetros originales, pueden ser descritos en términos de los nuevos diámetros. Al final de I.51, Apolonio finalmente hace todo esto explícito, llamando por primera vez a las líneas en I.46-I.51 'diámetros' y confirmando su simetría:

> Y con estas cosas demostradas, es evidente que en la parábola cada una de las líneas rectas trazadas paralelas al diámetro original es un diámetro, en la hipérbola, la elipse y las secciones opuestas cada una de las líneas rectas trazadas por el centro es un diámetro, y en la parábola las líneas rectas trazadas a cada uno de los diámetros paralelos a las tangentes serán iguales al cuadrado a los rectángulos aplicados a ésta, pero en la hipérbola y en las secciones opuestas ellos serán iguales al cuadrado a las áreas aplicadas a ésta y por defecto de la misma figura, pero en la elipse serán a las áreas aplicadas a ésta y defectivo de la misma figura, *y que todas las cosas que se han sido probadas sobre las secciones, como las siguientes, cuando los diámetros principales (τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων) son usados, serán también las mismas cosas, cuando los otros diámetros sean tomados.*

Lo que es importante ver aquí es que aunque estos nuevos diámetros comparten las mismas propiedades generales como el diámetro original, estos no comparten el mismo estatus. Apolonio se sigue refiriendo al diámetro original como el diámetro *principal*, separándolo de los otros. En este sentido, uno no puede hablar de un diámetro *arbitrario*. En efecto, en las demostraciones de I.46-I.51 y sus lemas I.42, I.43, el the principal diameter is given in position with the section and the new diameter can be produced only if the tangent at its vertex meets the original diameter. And conversely, when in I.52–60 Apollonius wants to produce a section having some line as its diameter, he produces a section in a cone and shows that either the given line is the principal diameter itself or it is related to the principal diameter in the way prescribed in I.46-51. In Book II, one might argue, Apollonius speaks about *a* diameter, and, therefore, an arbitrary diameter, for example, in II.44 where Apollonius poses the problem 'Given a section of a cone, to find a diameter'. However, this is not a proposition in isolation; Apollonius feels free to speak of *a* diameter having developed the relationship of *any* diameter to the *principal* diameter in Book I.

So, put in precise terms, what Apollonius does in Book I amounts to showing that in every conic there exists an indefinite number of diameters *in addition* to the principal diameters, in addition, that is, to the diameters that come together with the genesis of the curves in the cone. This distinction between the additional diameters and the principal diameters has no importance in the proof of theorems as Apollonius himself implies at the end of his summary of I.46-51. Yet, immediately following this summary are the propositions in which Apollonius shows how conics may be produced having diameters in various positions. And, of course, in every case the diameters on which the construction depend are *principal* diameters. Towards the end of Book II, Apollonius shows us, more or less, the converse of these propositions. Thus, recalling that the angle between the tangent and the diameter gives the ordinate direction, we have II.51 stating "Given a section of a cone, to draw a tangent which with the diameter drawn through the point of contact will contain an angle equal to a given acute angle". This theorem is really enough for all applications, for it shows how in any given section one can find the diameter one needs to prove some fact or another. And yet, when constructing the conics at the end of Book I (propositions 52-60), Apollonius relies on the principal diameters in every case. This despite II. 51. Moreover, the principal diameter *never* loses its privileged status. Why? What the propositions at the end of Book I, and with them the special status of the principal diameter, show, we think, is Apollonius's concern for the place of the diameter in this production of the curves in the cone. And is this not a purely *geometric* concern? For such a concern arises only in one who conceives of the conics as things which cannot be detached, or abstracted from their geometric origin.

diámetro principal está dado en posición con la sección y el nuevo diámetro puede ser producido sólo si la tangente se intersecta por sus vértices, con el diámetro original. Y en forma contraria, cuando en I.52-I.60 Apolonio quiere producir una sección teniendo alguna línea como su diámetro, produce una sección en un cono y demuestra que la línea dada es en sí misma el diámetro principal o está relacionada con el diámetro principal de la manera usada en I.46-I.51. En el Libro II, uno puede argumentar que Apolonio habla sobre *un* diámetro, o sea, un diámetro arbitrario, por ejemplo, en II.44 donde propone el problema: "dada una sección de un cono, *encontrar un diámetro*". Sin embargo, ésta no es una proposición aislada. Apolonio se siente libre para hablar de *un* diámetro habiendo desarrollado la relación de *cualquier* diámetro, el diámetro *principal* en el Libro I.

Por tanto, puesto en términos precisos, lo que en suma hace Apolonio en el Libro I es mostrar que en cada cono existe un número independiente de diámetros *en adición* a los diámetros principales, esto es, a los diámetros que vienen junto con la génesis de las curvas en el cono. Esta distinción entre los diámetros adicionales y los diámetros principales no tiene importancia en la prueba de los teoremas como el mismo Apolonio sugiere al final de su resumen de I.46-I.51. Así, inmediatamente después de este resumen están las proposiciones en las que Apolonio muestra *cómo se* pueden producir las cónicas teniendo diámetros en varias posiciones. Por eso, en todos los casos, los diámetros de los cuales las construcciones dependen son diámetros *principales*. Hacia el final del Libro II, Apolonio demuestra, más o menos, el inverso de estas proposiciones. De ahí que, recordando que el ángulo entre la tangente y el diámetro da la dirección ordenada, tenemos en II.51 lo siguiente: "Dada una sección de un cono, trazar una tangente, con la cual el diámetro trazado a través del punto de contacto tendrá un ángulo igual a un ángulo agudo dado". Este teorema es efectivamente suficiente para todas las aplicaciones, para mostrar cómo en cualquier sección dada se puede encontrar el diámetro que se necesita para probar algún hecho. Y aún cuando construye las cónicas al final del Libro I (proposiciones 52-60), Apolonio se apoya en los diámetros principales para cada caso. Esto a pesar de II.51. Más aún, el diámetro principal *nunca* pierde su estatus privilegiado. ¿por qué? Lo que las proposiciones al final del Libro I y el estatus especial del diámetro principal muestran, es el interés especial de Apolonio por el lugar que ocupa este diámetro en la producción de las curvas en el cono. Y ¿no es este un interés puramente *geométrico*? Tal interés surge sólo en alguien que concibe a las cónicas como cosas que no pueden ser separadas, o abstraídas, de sus orígenes geométricos. El

The diameter is first of all the *principal* diameter for Apollonius, since this diameter is one which can be seen directly in the geometrical description and genesis of the curves. Otherwise, it is hard to understand why, after so carefully developing the symmetry of the roles played by all the diameters, Apollonius should still talk about a principal diameter and show such diameters produced in the cone.

To understand the *Conica* historically presupposes understanding its discourse as a geometrical discourse in which showing, pointing, and drawing play crucial roles. Apollonius's text makes this manifest in three ways. *First*, the terms of the text are either themselves simple geometrical entities, points, lines, planes, circles, rectangles, and so on, or they are based on such entities —and this may be by means of analogy, as the diameter, center, and radius of a conic are analogous to diameter, center, and radius of a circle. These terms are, of course, the basic elements of the text: they do not represent some other *more* basic elements. Thus the *symptōmata*, for example, distinguish one conic from another by comparing elementary squares and rectangles *as such*. *Second*, the approach is entirely visual in spirit. This is a mathematics which cannot be abstracted from the diagrams which show its content [Knorr 1975, 69-74]. One can hardly find a proposition which is not accompanied by a diagram and when one does find a proposition without a diagram, it invariably refers to the diagram of *another* proposition. The diagrams guide the text, constrain it, give it shape. Apollonius prefers speaking about the cone rather than the conic surface, the opposite sections as two curves instead of one, where these preferences are determined largely by the degree to which such things are portrayable by a diagram. *Third*, there is a concern, not always immediate but always present, with the sensible production of a curve and its parts. This concern means that each curve *as a whole* is seen as the result of a concatenation of simple, visually appealing, relationships: intersections of planes with planes, intersections and arrangements of lines. Thus, the special status of the principal diameter comes through its close connection with this visible genesis. Together, these three aspects show not only that the *Conica* is an essentially geometric text but also in what sense it is, and in this sense it is an essentially different kind of text from an algebraic text such as La Géométrie, regarding which Newton wrote in a marginal remark: "Error, error, non est Geometria!"

diámetro es, primero que nada, el diámetro *principal* para Apolonio, ya que este diámetro es uno que puede ser visto directamente en la descripción geométrica y en la génesis de las curvas. De otra manera, es difícil entender por qué, después de haber desarrollado cuidadosamente la simetría de los papeles jugados por todos los diámetros, Apolonio deba de seguir hablando sobre un diámetro principal y mostrar tales diámetros producidos en el cono.

Para entender históricamente la *Cónica* se presupone el entendimiento de su discurso como un discurso geométrico en el que demostrar, puntualizar y trazar juegan papeles cruciales. El texto de Apolonio manifiesta esto de tres formas. *Primero*, los términos del texto son o bien entidades geométricas, puntos, líneas, planos, círculos, rectángulos y demás, o bien están basados en tales entidades —y esto puede ser por medio de analogías, como el diámetro, el centro y el radio de una cónica que son análogos al diámetro, al centro y al radio de un círculo. Estos términos son, por supuesto, *los* elementos básicos del texto; ellos no representan algún otro elemento *más* básico. De ahí que los *symptōmata*, por ejemplo, distinguen una cónica de otra comparando cuadrados y rectángulos elementales *como tales*. *Segundo*, la aproximación de naturaleza completamente visual. Estas son unas matemáticas que no pueden abstraerse de los diagramas que muestran su contenido [Knorr 1975, 69-74]. Uno difícilmente puede encontrar una proposición que no esté acompañada por un diagrama, y cuando hay alguna proposición sin diagrama, utiliza invariablemente el diagrama de *otra* proposición. El diagrama guía el texto, restringiéndolo, dándole forma. Apolonio prefiere hablar sobre el cono en lugar de la superficie cónica, las secciones opuestas como *dos* curvas en lugar de una, donde estas preferencias están determinadas en gran parte por el grado en que tales cosas sean representables por un diagrama. *Tercero*, hay una preocupación, no siempre inmediata pero siempre presente, en la producción sensible de una curva y sus partes. Esta preocupación significa que cada curva *como un todo* se ve como el resultado de una concatenación de relaciones simples, y visualmente atractivas, las intersecciones de planos con planos, intersecciones y adaptación de líneas. Por consiguiente, el estatus especial del diámetro principal se da a través de su estrecha conexión con esta génesis visible. Juntos, estos tres aspectos muestran no sólo que la *Cónica* es esencialmente un texto geométrico, sino también el sentido en que éste es un tipo esencialmente diferente de texto en comparación con un texto algebraico como *La Géométrie*, respecto al que Newton escribió en una observación marginal: "¡error, error, non est Geometria!"

Bibliography

BOYER, C.B. 1985. *A History of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

HEATH, T.L. 1981. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications Inc.

______ 1896. *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections*. Cambridge: Camb. University Press.

______ 1956. *The Thirteen Books of Euclid's* Elements. New York: Dover Publications Inc.

KLEIN, J. 1965. *A Commentary on Plato's Meno*. Chicago: The University of Chicago Press.

______ 1968. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. E. Brann (ed.). Cambridge Massachusetts: M.I.T. Press.

______ 1981. "The World of Physics and the Natural World". *St. John's Review* Autumn.

______ 1985. "Modern Rationalism". In: R.B. Williamson and E. Zuckerman (eds.). *Lectures and Essays*. Annapolis: St. John's College Press.

KNORR, W. 1975. *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

______ 1986. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. New York: Dover Publications Inc.

KRETZMANN, N. 1967. "History of Semantics", in P. Edward (ed.) *Encyclopedia of Philosophy*. New York: MacMillan Publishing Co. Inc. and The Free Press.

LACHTERMAN, D.R. 1989. *The Ethics of Geometry and the Genealogy of Modernity*. New York: Routledge.

MORROW, G.R. 1970. *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton.

PLATON. 1961. *Menón*. In: E. Hamilton and H. Cairns (eds.). W.K.C. Guthrie (trans.). *The Collected Dialogues of Plato*. Princeton: Princeton University Press.

SMITH, D.E. and M. Latham (trads.). 1954. *The Geometry of René Descartes*. New York: Dover Publications Inc.

SZABO, A. "The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of Its Foundation on Definitions and Axioms". *Scripta Mathematica*, 27: 34-42.

TALIAFERRO, R. C. 1952. *On Conic Sections, Books I-III by Apollonius of Perga*. in R.M. Hutchins (ed.). *Great Books of the Western World*. Enciclopedia Britanica Inc.

THOMAS, I. 1991. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Cambridge Massachusetts: Harvard University Press.

TOOMER, G.J. 1970. "Apollonius of Perga". In: C.C. Gillispie (ed.). *Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner and Sons.

UNGURU, S. 1975. "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics". *Archive for the History of Exact Sciences* 15: 67-114.

______ 1979. "History of Ancient Mathematics. Some Reflections of the State of the Art". *Isis* 70: 555-565.

UNGURU, S. and ROWE, D.E. 1981. "Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of 'Geometric Algebra', 'Application of Areas', and Related Problems". *Libertas Mathematica* 1: 1-49 and 2: 1-62.

VAN DER WAERDEN, B.L. 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer-Verlag.

______ 1976. "Defence of a 'Shocking' Point of View". *Archive for History of Exact Sciences* 15: 199-210.

VER EECKE, P. 1963. *Les Coniques d'Apollonius de Perge*. Paris: Librairie Scientifique et Technique, Albert Blanchard.

ZEUTHEN, H.G. 1886. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Kopenhagen.

Bibliografía

BOYER, C.B. 1985. *A History of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

HEATH, T.L. 1981. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications Inc.

__________. 1896. *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections*. Cambridge: Camb. University Press.

__________. 1956. *The Thirteen Books of Euclid's* Elements. New York: Dover Publications Inc.

KLEIN, J. 1965. *A Commentary on Plato's Meno*. Chicago: The University of Chicago Press.

__________. 1981. "The World of Physics and the Natural World". *St. John's Review*. Autumn.

__________. 1985. "Modern Rationalism". En R.B. Williamson y E. Zuckerman (eds.) *Lectures and Essays*. Annapolis: St. John's College Press.

__________. 1968. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. E. Brann (ed.) Cambridge Massachusetts: M.I.T. Press.

KNORR, W. 1975. *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

__________. 1986. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. New York: Dover Publications Inc.

KRETZMANN, N. 1967. "History of Semantics". En P. Edward (ed.). *Encyclopedia of Philosophy*. New York: MacMillan Publishing Co. Inc. y the Free Press.

LACHTERMAN, D.R. 1989. *The Ethics of Geometry and Genealogy of Modernity*. New York: Routledge.

MORROW, G.R. 1970. *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton.

PLATON. 1961. *Menon*. In E. Hamilton y H. Cairns (eds.), W.K.C. Guthrie (trad.). *The Collected Dialogues of Plato*. Princeton: Princeton University Press.

SMITH, D.E. y M. Latham (trads.). 1954. *The Geometry of Rene Descartes*. New York: Dover Publications Inc.

SZABO, A. "The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of its Foundation on Definitions and Axioms". *Scripta Mathematica* 27: 34-42.

TALIAFERRO, R.C. 1952. *On Conic Sections. Books I-III by Apollonius of Perga*. En R.M. Hutchins (ed.). *Great Books of the Western World*. Encyclopedia Britanica Inc.

THOMAS, I. 1991. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Cambridge, Massachussettes: Harvard University Press.

TOOMER, G.J. 1970. "Apollonius of Perga". In C.C. Gillispie (ed.). *Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner and Sons. Vol. I.

UNGURU, S. 1975. "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics". *Archive for the History of Exact Sciences* 15: 67-114.

__________. 1979. "History of Ancient Mathematics. Some Reflections of the State of the Art". *Isis* 70: 555-565.

UNGURU, S. y ROWE, D.E. 1981. "Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of 'Geometric Algebra', 'Application of Areas' and Related Problems". *Libertas Mathematica* 1: 1-49 y 2: 1-62.

VAN DER WAERDEN, B.L. 1975. "Defence of a 'Shocking' Point of View". *Archive for History of Exact Sciences* 15: 199-210.

__________. 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer-Verlag.

VER EECKE, P. 1963. *Les Coniques d'Apollonius de Perge*. Paris: Librairie Scientifique et Technique, Albert Blanchard.

ZEUTHEN, H.G. 1886. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Kopenhagen.

Sabetai Unguru is Profesor and Director of the Cohn Institute for the History and Philosophy of Science and Ideas at Tel-Aviv University. His fields of interest are the history of Greek mathematics, medieval mathematics and optics, and the historiography of mathematics. He is now working on Apollonius's *Conica*.

Michael N. Fried received his B.A. from St. John's College in Annapolis, Maryland in 1982 and his M.Sc. in applied mathematics from the State University of New York at Stony Brook in 1984. Presently, he is a doctoral student of Sabetai Unguru at the Cohn Institute for the History and Philosophy of Science and Ideas at Tel Aviv University.

Sabetai Unguru es actualmente profesor y director del Cohn Institute of History and Philosophy of Science and Ideas de la Universidad de Tel-Aviv, Israel. Sus campos de interés son: la historia de las matemáticas griegas, la historia de las matemáticas y la óptica medievales, y la historiografía de las matemáticas. Actualmente trabaja sobre la *Cónicas* de Apolonio.

Michael N. Fried recibió su B.A. de St. John's College en Anapolis, Maryland en 1982; y su M.Sc. en Matemáticas Aplicadas de la Universidad del estado de Nueva York en Stony Brook en 1984. Actualmente, es estudiante de doctorado de Sabetai Unguru en el Cohn Institute.