El método axiomático revisado

(Reconstrucción de la polémica entre G. Frege y D. Hilbert)

Jesús Padilla Gálvez

RESUMEN

El artículo parte de un análisis exhaustivo del rompecabezas propuesto por G. Frege en la aritmética. Si bien es conocido el aspecto que concierne a la diferencia en los tipos de análisis de la identidad en dicho rompecabezas, se ha dejado de lado la distinción entre un análisis formalista (*formale*) e informal (*inhaltliche*). Este último distingo es abordado de manera sistemática para desembocar en la concepción general del método axiomático que G. Frege postula. El artículo lleva a cabo una recepción de la discusión habida entre D. Hilbert y G. Frege acerca de la axiomática desde la propuesta informal. La reconstrucción de dicha discusión permite clarificar diferentes niveles en la discusión, ya sean metodológicos, sintácticos o semánticos.

ABSTRACT

This paper is based on exhaustive analysis of puzzles proposed by Frege on arithmetic. Although the aspect concerned with the difference in types of analysis on the identity of said puzzles is well known, the distinction between the analysis in a formal and informal sense, *i.e.* with respect to contents, has not been treated. The latter distinction is discussed systematically here in order to arrive at the general concept of the axiomatic method postulated by Frege. This paper thus represents a means of viewing the discussion between Hilbert and Frege about the axiomatic method from informal standpoint. The reconstruction of this discussion then allows us to clarify different levels within it, whether they be methodological, syntactic or semantic.

Mathesis 8 (1992) 141-152

1. El Rompecabezas de G. Frege en la aritmética

Al comienzo de siglo, G. Frege empezó a cuestionar el modo de cómo habrían de erigirse las condiciones de adecuación de la aritmética. Para ello, sometió la noción de número a un estricto análisis lógico y planteó la necesidad de proporcionar una explicación satisfactoria de los *números irracionales* y, en concreto, el *presupuesto cognitivo* sobre el que se asientan las teorías matemáticas. La dilucidación de los números irracionales pone en tela de juicio, de una manera particularmente aguda, el problema de cómo explicar el que una operación como

(1) $$\sqrt{4} = 2$$

puede resultar informativa, mientras que no vale decir lo mismo de

(2) $$\sqrt{3}.$$

Es, por decirlo de algún modo equivalente al empleado, el problema de dar una explicación de por qué las teorías aritméticas pueden formular una igualdad en (1) mientras que en (2) es sólo una aproximación.[1] Los números irracionales como aparecen en (2) presentan una raíz cuadrada n-ádica de números reales que no son negativos y no exponen la potencia n-ádica, es decir, son números decimales infinitos y no periódicos. De aquí que (2) en contra de (1) no implica cocientes de enteros. La dificultad de (2) consiste en que el sistema de los números reales comprende los números racionales e irracionales por igual. Según Frege, los números irracionales no pueden ser satisfechos de manera completa por una ecuación algebraica. Este problema sugiere que para contestar adecuadamente la pregunta de qué es un número real, es necesario utilizar un instrumento lo bastante sofisticado como para dilucidar acertadamente una teoría numérica. El esfuerzo de presentar mediante elementos lógicos la teoría numérica, constituye una importante contribución de Frege y Hilbert.

Efectivamente hay aquí un problema, pues como todos sabemos, la solución que se proponía mediante la identidad de (1) y (2) no es la misma. El propio Frege propuso una solución cuya fuerza e influencia en la *filosofía de la matemática* ha sido notable. Según su propuesta, una salida a este problema pasa por la resolución de lo que entendemos por *prueba*, *explicación* y *definición*. Estos términos ligan un complejo de problemas relacionados con la caracterización de las nociones de regla, consistencia, independencia, deducción, etc.

Con el fin de explayar adecuadamente el problema expuesto en (1) y (2), vamos a sostener la tesis de que toda *teoría* es matemática si dispone de una definición adecuada, de una operación matemática con la cual podemos construir algún modelo que la dilucide. A primera vista puede parecer compleja tal definición, pero pienso que el mejor modo de introducirnos en lo que persigo es explicando lo que se entiende por modelo. Todo modelo parte del análisis del uso de los términos en cuestión en un lenguaje determinado, para luego proponer una precisión artificial de los mismos. Así que representaremos los fenómenos y sus usos afines para luego proponer una expresión canónica para tratar el problema formalmente.

Un análisis de modelo, por lo tanto, ha de elaborar un conjunto de ecuaciones y fórmulas que permitan describir adecuadamente un sistema. Así, el sistema de los números naturales puede reconstruirse como un modelo de la teoría aritmética de Peano.[2]

El punto central de este trabajo es aclarar hasta qué punto una teoría determina la clase de sus modelos, y para ello enfocaremos la amplitud de las teorías que entran en juego con el fin de dilucidar cuál es la más adecuada. Un estudio detallado de las teorías nos permite obtener información sobre los sistemas axiomáticos discutidos a principios de siglo, además de que es relevante contemplar de cerca las diferentes teorías y los modelos con los que trabajan.

G. Frege intenta solucionar la cuestión de *qué* ha de entenderse por la noción de "número" remitiéndose a aspectos lógico-semánticos de las teorías matemáticas. Los números irracionales no son introducidos únicamente con el fin de solucionar el conocido dilema de Pitágoras.[3] Nuestro cometido será exponer adecuadamente dos métodos rigurosos mediante los cuales se presenta una explicación o una determinada definición de los números reales. Para ello, la discusión entre Frege y Hilbert puede darnos información puntual de las dificultades al respecto. Con este fin diferenciamos un método que atiende a la forma, y por lo tanto ha quedado bajo el título de método axiomático, y otro que atiende al contenido y fue desarrollado por Frege.

2. Teorías que atienden al contenido

Frege desarrolló sus propuestas teóricas atendiendo al contenido[4] y fueron expuestas mediante una discusión a dos niveles: por una parte, en su *Grundlagen der Arithmetik* analizó los planteamientos de Cantor, Heine y J. Thomae.[5] Con maestría une los reconocimientos de estos matemáticos con una crítica profunda y refuta sus errores, al tiempo que indica sus faltas y pone al descubierto sus causas metodológicas.

La crítica fregeana de los fundamentos de la aritmética, concretamente sus puntualizaciones a las propuestas meramente formalistas, inciden en los problemas de fondo por los que atraviesan los programas axiomáticos, ya que no es fácil vislumbrar una solución unívoca a las cuestiones arriba esbozadas mediante (1) y (2). El punto de vista informal que atiende al contenido propuesto por Frege, sostiene de entrada la imposibilidad del punto de vista formal de condonar el rompecabezas mencionado respecto a los números irracionales, ya que una buena parte de sus soluciones presupone una traslación de planteamientos a un punto de vista de la filosofía de la matemática y discutirla en términos de ésta.

Por otro lado, desarrolla una polémica correspondencia con Hilbert a raíz de la publicación de los *Grundlagen der Geometrie*. Además, luego de ser publicada la *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, el conocimiento de esta obra de Frege se ha restringido a un grupo poco numeroso de especialistas, por lo que los argumentos presentados en la revisión fregeana se han postergado incomprensiblemente.

Según Frege, el portador de un *número* no es un sistema de *objetos* propiamente dichos, sino un *concepto*.[6] Así pues, los objetos a los que les corresponde un número no pueden ser los objetos enumerados, ya que cada objeto es sólo uno de ellos, de modo que no puede aparecer un número diferente a uno. Sin embargo, se puede interpretar el número como una propiedad de aquellos conceptos que unen los individuos enumerados. Entonces, según Frege, los números aparecen como propiedades de los predicados, de modo que un número determinado sea un predicado con propiedades determinadas.

La relevancia de esta propuesta es que la caracterización de los números, que representan los *predicados de los predicados*, pueden ser expresados mediante símbolos lógicos,[7] y de este modo se incluye la teoría de los números en la lógica.[8] Es por ello que Frege se preocupa enormemente por los problemas de escritura, pues introducir un nuevo sistema de signos presupone una cierta preceptiva de escritura que elimina numerosos problemas. Para ello introduce una diferencia entre *objeto y función*,[9] donde esta última integra a los conceptos y a las relaciones. Una nueva escritura permite corregir las imprecisiones que puedan surgir de la lectura de conceptos.[10]

Así según las propuestas de G. Frege (1) se explicaría del siguiente modo: dos predicados Φ y Ψ se comparten el *mismo número* si en el ámbito de objetos a los que corresponde ϕ y el ámbito de objetos a los que corresponde Ψ contiene el mismo número.[11] La mismidad de los números de los predicados Φ y Ψ puede interpretarse mediante un predicado especial y formalizado del siguiente modo: M(Φ, Ψ). La mismidad de los números de Φ y Ψ no significa otra cosa que podemos relacionar indistintamente y reversiblemente para lo que introducimos el símbolo *R* para la propiedad reflexiva y caracterizamos con ello los objetos que se aplica tanto a Φ como a Ψ. De este modo se puede definir M(Φ, Ψ) del siguiente modo:

$$\exists R\ [\forall x\,(\Psi x \rightarrow \exists y\,(Rxy \wedge \Phi y)) \wedge \forall y(\Phi y \rightarrow \exists x\,(Rxy \wedge \Psi x))$$
$$\wedge \forall x\,\forall y\,\forall z\ ((Rxy \wedge Rxy \rightarrow y = z) \wedge (Rxz \wedge Ryz \rightarrow x = y))]$$

Así, y siguiendo dicha definición, la suma de los números se puede expresar con la ayuda de la disyunción. Además recurriendo al aparato metodológico de G. Frege se puede componer una noción de número general. Si el predicado de predicados Φ presenta un número, entonces son suficientes aceptar los siguientes presupuestos:

i) Dos predicados Ψ y Φ que tengan el mismo número ha de corresponder Γ para ambos o no corresponder para ambos.
ii) Si Ψ y Φ no tiene el mismo número entonces puede corresponder Γ al menos para uno de ellos.

Consecuentemente, la noción de número se desarrolla primeramente como una noción de número cardinal de la teoría de conjuntos. De esta noción de número se define un concepto especial de número natural y mediante la caracterización del axioma del infinito se pueden demostrar los axiomas de la teoría de los números.[12]

3. Método axiomático

En el artículo *Axiomatisches Denken*, David Hilbert sintetiza claramente la discusión mantenida con Frege en su correspondencia al afirmar que la cuestión de la consistencia de los sistemas axiomáticos para los números reales puede reducirse a los números enteros, en tanto se plantee en términos conjuntistas, y éste era el mérito de la teoría de los números irracionales de Weierstrass y Dedekind.[13] Sin embargo, el método axiomático ha de tener especial cuidado con dos casos, a saber, (i) cuando se trata de los axiomas de los números enteros y (ii) cuando se trata de la justificación de la teoría de conjuntos, debido a que no puede atribuir a un ámbito especial, pues, excepto la lógica, no existe otra disciplina que pueda ser invocada para su resolución. De aquí que Hilbert proponga para el examen de la consistencia axiomatizar la lógica y demostrar que tanto la teoría de los números como la de conjuntos sólo son partes de aquélla.

Está claro que la propuesta axiomática de la lógica altera los fundamentos de los planteamientos informales que atienden al contenido, ya que se parte de la prueba de la consistencia de los sistemas axiomáticos para resolver (1) y (2). El motivo de esta propuesta se debe a la independencia relativa de los axiomas y postulados euclídeos.[14] Así pues, Hilbert propone explicar las características de éstos mediante la verificación de los axiomas correspondientes. La existencia de los objetos definidos por los axiomas están garantizados en tanto se pruebe la consistencia de los axiomas. Así en la carta a Frege del 29 de diciembre de 1899, Hilbert afirma que si los axiomas formulados arbitrariamente no se contradicen, entonces son *verdaderos* y además *existen* los objetos definidos en los axiomas.[15] De aquí que la consistencia sea el único criterio de verdad y existencia aceptado en el método axiomático de Hilbert, quien sostenía que los conceptos o signos básicos de su axiomatización de la geometría euclideana quedaban definidos por la sola exigencia de que los axiomas fueran válidos para ellos.[16] Esto es, que los conceptos o signos básicos quedaban implícitamente definidos por los axiomas.

De hecho, Hilbert delimita su planteamiento respecto a las definiciones axiomáticas, de tal modo que las teorías no representan los mismos conceptos, sino un *esquema de los conceptos*.[17] Así, cada teoría puede aplicarse a una variedad enorme de sistemas con infinitos elementos. Lo único que se necesita es fijar una transformación unívoca y reversible, mediante la cual los axiomas sean siempre los mismos para los objetos transformados.

Para Hilbert, en consecuencia, el término teoría representaba algo homólogo a un sistema. En el caso más sencillo, la teoría está formada por un universo no vacío y en la que se puede fijar su transformación, es decir, relaciones y funciones sobre tal universo.

4. Revisión de los métodos axiomáticos

Según Frege, los axiomas son enunciados verdaderos, pero no pueden ser probados. Sobre este supuesto, afirma que de la verdad de los axiomas se deduce el que no se contradigan entre ellos. La consistencia como consecuencia de la verdad de los axiomas que se está postulando, pone en tela de juicio el significado de la prueba de la consistencia, punto desde el que se critica el fundamento del programa de Hilbert.

En su carta a Hilbert del 27 de diciembre de 1899, Frege afirma que él llama axiomas a ciertos enunciados que son verdaderos, pero no pueden ser probados, ya que su conocimiento procede de un manantial diferente al de la lógica y que puede denominarse intuitivo. Es de la verdad de los axiomas de donde se desprende que no se contradigan entre ellos.[18] Así pues, lo que le preocupa a Frege del método hilbertiano es, por un lado, su pretensión definitiva y, por otro, las dificultades metodológicas que ésta genera. De ahí que Frege sólo puede explicarse el centro de la cuestión de las definiciones axiomáticas en tanto no se definan conceptos, sino relaciones entre los conceptos, es decir, relaciones de segundo orden. Desde este punto de vista no se puede trazar ningún camino de la consistencia de un sistema axiomático a su verdad o la existencia de los objetos postulados. Es así como Hilbert esperaba solucionar el problema de la teoría de la definición en tanto que lo reducía a las denominadas definiciones axiomáticas. Con ello se definían los conceptos, en particular las nociones básicas de la geometría y sus relaciones, mediante sistemas enunciativos con variables libres para los predicados.

Tales definiciones de las formas enunciativas son denominadas axiomas. La cuestión del origen se resuelve en tanto que cada cadena de definiciones explícitas termina en conceptos fijados axiomáticamente y para los cuales no es necesario regresar a su definición. Frege critica a Hilbert el que las definiciones implícitas traten de definiciones explícitas cuando atienden a las relaciones de primer orden. Con ello pone en tela de juicio la propuesta hilbertiana de que un concepto sólo pueda fijarse lógicamente en relación con otros conceptos.[19]

Las relaciones con otros conceptos son formuladas mediante ciertos enunciados, y esto es a lo que generalmente Hilbert denomina axioma, llegando a la conclusión de que tales axiomas son la definición de los conceptos.[20] Este es uno de los argumentos fuertes por los que Frege renuncia a la interpretación formalista de la matemática en tanto que ésta supone aceptar que el único objeto de las matemáticas sean los sistemas formales.

La crítica fregeana se orientaba a la noción de definición implícita propuesta por Hilbert, ya que los conceptos presuntamente definidos son precisamente los indefinidos. Lo que puede quedar explícitamente definido por los axiomas, según Hilbert, es la estructura del espacio euclídeo, o más concretamente, un predicado conjuntista. Este predicado es aplicable a todos los sistemas que sean modelos de los axiomas. Frege probó un sistema axiomático mediante la construcción de un modelo, sólo que era muy novedoso para el momento y pasó desapercibido para Hilbert, quien decidió zanjar la discusión.

Conclusión

En este trabajo hemos partido de la dilucidación de un rompecabezas que por su sencillez y agudeza nos permitía introducirnos en la cuestión de cómo resolver el problema que surgía de (2). Ahora bien, definir el problema que se nos presentaba en (2) equivale a formular su teoría, es decir, hay que especificar cuáles son los términos básicos, qué combinaciones suponen los axiomas y qué lógica determina la relación que se nos presentaba en (1). Todos estos puntos han sido reconstruidos adecuadamente en el marco de la discusión entre las teorías que atienden a la forma (propuesta por Hilbert, entre otros) y aquélla que atiende al contenido. Mediante los pasos argumentativos llevados a cabo en este ensayo hemos podido resaltar los puntos que enfrentan serias dificultades en la reconstrucción de una teoría matemática.

El análisis que hace Frege del método de Hilbert es, además un paradigma interesante para los problemas que conciernen a la filosofía de las matemáticas en tanto se preocupa por los problemas que subyacen a la escritura. En efecto, la introducción de un sistema de signos supone una cierta preceptiva de lectura que elimina ciertos problemas, pero presenta nuevos horizontes a la investigación. La discusión desarrollada aquí repercute cardinalmente en las propias propuestas de Hilbert, cuando en su introducción a los "Fundamentos de la matemática" hace suya la definición fregeana entre lo que denomina axiomática formal y axiomática que atiende al contenido y afirma que el desarrollo consecuente del método axiomático conduce a las teorías formales.[21]

La diferencia en las perpectivas de Hilbert y Frege desemboca en que, según las propuestas informales de Frege, las teorías que atienden al contenido han de construirse con base en un conjunto de enunciados que, o bien son verdaderos o bien son falsos sobre un cierto sistema. Por el contrario, la propuesta axiomática se fundamenta en una relación, la cual tiene como dominio de definición el conjunto de los sistemas homólogos a ella. Así, la axiomática formal es siempre una relación compuesta. Cada una de las fórmulas que la integran construye a su vez nuevas relaciones, que aplica a cada sistema homólogo unívocamente un enunciado que es o bien verdadero o falso. En función de que ese enunciado sea verdadero o falso, podemos afirmar si el sistema satisface o no esa fórmula.

Como se sugiere en este trabajo, la reconstrucción de la discusión entre Hilbert y Frege sigue siendo un reto para cualquier filosofía de las matemáticas, pues pone en claro los niveles metodológicos, sintácticos y semánticos que implica la revisión del método axiomático.

Bibliografía

Angelelli, I. 1967. *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*. Dordrecht.

Cantor, G. 1980. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin-Heidelberg-New York.

Dedekind, R. 1969. *Was sind und was sollen die Zahlen (1887) Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (1872). Braunschweig.

Dummett, M. 1973. *Frege. Philosophy of Language*. London.

Frege, G. 1966. *Grundgesetze der Arithmetik*. Vol. I (1893), vol. II (1903). Hildesheim.

——— 1967a. *Kleine Schriften*. I. Angelelli (ed.) Darmstadt.

——— 1967b. "Über die Grundlagen der Geometrie". En Frege, *Kleine Schriften*, I. Angelelli (ed.). Darmstadt.

——— 1967c. "Logische Untersuchungen. Erster Teil: Der Gedanke. Zweiter Teil: Die Verneinung. Dritter Teil: Gedankengefüge". En G. Frege, *Kleine Schriften*, I. Angelelli (ed.). Darmstadt.

——— 1969. *Nachgelassene Schriften*. H. Hermes, F. Kaulbach, F. Kambartel (eds.). Hamburgo.

——— 1976. *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. H. Hermes, F. Kaulbach, F. Kambartel (eds.). Hamburgo.

——— 1977. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (1884). Hildesheim.

Hilbert, D. 1899. *Grundlagen der Geometrie*. En Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig. Pp. 1-92.

——— 1918. Axiomatisches Denken. Mathem. *Annalen* 78. 405-415.

——— y P. Bernays. 1968. *Grundlagen der Mathematik I*. Berlin.

——— y W. Ackermann. 1972. *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin-Heidelberg-New York.

Mosterín, J. 1987. "La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático". En *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid. Pp. 111-130.

Padilla Gálvez J. 1988. Identität und Selbigkeit. En V Internationaler Leibniz-kongres. Pp. 517-528.

——— 1989. *Referenz und Theorie der möglichen Welten. Darstellung und Kritik der logisch-semantischen Theorie in der Sprachanalytischen Philosophie*. Frankfurt.

——— 1990. "¿Pueden aplicarse los argumentos informales contra el punto de vista formalista?" En: *Structures in Mathematical Theories*. A. Díez et al. (eds.) San Sebastián. Pp. 461-467.

——— 1991. El origen de la controversia acerca de la noción de regla. *Arbor* 138 (543) 111-126.

Peckhaus, V. 1990. *Hilbertprogramm und kritische philosophie*. Göttingen.

Schröder, E. 1966. *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*. New York (1890-1895, 3 vols.)

Schröter, K. 1970. Axiomatisierung der Fregeschen Aussagenkalküle. En *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*. Hildesheim. Pp. 5-27.

Thiel, C. 1965. *Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlob Freges*. Meisenheim.

Citas

1. Ya en una época temprana, E. Schröder anota que los planteamientos aritméticos de G. Frege para explicar la noción de número se basan en el término de *igualdad*. Según el autor de *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, este término es elegido arbitrariamente y le atribuye a su uso logicista un cierto *circulus in definiendo* (véase Schröder 1966 (1890), I 201). Así pues, unas indicaciones sobre las diferencias a las que G. Frege nos remite, puede ser ilustrativo sobre el sentido de la oposición entre (1) y (2).
2. Véase al respecto Mosterín 1987, 150 ss.
3. En efecto, Pitágoras reconoció que existía un número tal que no podía representarse como un cociente de enteros. Mas descomponiendo un segmento (rectilíneo) en factores primos, resulta que el segmento elevado al cuadrado es divisible por dos un número par de veces, y por lo análogo, dos dividirá al subsiguiente segmento elevado al cuadrado por dos un número impar de veces. Así pues, el resultado era que un segmento al cuadrado era igual al cuadrado del subsiguiente segmento multiplicado por dos, y esto es imposible para los segmentos que son enteros.
4. La noción de "teoría que atiende al contenido", también denominada "informal", es una traducción literal de "inhaltliche Auffassung", y es introducida —como veremos después— en oposición a las teorías que atienden a lo formal. Como ya he expuesto en otros trabajos, la dualidad entre la "teoría informal" y la "formal" juega un papel capital en los *Grundgesetze der Arithmetik* (Frege 1966, sobre todo el vol. II). Véase también: Padilla Gálvez 1990, 461 ss.; 1991, 111 ss.)

5. Si seguimos el tratamiento de Cantor, por caso, (2) se define como el límite de una sucesión convergente de números, o como el conjunto de todas las secuencias equivalentes de una secuencia dada (véase Cantor 1980). Esta explicación no complace del todo a Frege, como se puede comprobar en su recepción crítica de la propuesta cantoriana.

6. Cuando afirmo que el portador de un número no es un sistema de objetos, me refiero a las consecuencias que extrae Frege del hundimiento de su anterior propuesta (me parece, pues, convincente la tesis de que ha de hablarse de un segundo periodo de la propuesta fregeana (véase Thiel 1965, 1.3.)) a la expuesta en su segunda fase, tras la publicación de los *Grundgesetze der Arithmetik*, y expresada a R. Hönigswald el 26 de abril de 1925: "Eine weithin sichtbare Warnungstafel muss aufgerichtet werden: niemand lasse sich einfallen, einen Begriff in einen Gegenstand zu verwandeln!" (Frege 1969, 87).

7. Este punto ha sido observado por Hilbert y Ackermann 1972, 151.

8. G. Cantor critica muy tempranamente, en una reseña publicada en 1885, los fundamentos de la aritmética de Frege, sobre todo los presupuestos lógicos de un análisis de la noción de número (véase Cantor 1980, 440 ss.)

9. Véase Padilla Gálvez 1989, capítulo 1.

10. Para un análisis de la semántica fregeana, véanse Thiel 1965; Angelelli 1967; Dummett 1973; Padilla Gálvez 1989. En la expresión adecuada de la identidad que aparece en (1) y (2) han de quedar implícitos los objetos en una fórmula de identidad que contenga extensionalmente dicha identidad. Esto ocurre en expresiones como:

$$\forall x.\ \Psi(x) \leftrightarrow \Phi(x),$$

cuya lectura es la siguiente: para todo objeto expuesto en la variable x, si x cae bajo Ψ, entonces x cae bajo Φ, y reversiblemente.

11. Véase al respecto Padilla Gálvez 1988.

12. Véase al respecto: Schröter 1970, 5 ss.

13. Véase al respecto: Hilbert 1918, 412. De dicha exposición se desprende que Hilbert no es lo bastante meticuloso en la recepción de la obra de Dedekind, pues, según éste, un número real nunca es idéntico a un conjunto de números irracionales. Partiendo de la base de que hay infinidad de cortaduras equivalentes que permiten definir el mismo número real, éste es igual a un conjunto de tales infinitas cortaduras que son, a su vez, equivalentes. El número real corresponde a una cortadura o produce, según Dedekind, una cortadura. (Véase Dedekind 1969 (1872) § 5 ss.) A pesar de la discusión de Frege del resto de los métodos, Dedekind hace hincapié —en su prefacio a *Was sind und was sollen die Zahlen* sobre las consonancias con Frege (véase, Dedekind 1969, XI). Sin embargo, las diferencias entre ambos son enormes, pues Dedekind interpreta los números reales (en tanto que se basa en la teoría de los números racionales) como sigue. Supone que los números reales son idénticos a los conjuntos de números racionales y que satisfacen las siguientes condiciones:
(i) el conjunto *R* no tiene un número máximo;
(ii) Si el número x está en *R*, entonces cualquier número racional menor que x pertenece a *R*;
(iii) El conjunto *R* no es vacío y no es igual al conjunto de todos los números racionales.

14. Véase al respecto la carta de Hilbert a Frege en Frege 1976, 65 ss.

15. El texto original de Hilbert dice así: "Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge" (Frege 1976, 66).
16. En su carta a Frege del 29 de diciembre de 1899, Hilbert afirma que "Die vollständige Definition des Begriffs Punkt ist erst durch den beendeten Aufbau des Systems der Axiome gegeben" (Frege 1976, 68 ss.)
17. Véase su carta a Frege del 29 de diciembre de 1899 (Frege 1976, 66 ss).
18. Vale la pena citar los términos mediante los que Frege caracteriza la noción de axioma a modo de ejemplo: "... die wahr sind, die aber nicht bewiesen werden, weil ihre Erkenntnis aus einer von der logischen ganz verschiedenen Erkenntnisquelle fliesst, die man Raumanschauung nennen kann. Aus der Wahrheit der Axiome folgt, dass sie einander nicht widersprechen. Das bedarf also keines weiteren Beweises" (Frege 1976, 63).
19. Véase la carta de Frege a Liebmann del 29 de julio de 1900 en (Frege 1976, 147 ss).
20. En su tarjeta enviada a Frege el 22 de septiembre de 1900, Hilbert afirma: "Meine Meinung ist eben die, dass ein Begriff nur durch seine Beziehungen zu anderen Begriffen logisch festgelegt werden kann. Diese Beziehungen, in bestimmten Aussagen formuliert, nenne ich Axiome und komme so dazu, dass die Axiome (evtl.) mit Hinzunahme der Namengebungen für die Begriffe) die Definitionen der Begriffe sind" (Frege 1976, 79). Tal definición de la teoría axiomática parte, según Hilbert, de la construcción lógica de una teoría matemática.
21. Véase (Hilbert-Bernays 1968, 2).