Mathesis 10 (1994) 255-272
[illegible]

Lógica, conjuntos y logicismo: desarrollos alemanes de 1870 a 1908

José Ferreirós[1]

Resumen

Partiendo de un análisis de la obra de Dedekind sobre los fundamentos de las matemáticas, se ofrece una interpretación de los orígenes del movimiento logicista y de su evolución hasta la época de las paradojas. Tras una breve presentación de las ideas de Dedekind sobre fundamentos, se aclara su contexto histórico para mostrar que el enfoque de Dedekind era logicista dados los planteamientos habituales en su tiempo. Este punto se refuerza considerando la recepción que el trabajo de Dedekind obtuvo entre los lógicos matemáticos contemporáneos suyos. Esto, y en particular la comparación entre Frege y Dedekind, permite analizar los presupuestos del logicismo decimonónico. Finalmente, se reconsidera a esa luz el impacto que las paradojas tuvieron sobre las concepciones lógicas tradicionales.

Abstract

Departing from an analysis of Dedekind's work on the foundations of mathematics, we offer an interpretation of the origins of the logicist movement and its evolution up to the era of the paradoxes. A brief presentation of Dedekind's view on the foundations of mathematics is followed by a clarification of its historical context, in order to show that his viewpoint was logicist according to then-common conceptions. The latter point is reinforced by considering the reception of Dedekind's work among contemporary mathematical logicians. This, and particularly a comparison between Frege and Dedekind, makes it possible to analyze the prerequisites of nineteenth-century logicism. In this light it is

1 Una versión modificada y en inglés [Ferreirós 1995] se publicará próximamente.

possible, finally, to reconsider the impact of the paradoxes upon traditional conceptions of logic.

El movimiento logicista, que propuso la tesis de que la matemática es reducible a pura lógica, surgió en Alemania durante el último tercio del siglo XIX. Más concretamente, los trabajos de Frege en 1884 y de Dedekind en 1888 fueron el heraldo de esta nueva concepción. El objetivo de este trabajo es analizar el surgimiento del logicismo y su desarrollo hasta los primeros años de nuestro siglo. En lugar de centrarnos en Frege, como es habitual, prestaremos atención especial a las contribuciones de Dedekind y a la recepción que obtuvieron. En mi opinión, una comprensión correcta del enfoque de Dedekind abre el camino hacia una revaluación del logicismo, de sus presupuestos, y del efecto que sobre él tuvieron las paradojas hacia 1903.

La interpretación de estas cuestiones que se propone aquí es en cierta medida heterodoxa. Es habitual oír que Dedekind no era en realidad logicista, y es también normal encontrar que su enfoque se califica de 'psicologista'. Aunque hay algo de cierto en lo segundo, este enfoque oscurece el desarrollo real de los acontecimientos, y sobre todo la influencia que Dedekind tuvo sobre otros autores. Más allá de esto, nuestro objetivo será poner de relieve que el logicismo de Dedekind y el de Frege son en cierto sentido equivalentes, que comparten los mismos presupuestos. Este punto es de gran importancia para comprender correctamente la evolución del logicismo.

1. Aclaraciones preliminares

La época en que se desarrolló el logicismo coincide con dos acontecimientos fundamentales, íntimamente relacionados con la evolución de ese enfoque. En primer lugar, se trata del momento en que la noción de conjunto emerge dentro del panorama de las matemáticas, inaugurando la era de la matemática moderna. Hacia 1870 se publican en Alemania diferentes trabajos en que los conjuntos se emplean para fundamentar la noción de número, para desarrollar la teoría de funciones reales, para hacer avanzar el álgebra, e incluso en el terreno de la geometría [*cf.* Ferreirós 1993]. Inmediatamente comienzan los trabajos de Cantor, que abrieron el camino hacia la exploración del universo de los conjuntos infinitos.

Como luego veremos, la concepción tradicional de la lógica hacía posible entender la noción de conjunto como algo íntimamente relacionado con esta disciplina. Así, el surgimiento de una matemática conjuntista fue interpretado por algunos autores como muestra de que la matemática no es más que una lógica altamente desarrollada.

Por otro lado, la segunda mitad del siglo XIX fue también la era de la lógica matemática, que obtuvo sus primeros éxitos de manos de Boole en 1847, y luego recibió una nueva configuración gracias a los trabajos de Frege, Peirce, Peano y Russell. En algunos casos, como los de Frege y Russell, las ideas logicistas constituyeron el estímulo que llevó a desarrollar la lógica matemática. Quizá por este motivo, historiadores y filósofos han tendido a pensar que hay una conexión directa entre la evolución de la lógica matemática y la aparición del logicismo. Sin embargo, en este trabajo se propone una lectura alternativa.

Desde nuestro punto de vista actual, lo más importante de la evolución de la lógica en el último tercio del XIX fue la configuración de la lógica de proposiciones y de predicados. Aunque hoy es bien sabido que la lógica de Frege y de Russell era una lógica de orden superior, y que sólo hacia 1930 se consolidó la lógica de primer orden como lenguaje fundamental para la matemática, reconocemos sin embargo en el trabajo de Frege, Peirce y Peano la cantera en la que se labró la llamada 'lógica clásica' [véase Goldfarb 1979 y Moore 1987].

Lo paradójico del caso es que, para el logicismo, lo esencial no era la lógica elemental (lógica de proposiciones y predicados) sino la teoría de conjuntos. Dicho de otro modo, lo esencial era aceptar que la teoría de conjuntos *no es más que* una parte de la lógica. Este punto quedará claro al analizar los planteamientos de Dedekind y su relación con los de Frege. Como ya he dicho antes, las concepciones tradicionales avalaron esta idea de que la noción de conjunto es simplemente una noción lógica.

Sin embargo, en 1903 un escollo casi insalvable se interpuso en el camino del logicismo. La paradoja de Russell vino a mostrar que los argumentos en que se basaba tradicionalmente la idea de que la teoría de conjuntos es parte de la lógica eran inaceptables y daban lugar a contradicciones. El revuelo fue grande, por supuesto, y las consecuencias profundas: se hizo necesario precisar más las concepciones habituales de la lógica y de la teoría de conjuntos.

La solución más exitosa a largo plazo fue restringir el campo de la lógica, aceptando que la teoría de conjuntos queda fuera de ella, y establecer a ésta sobre bases autónomas, como una teoría axiomática que pertenece propiamente a la matemática. La mayor parte de los autores acabaron abandonando el logicismo, como lo hizo el propio Frege ya en los años 1900. En cierto sentido podría decirse que las paradojas provocaron una revolución en la concepción de la lógica, ya que obligaron a redefinir completamente las relaciones entre lógica y teoría de conjuntos.

La secuencia de desarrollos que acabamos de delinear a grandes rasgos constituye el trasfondo de todo lo que sigue. El resto de este trabajo se moverá de lo particular a lo general: comenzando con Dedekind y su enfoque, ascenderemos paso a paso hacia una interpretación de toda la evolución de un movimiento fundacional.

2. Dedekind y su enfoque

En 1888, Richard Dedekind publicó su libro *¿Qué son y para qué sirven los números?*[2] Pese a su título de aire elemental, la obra proponía en realidad las bases de toda una concepción de la matemática pura, capaz de abarcar aritmética, álgebra y análisis.

En ese año de 1888 Dedekind era ya un hombre mayor, de 57 años, y un matemático de gran renombre. Había estudiado con Gauss y había sido amigo íntimo de Riemann, quizá los dos matemáticos alemanes más importantes del siglo XIX. Así pues, no cabe duda de que su *pedigree* era magnífico, pero lo que realmente cuenta al valorar a un científico son sus contribuciones propias.

Las de Dedekind se hicieron esperar: sólo a los 40 años publicó su primer trabajo importante, que sería la base de su fama actual [Dedekind 1871]. En él daba una solución totalmente general a un difícil problema abierto por Gauss unos 40 años antes: Dedekind establecía la teoría de números algebraicos sobre la base de la noción de ideal.[3] Lo más interesante para nosotros es que el fundamento de la teoría de Dedekind era la noción de conjunto: Dedekind fue el matemático que introdujo las nociones de cuerpo, anillo, etc., es decir, los conjuntos con estructura que caracterizan el álgebra moderna.[4] Sus trabajos posteriores siguieron esta línea, profundizando en temas de números algebraicos, adentrándose en la teoría de funciones algebraicas (en un artículo de 1882 escrito con H. Weber), etcétera.

¿Qué imagen podía tener de Dedekind un matemático alemán de los años 1890? Sin duda lo consideraría como uno de los grandes autores de su tiempo, de mucha mayor envergadura que un Frege, un Peano o un Peirce. Sobre este punto no cabe duda. La consecuencia es que las ideas de Dedekind no podían dejar de tener gran peso, es-

2 A partir de ahora me referiré a él bajo el nombre abreviado *¿Qué son los números?*

3. Edwards [1980] estudia la teoría de Dedekind y otra equivalente expuesta por Kronecker en 1882.

4 Como es bien sabido, la noción de grupo es anterior y se debe a Galois.

pecialmente si trataban de la noción de número, dado que Dedekind era y es uno de los grandes nombres en teoría de números.

Dicho esto, consideremos cuál fue la aportación de Dedekind a los fundamentos de la matemática. Por desgracia, no puedo detenerme en analizar los orígenes de sus ideas: el hacerlo nos llevaría a Riemann, que propuso aunque en forma embrionaria una visión conjuntista de la matemática, y nos forzaría a entrar en detalles demasiado técnicos sobre la obra algebraica de Dedekind [véanse Ferreirós 1993 y 1995]. Baste decir que Dedekind comenzó a utilizar las nociones de conjunto y aplicación al trabajar en temas relacionados con álgebra a finales de los años 1850; enseguida comenzó a aplicar estas nociones al estudio de los fundamentos de la idea de número.

En todos sus trabajos, Dedekind mantuvo siempre un ojo atento a las cuestiones de fundamentos, mientras el otro se centraba en la solución de los problemas concretos de cada caso. Su teoría de los números algebraicos, por ejemplo, es perfectamente coherente con su concepción de los fundamentos, lo mismo se aplica a su enfoque de la teoría de Galois, o de las funciones algebraicas, o de los principios del análisis, o a sus fragmentos sobre topología. Por eso no es posible entender adecuadamente su visión del sistema numérico sin considerar a la vez el modo en que las partes superiores de la matemática encajaban en ella.

Con esto no quiere decirse que las ideas de Dedekind sobre fundamentos fueron una especie de corsé que constriñó su enfoque de otras cuestiones. En realidad, también hay que decir que al elaborar sus ideas sobre el sistema numérico, Dedekind no perdió nunca de vista las necesidades del análisis y del álgebra de su tiempo. De este modo, puede decirse que Dedekind nos ofrece uno de los ejemplos más notables del esfuerzo por crear un marco capaz de abarcar toda la matemática clásica, sobre la base del rigor deductivo. En este sentido se ha dicho que Dedekind es el principal antecesor de Bourbaki.

¿Cuál era ese marco general en el que se basaba la matemática? La respuesta es simple: la teoría de conjuntos y de aplicaciones. Ya en 1872 Dedekind estaba convencido de que la aritmética, el álgebra y el análisis podían desarrollarse utilizando sólo las nociones elementales de la teoría de conjunto y aplicación.[5] Hay que decir que Dedekind fue el primer matemático que introdujo explícitamente la noción general de aplicación y estudió en detalle sus propiedades, pero nunca

5. 1872 fue el año en que publicó su teoría de los números irracionales [Dedekind 1872] y en que comenzó a redactar el borrador de su libro de 1888, borrador publicado en [Dugac 1976, 293 ss].

consideró la posibilidad de reducir las aplicaciones a conjuntos, sino que empleó ambas nociones como ideas primitivas.

Conviene decir unas palabras sobre cómo se desarrollaría el programa de Dedekind. En su libro sobre los números naturales [Dedekind 1888] mostró cómo definir el conjunto $\mathbb{N}$ y su estructura empleando sólo conjuntos y aplicaciones. En otros trabajos inéditos mostró cómo continuar definiendo los números enteros y racionales al modo habitual —como clases de pares—, y en un artículo de 1872 presentó la definición de los números reales por medio de cortaduras. En cuanto a los complejos, la idea de definirlos mediante pares se conocía desde la obra de Hamilton [1837; 1853]. Para todo este desarrollo basta con los fundamentos expuestos en el libro de 1888, con lo cual tenemos la totalidad del sistema numérico y las operaciones aritméticas, definidos en términos de conjuntos y aplicaciones.

Llegados aquí, se puede continuar estudiando la topología de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$;[6] también es posible alcanzar la teoría de funciones con sólo definir aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (funciones reales) o de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ (funciones complejas).[7] Y en cuanto al álgebra, en aquel momento se trataba de álgebra numérica: los cuerpos, anillos, ideales, etc. que estudiaba Dedekind (y que eran lo más avanzado y abstracto de su época) son simplemente subconjuntos de $\mathbb{C}$ con ciertas estructuras definibles en términos de nociones previas. Así pues, conjuntos y aplicaciones bastan para satisfacer el programa de Dedekind para la fundamentación de la matemática.

Todo esto es muy interesante, pero el lector estará ya echando en falta la lógica. ¿dónde queda la lógica en los planteamientos de Dedekind, que pretenden ser logicistas? La respuesta es simple de nuevo, pero desconcertante: será necesario hacer una tarea de contextualización para comprenderla.

3. Conjunto y aplicación como nociones lógicas

Ante todo, el hecho de que Dedekind era logicista no admite duda, ya que su libro de 1888 comienza con una confesión de lo más clara. Las primeras palabras del prólogo a *¿Qué son los números?* dicen así:

6. Véase el trabajo "Allgemeine Sätze über Räume" en Dedekind 1930/32, vol.2, 353-355, que puede datarse entre 1863 y 1866.
7. Dedekind nunca aclaró sus ideas respecto a cómo el análisis quedaría definido en su sistema; ésta me parece la reconstrucción más natural.

> [L]o que es demostrable, no debe aceptarse en ciencia sin demostración. Por evidente que parezca esta exigencia, según creo no hay que considerarla satisfecha ni siquiera en la fundamentación de la ciencia más sencilla, aquella parte de la lógica que trata de la teoría de los números [...] Al decir que la aritmética (álgebra, análisis) es sólo una parte de la lógica, estoy manifestando, ya que considero el concepto de número como algo completamente independiente de las representaciones o intuiciones del espacio y del tiempo, como algo que es más bien un resultado inmediato de las puras leyes del pensamiento. [...] Mediante la construcción puramente lógica de la ciencia de los números, y mediante el dominio numérico continuo que con ella se obtiene, nos encontramos por vez primera en situación de investigar con precisión nuestras representaciones de espacio y tiempo, relacionándolas con este dominio numérico creado en nuestra mente [Dedekind 1888, 335].[8]

Lo sorprendente del caso es que el logicismo de Dedekind se basa en una teoría de conjuntos y aplicaciones, sin mención alguna de lógica proposicional o de predicados. Por ello los historiadores han considerado este caso como algo descartable o anómalo. Sin embargo, como ya indiqué en la sección 1, este tipo de enfoque se basa en un *quid pro quo*: confundir los presupuestos del logicismo con las características esenciales de la lógica matemática que se estaba desarrollando en aquel tiempo. Según Dedekind, la teoría de conjuntos y aplicaciones forma parte de la lógica, de ahí que su programa de fundamentación llevara al logicismo. Antes de rechazar esta idea por anómala, debemos tener en cuenta el contexto del momento y la acogida que obtuvo el trabajo de Dedekind.

Para empezar, hay que resaltar que Dedekind nunca afirmó que la lógica se redujera a la teoría de conjuntos y aplicaciones, simplemente dijo que las nociones de conjunto y aplicación forman parte de la lógica, y que son la parte de la lógica esencial para derivar la matemática. Empezaremos viendo hasta qué punto estas ideas eran nuevas.

Es de sobra conocido que durante el siglo XIX la teoría de clases se consideraba central para la lógica: las doctrinas de Boole, Peirce, Peano y Schröder son buenos ejemplos de ello. Por eso Dedekind nunca sintió la necesidad de justificar que los conjuntos son parte de la lógica. Lo que no es tan bien conocido es el origen de ese planteamiento habitual hacia finales del XIX. La razón de que la teoría de clases

8. Dedekind se opone aquí a fundamentaciones del número de corte kantiano como la que propuso Hamilton, según el cual la intuición del tiempo está en el origen de la aritmética, como la intuición del espacio da origen a la geometría [Hamilton 1837, 1853].

estuviera en el centro de la lógica es, primero, el papel clave que se venía asignando a los conceptos en lógica, y segundo, el presupuesto comúnmente aceptado de que existe una relación directa entre conceptos y clases.

Ambos puntos eran un lugar común de los manuales de lógica alemanes del siglo XIX. Pertenecían a un cuerpo doctrinal básico, con raíces en el siglo XVII al menos,[9] que desempeñó un papel importante como trasfondo de la evolución no sólo de la lógica matemática y el movimiento logicista, sino también de la teoría de conjuntos.

Los lógicos tradicionales asumían que todo razonamiento puede reducirse a un encadenamiento de silogismos; y los silogismos no son más que combinaciones formales de conceptos, combinaciones formadas mediante las partículas 'todo', 'algún', 'es' y 'no'. Si consideramos el ejemplo más típico de silogismo: "Todo A es B y todo B es C, por tanto todo A es C", las letras A, B, C se entendían tradicionalmente como símbolos de conceptos.[10] Por eso, los tratados de lógica del siglo XIX comenzaban habitualmente con una sección titulada "Sobre los conceptos".

Dentro de dicha sección aparecía siempre la distinción entre la comprehensión y la extensión de un concepto, que se remonta al menos a la *Lógica de Port Royal* [Arnauld y Nicole 1662].[11] La comprehensión de un concepto está formada por los atributos que son esenciales al mismo, de modo que 'no pueden retirarse de él sin destruir la idea'; por ejemplo, no podemos pensar en un triángulo sin considerar a la vez el atributo de estar delimitado por tres líneas rectas. La extensión del concepto está constituida por los sujetos a que se aplica el concepto, o dicho de otro modo, por los objetos que caen bajo el concepto; en nuestro ejemplo, por todas las diferentes 'especies' de triángulo. Los mismos lógicos de Port Royal habían utilizado ya la noción de extensión para desarrollar de modo formal o semi-matemático la lógica silogística.

Estos principios seguían vigentes dos siglos después, y pueden encontrarse no sólo en los manuales más tradicionales, sino también en obras de lógicos matemáticos. Para confirmarlo me limitaré a citar un

9. Véase Arnauld y Nicole 1662, uno de los manuales más representativos de aquel momento.

10. Éste era en especial el planteamiento de Kant, que solía hablar del 'concepto-sujeto' y el 'concepto-predicado'. Kant fue bastante influyente entre los lógicos alemanes que defendieron la lógica aristotélica frente a la nueva 'lógica' de Hegel. Por ejemplo, el énfasis en el carácter formal de la lógica se origina en Kant; tal concepción formal de la lógica fue enfatizada especialmente por Herbart y sus seguidores [Herbart 1808; 1837, Drobisch 1836].

11. Según me indica el historiador alemán Volker Peckhaus, la distinción se encuentra ya en la *Isagogé* de Porfirio, obra del siglo III.

texto de Boole, que refleja un sentimiento común a todos los lógicos del momento; dice así:

> [l]o que hace posible la lógica es la existencia en nuestras mentes de nociones generales: nuestra capacidad de concebir una clase, y de designar sus miembros individuales mediante un nombre común [Boole 1847, 4].

Boole plantea inequívocamente la idea de que los conceptos y las clases (o extensiones de conceptos) son no sólo centrales en lógica, sino que son el *fundamento mismo* de la lógica. Como vemos, tales ideas propias de la lógica tradicional estuvieron en el trasfondo del álgebra booleana. También fueron importantes en la historia inicial de la teoría de conjuntos.[12]

Frente a lo habitual que era considerar las clases como parte central de la teoría lógica, el caso de la noción de aplicación era muy distinto. Esta noción no figuraba en ningún tratado de lógica tradicional, y Dedekind fue quien la introdujo por vez primera en matemáticas. De ahí que sintiera la necesidad de argumentar que efectivamente las aplicaciones eran parte de la lógica. Inmediatamente a continuación de la confesión logicista citada al principio de esta sección, Dedekind escribe:

> [c]onsiderando atentamente lo que hacemos al contar una cantidad o número de cosas, nos vemos llevados a observar la capacidad mental de relacionar cosas con cosas, hacer corresponder una cosa a otra, o representar una cosa mediante otra, facultad sin la cual sería absolutamente imposible el pensamiento. En mi opinión [...] la ciencia entera de los números debe erigirse sobre este único fundamento, que en todo caso es indispensable [Dedekind 1888, 336].

No quiero detenerme demasiado en aclarar este texto.[13] Dedekind llama la atención sobre el hecho de que al contar cosas correlacionamos los ordinales ('primero', 'segundo', etc.) con las cosas que contamos. Dicho de otro modo, damos a cada cosa el nombre de un ordinal, o representamos cada cosa mediante un número. Esta capacidad de nominación o representación es esencial para que sea posible el pensamiento: Dedekind parece estar diciendo que el pensar presupone algún tipo de soporte representacional (ya sea símbolo o icono)

12. Sería posible dar muchos ejemplos de ello. En el caso de Dedekind, la conexión entre concepto y clase (o conjunto) aparece en el borrador de Dedekind [1888] escrito entre 1872 y 1878, e incluso desempeñó un papel en la elaboración de la teoría de ideales de 1871 [Ferreirós 1993, 1995].
13. Hay que decir que otros pasajes de Dedekind 1888 permiten precisar el sentido del texto.

Al leer un texto como el anterior surge rápidamente la acusación de psicologismo, pero a este respecto habría que hacer al menos dos precisiones. Primero, el psicologismo de Dedekind parece ser algo así como un kantianismo naturalizado, una posición que no es raro encontrar entre los científicos alemanes de aquel tiempo (por ejemplo en el lógico Schröder). Este tipo de psicologismo no cede fácilmente a las críticas clásicas de Frege, de hecho, el propio Kant es el origen de la crítica al psicologismo. Segundo, las ideas epistemológicas de un Schröder en sus *Vorlesungen* [Schröder 1895] son mucho más psicologistas que las de Dedekind, y sin embargo nadie duda de considerar a Schröder como un importante lógico; esta misma debería ser la actitud ante el enfoque de Dedekind.

Más importante que discutir el tema del psicologismo, es considerar la recepción que algunas figuras clave dieron a las ideas de Dedekind. Así veremos hasta qué punto era sensato, a finales del XIX, proponer que la teoría de conjuntos y aplicaciones era parte de la lógica.

4. La recepción de Dedekind

La propuesta de Dedekind en lo tocante a aplicaciones llegó en el momento justo, ya que la suya fue la era del gran desarrollo de la teoría de relaciones. Pronto se entendió que las aplicaciones no son más que un tipo particular de relaciones binarias, con lo que efectivamente se aceptaba que la noción de aplicación es de origen lógico.

Dado que Peirce fue el principal lógico de las relaciones, hay que preguntarse qué pensaba de las aplicaciones de Dedekind. En 1911 Peirce escribió que se trataba de un "reconocimiento temprano y significativo" de la lógica de relativos, con lo que admitía que las aplicaciones pertenecen a la lógica. Por otro lado, ya en 1901 había afirmado Peirce que la obra de Dedekind mostraba cómo la frontera entre lógica y matemática pura era "casi evanescente".[14] Sin embargo, Peirce nunca llegó a aceptar que el logicismo fuera una filosofía de la matemática adecuada.

Más entusiasta que Peirce fue Schröder, partidario declarado de Dedekind que llegó a convertirse al logicismo bajo su influencia. Schröder calificó a *¿Qué son los números?* como un trabajo "de los que hacen época", y afirmó que "uno de los objetivos más importantes" de su propia obra era incorporar todo lo esencial del libro de Dedekind en el edificio de la lógica general [Schröder 1895, 346]. El tercer

14 Citas tomadas, respectivamente, de Peirce 1931/60, vol 3, 389 y Peirce 1931/60, vol 2, 124-125.

volumen de sus *Vorlesungen* dedica dos de nueve lecciones a las teorías de Dedekind —en particular la teoría de cadenas y la de aplicaciones—, observándolas desde el punto de vista de las relaciones binarias. A finales de los años 1890, Schröder se había convertido en un logicista convencido, cosa que ya puede verse en algunos pasajes de sus *Vorlesungen*.[15]

Es interesante observar que cuando Peirce y Schröder hablan del logicismo, siempre se refieren a Dedekind y nunca a Frege. Esto parece natural dada la escasa aceptación que alcanzó Frege antes de que Russell lo rescatara del olvido.

También hay indicios para pensar que Dedekind influyó en la escuela italiana: el modo en que Burali-Forti y Pieri se refieren a la idea logicista —en términos de clases y representaciones— parece indicar la influencia de Dedekind; de este modo, Burali-Forti y Pieri iban más allá de los planteamientos de su maestro Peano.[16] Si esto se confirmase, encontraríamos una explicación de que Russell llegara a la tesis logicista *antes* de haber entrado en contacto estrecho con los trabajos de Frege. Russell leyó *¿Qué son los números?* a principios de 1898, y luego habría continuado recibiendo la influencia de Dedekind indirectamente a través de los italianos. Hay que decir que Russell nunca aceptó el planteamiento dedekindiano de los números naturales, prefiriendo el planteamiento cardinal de Cantor y otros.[17] Sin embargo, en sus trabajos sobre relaciones, antes aún de estudiar en detalle a los italianos, Russell había adoptado ya la definición del infinito dada por Dedekind.[18]

Pero conviene que pasemos ya a Frege mismo, dado que, al ser el principal logicista contemporáneo, es el autor que debemos considerar como punto de referencia fundamental al evaluar el trabajo de Dedekind. La comparación de Frege y Dedekind nos permitirá

15 Sobre esto pueden verse dos artículos recientes: Peckhaus 1991; 1993, y también Ferreirós 1993.

16 Véase Rodríguez Consuegra 1991, o el artículo del mismo autor en *Mathesis* 4 (1988) 221 *ss*. Conviene recordar que los primeros trabajos de Burali-Forti sobre teoría de conjuntos retomaban las ideas de Dedekind.

17 Sobre sus opiniones hacia 1900, véanse Rodríguez Consuegra 1991 y Garciadiego 1992. Hay que decir que Cantor no era en absoluto logicista (véase más adelante), lo que no obsta para que Russell pudiera interpretar sus ideas en sentido logicista.

18 Hay que destacar que esta definición era, para la mentalidad del momento, un ejemplo sorprendente de reducción de una noción matemática a pura lógica. Dedekind definió lo que es un conjunto infinito en términos de conjuntos y aplicaciones únicamente: un conjunto A es infinito si existe una aplicación biunívoca de A en un subconjunto propio A' [Dedekind 1888, 356].

arrojar luz sobre los presupuestos esenciales en que se basó el logicismo del siglo XIX.

5. Los presupuestos del logicismo

En su gran obra *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege escribió que el libro de Dedekind era "la obra más completa sobre los fundamentos de la matemática que he conocido últimamente" [Frege 1893, vii]. Pero Frege era sin duda un hombre muy crítico, y lo demostró al hablar de Dedekind; pasemos pues a las críticas contenidas en [Frege 1893, 1-3].

Frege se sentía descontento con la noción de conjunto tal como la estaban empleando sus contemporáneos: pensaba que ni se trataba de una noción abstracta, ni mucho menos de una noción lógica. ¿Por qué? Básicamente porque Frege rechazaba el punto de vista extensional que había ido emergiendo a lo largo del siglo XIX, y que ha sido la clave del éxito de la teoría de conjuntos. Según Frege, no debemos hablar de conjuntos o clases, sino dar primacía a los conceptos; en realidad, se trataba de un planteamiento más tradicional que el de Dedekind o Schröder.

Ahora bien, para deducir la aritmética de la lógica Frege se vio obligado a utilizar clases, que en efecto introdujo como 'extensiones de conceptos'; esta noción es esencial para la definición fregueana del número cardinal. De nuevo, Frege recurre a un enfoque bien tradicional, como quedará claro tras lo dicho en la sección 3. Por eso no es raro que Frege nos haya dado la expresión más precisa de la conexión entre conceptos y clases sancionada por la tradición: se trata de su famosa 'ley V', a veces denominada principio de comprehensión [Frege 1893, 35-36, 240]. Esta ley o principio fue responsable del terrible efecto que la paradoja de Russell tuvo sobre su trabajo.

Hasta aquí los conjuntos. ¿Qué opinaba Frege de las aplicaciones de Dedekind? Sus objeciones fueron en la misma línea: la noción de aplicación no es puramente lógica, sino que deberíamos hablar en términos intensionales, esto es, deberíamos hablar de relaciones. Por supuesto, la noción de relación es más general que la de aplicación, pero lo que Frege está resaltando es que a la noción extensional de aplicación debemos preferir la *intensional* de relación.

A fin de cuentas, la controversia se reduce a una discusión epistemológica, y desde luego la posteridad vino a dar la razón más bien a Dedekind que a Frege. Pero lo más notable es que, si desconsideramos el tema epistemológico, Frege nos ofrece una perfecta confirmación de que la teoría de Dedekind es realmente una teoría lógica. Frege nos está diciendo que las nociones básicas de Dedekind tienen correlatos que son parte esencial de la lógica: a los conjuntos corresponden los conceptos, a las aplicaciones las relaciones.

Más aún, lo anterior indica un paralelismo entre Frege y Dedekind que podría habérsenos pasado por alto. Tras discutir el trabajo de Dedekind, y tras haber reemplazado los conjuntos por conceptos y las aplicaciones por relaciones, Frege escribe: "Concepto y relación son los pilares sobre los que erigiré mi edificio" [Frege 1893, 3]. Así pues, las nociones fundamentales del logicismo de Frege son equivalentes —módulo la extensionalidad— a las ideas básicas de Dedekind.

Frege nos está diciendo que los presupuestos de su logicismo son básicamente los mismos que los del logicismo de Dedekind. El desarrollo inicial del logicismo, hasta el año 1900, dependió de la teoría de conjuntos: dependió de considerar conjuntos y relaciones, o algo equivalente, como parte de la lógica. Esto es lo que permitió a Frege, a Dedekind, y al Russell de 1903 reducir la aritmética a pura lógica.

Vistas así las cosas, el logicismo nació como una interpretación del desarrollo que estaba teniendo la matemática: una interpretación del papel cada vez más central que los conjuntos y las aplicaciones estaban desempeñando. Puede decirse pues que *la teoría de conjuntos era un ingrediente indispensable de la lógica del logicista.* Y con esto estamos en condiciones de revaluar el significado que tuvieron las paradojas en aquel momento.

6. El impacto de las paradojas

Quizá vale la pena empezar con una pregunta algo indirecta. ¿Por qué Cantor no se sintió amenazado por las paradojas, o mejor dicho, por qué no vio como paradójicos los argumentos que descubrió hacia 1896? Obviamente, porque no era logicista. Cantor no aceptó en absoluto el planteamiento de Dedekind, sino que llegó a decir, en una carta de 1899 a Hilbert, que su enfoque era "diametralmente opuesto" al de su colega [Purkert e Ilgauds 1987, 154]. Esto nos indica que las paradojas no eran tanto una amenaza para la teoría de conjuntos, como un 'golpe de muerte' para el logicismo.[19]

Con esto no pretendo negar que las paradojas crearon confusión respecto a la teoría de conjuntos. Pese a la importancia de Cantor y

19. Expresión que utilizó Dedekind al hablar de una conversación que tuvo con Cantor en septiembre de 1899. Hay que decir que Dedekind no habla claramente del logicismo, sino de 'un antiguo error suyo', pero tanto Dugac [1976] como el que esto escribe interpretan sus palabras como una referencia al logicismo.

su obra, reconocida por todos, su posición respecto a los fundamentos de la teoría de conjuntos (realismo platónico-teológico) era algo aislado de la corriente más importante en su época. Matemáticos y filósofos estaban demasiado acostumbrados a pensar que la teoría de conjuntos era parte de la lógica. Pero volvamos a las paradojas.

La conexión inmediata entre clases y conceptos que se venía asumiendo tradicionalmente llevó al supuesto ingenuo de que todo concepto aparentemente bien definido determina un conjunto aceptable, esto es, un conjunto que no debe dar lugar a contradicción. En particular, al concepto de clase le correspondía la clase de todas las clases, aceptada por la mayor parte de los autores del momento (incluyendo a Dedekind y Russell, pero excluyendo a Cantor y Schröder). Las paradojas, y en particular la de Russell, probaron hasta qué punto era incorrecto ese supuesto.

Hay que resaltar que esto no es sólo mi propia interpretación sino la de los autores del momento. En 1904, Hilbert atribuyó a la lógica tradicional, no a la teoría de conjuntos, la responsabilidad de las paradojas.[20] Y Zermelo, en el artículo de 1908 que establecía su famoso sistema axiomático para la teoría de conjuntos, escribió:

> En la actualidad [...] la existencia misma de [la teoría de conjuntos] parece amenazada por ciertas contradicciones o "antinomias" que pueden derivarse de sus principios —principios que según parece gobiernan nuestro pensamiento necesariamente— y a las que no se ha encontrado ninguna solución enteramente satisfactoria. En particular, a la vista de la "antinomia de Russell", que trata del conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos, hoy ya no parece admisible el asignar a un concepto arbitrario, definible lógicamente, un conjunto o clase como su extensión [Zermelo 1908, 200]

Vemos pues que Zermelo identifica la conexión entre conceptos y clases como la responsable de las paradojas.

Las paradojas trajeron consigo un divorcio entre la teoría de conjuntos y la lógica, con el que se rompía una relación centenaria.[21] Ciertamente Zermelo recuperó el tradicional principio de comprehensión bajo la forma del axioma de separación, pero este axioma establece la restricción de que sólo podemos definir 'mediante un concepto' (por

20. Escribió que las paradojas muestran cómo "las concepciones y medios de investigación predominantes en la lógica, entendida en el sentido tradicional, no satisfacen las rigurosas exigencias que impone la teoría de conjuntos" [Hilbert 1904, 130].

21. No todo divorcio termina en enemistad: la lógica y la teoría de conjuntos siguieron por supuesto colaborando. El cálculo de primer orden es la base de las axiomatizaciones habituales de la teoría de conjuntos; y a su vez, la teoría de conjuntos es la base de la

decirlo a la antigua) un *subconjunto* de algún conjunto preexistente de acuerdo con los demás axiomas. Este paso hace que lo esencial de la teoría de conjuntos sean los axiomas existenciales (de infinito, conjunto potencia, etc.) y no el propio axioma de separación [*cf.* Zermelo 1908]. Puede así decirse que la teoría de conjuntos se vio obligada a buscar un fundamento autónomo, que primero se expresó axiomáticamente, y luego llegó a verse de manera más conceptual en términos de la jerarquía cumulativa o la concepción iterativa de los conjuntos. En cuanto a la lógica, el efecto fue todavía más radical, ya que hubo de redefinir sus fronteras: la teoría de conjuntos quedaba fuera de su ámbito, aunque ésta es una cuestión que seguiría discutiéndose por muchos años. Andando el tiempo, la lógica se vio reducida al cálculo de primer orden, que a mediados de nuestro siglo reinaba como la única lógica generalmente reconocida.

Pero no todo el mundo tomó el rumbo de Hilbert o Zermelo. Hubo un movimiento de resistencia, un grupo de lógicos que trataron de devolver el esplendor perdido al ideal de Frege y Dedekind. Su líder, por supuesto, fue Russell, que inauguró una *segunda fase* en la historia del logicismo. La contribución de Russell, y en especial su teoría de tipos [Russell 1908], puede entenderse como un intento de rescatar lo más posible de la perspectiva tradicional representada por Frege.

Lejos de la reacción de Zermelo, Russell interpretó las paradojas como una muestra de la necesidad de restringir la 'ley V' o principio de comprehensión de Frege, *sin abandonar su papel de fundamento de la teoría de clases*. En vez de establecer un universo conjuntista en forma autónoma, Russell formuló una nueva versión del principio de comprehensión para poder mantenerlo como base de la noción lógica de clase. Podríamos así contraponer la teoría *matemática* de conjuntos, establecida por Zermelo, a la teoría *lógica* de clases formulada por Russell.

Al intentar restablecer la conexión entre conceptos y clases en forma aceptable, Russell se vio llevado a especificar qué tipo de objetos pueden constituir la extensión de un concepto;[21] en esto consiste la teoría de tipos. Así pues, la reacción de Russell ante las paradojas fue mucho más cercana al planteamiento lógico tradicional que la de Zermelo. Esta versión revisada del logicismo —o aún una tercera versión tautologista, que podría denominarse 'logicismo vienés'— es la que prevalece en las mentes de matemáticos, filósofos e historiadores hoy en día. Pero si lo que nos interesa es comprender el surgimiento del mo-

semántica formal y la teoría de modelos [*cf.* Moore 1980]. Pero el fundamento conceptual del logicismo se había desvanecido.

21 Russell denomina a los conceptos 'funciones proposicionales'.

vimiento logicista, debemos buscar en otro lado. Este trabajo ha intentado mostrar cómo atendiendo al logicismo de Dedekind es posible reinterpretar todo un desarrollo histórico en forma más adecuada.

Referencias

ARNAULD, A. y NICOLE, P. 1662. *La Logique, ou l'art de penser*. Ed. facsimil, Stuttgart, F. Frommann, 1965. Trad. española: Madrid, Alfaguara, 1987.

BOOLE, G. 1847. *The mathematical analysis of logic*. Cambridge: Macmillan. Trad. española: Madrid, Cátedra, 1984.

CANTOR, G. 1915. *Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers*. [Traducción de dos artículos aparecidos en *Mathematische Annalen* en 1895 y 1897.] Chicago: Open Court. Reimpresión: New York, Dover, 1955.

__________. 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: Springer.

CARNAP, R. 1931. "The Logicist Foundations of Mathematics". En Benacerraf & Putnam, (eds.), *Philosophy of Mathematics: selected readings* (Cambridge University Press, 1983).

DEDEKIND, R. 1871. "Über die Komposition der binären quadratischen Formen". Suplemento X a Dirichlet & Dedekind, *Zahlentheorie*, 2ª ed. Braunschweig: Vieweg. En Dedekind 1930/32, vol.3, 223-261.

__________. 1872. "Stetigkeit und irrationale Zahlen". En Dedekind 1930/32 III, 315-334. Trad. inglesa en Dedekind 1901.

__________. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg. En Dedekind 1930/32 III, 335-390. Trad. inglesa en Dedekind 1901.

__________. 1901. *Essays on the Theory of Numbers*. Chicago: Open Court. Reimpresión: New York, Dover, 1963.

__________. 1930/32. *Gesammelte mathematische Werke*. 3 vols., Braunschweig, Vieweg. Reimpresión: New York, Chelsea, 1969.

DROBISCH, M. W. 1836. *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen*. Leipzig: Voss.

DUGAC, P. 1976. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nombreux textes inédits)*. Paris: Vrin.

EDWARDS, H. M. 1980. "The Genesis of Ideal Theory". *Archive for History of Exact Sciences* 23: 321-378.

__________. 1983. "Dedekind's invention of ideals". *Bulletin of the London Mathematical Society* 15: 8-17. Reimpreso en Phillips 1987.

FERREIRÓS, J. 1993. *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908*. Madrid: Publicaciones de la Universidad Autónoma.

__________. 1995. "Traditional Logic and the Early History of Sets, 1854-1908". *Archive for History of Exact Sciences* (próxima publicación).

FREGE, G. 1879. *Begriffsschrift*. Halle: Nebert. Reedición con textos relacionados: Hildesheim, Olms, 1964. Edición bilingüe: Madrid, Cuadernos Teorema.

__________. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau: Koebner. Trad. española: Barcelona, Laia, 1972.

__________. 1893/1903. *Grundgesetze der Arithmetik*., 2 vols., Jena, Pohle. Reimpresión: Hildesheim, G. Olms, 1966.

GARCIADIEGO, A. R. 1992. *Bertrand Russell and the Origins of the Set-theoretic Paradoxes*. Basel: Birkhäuser. Ed. española en Madrid, Alianza, 1992.

GOLDFARB, W. 1979. "Logic in the Twenties: The Nature of the Quantifier". *Journal of Symbolic Logic* 44: 351-368.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1984. "Notes on the Fate of Logicism from *Principia Mathematica* to Gödel's Incompletability Theorem". *History and Philosophy of Logic* 5: 67-78.

HAMILTON, W. R. 1837. "Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a preliminary and elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time". En Hamilton 1967, 3-96.

———. 1853. "Preface to «Lectures on Quaternions»". En Hamilton 1967, 117-155.

———. 1967. *The mathematical Papers*, vol. 3. Cambridge: University Press.

HERBART, J. F. 1808. "Hauptpunkte der Logik". En Herbart 1964 II, 217-226.

———. 1837. *Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie. Zweyter Abschnitt: Die Logik*. En Herbart 1964 IV, 67-104.

———. 1964. *Sämtliche Werke in chronologischer Reihenfolge*. 19 vols., Langensalza: Beyer & Söhne, 1887-1912. Reimpresión: Aalen, Scientia, 1964.

HILBERT, D. 1904. "Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik". Trad. inglesa en van Heijenoort 1967, 129-138.

KNEALE, W. y KNEALE, M. 1962. *The development of Logic*. Oxford: Clarendon. Trad. española: Madrid, Tecnos, 1972.

MOORE, G. H. 1980. "Beyond First-order Logic. The Historical Interplay between Mathematical Logic and Axiomatic Set Theory". *History and Philosophy of Logic* 1: 95-137.

———. 1987. "A House Divided Against Itself: The Emergence of First-Order Logic as the Basis for Mathematics". En Phillips 1987, 98-136.

PEIRCE, C. S. 1931/60. *Collected Papers*. 7 vols., Harvard University Press.

———. 1988. *Escritos lógicos*. Madrid: Alianza.

PHILLIPS, E. R. 1987. *Studies in the History of Mathematics*. Mathematical Association of America.

PURKERT, W. e ILGAUDS, H. J. 1987. *Georg Cantor 1845-1918*. Basel: Birkhäuser.

RODRIGUEZ-CONSUEGRA, F. 1991. *The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell: Origins and Development*. Basel: Birkhäuser.

RUSSELL, B. 1903. *The principles of mathematics*. Cambridge: University Press. Reimpresión: London, Allen & Unwin, 1948.

———. 1908. "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types". *American Journal of Mathematics* 30: 222-262. Reimpreso en van Heijenoort 1967, 150-182.

SCHRÖDER, E. 1895. *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, vol. 3. Leipzig: Teubner. Reimpresión: New York, Chelsea, 1966.

STYAZHKIN, N.I. 1969. *History of mathematical logic from Leibniz to Peano*. Cambridge: MIT Press.

VAN HEIJENOORT, J. 1967. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Harvard University Press.

ZERMELO, E. 1908. "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I". *Mathematische Annalen* 65: 261-281. Trad. inglesa en van Heijenoort 1967, 199-215.

José Ferreirós obtuvo el doctorado en lógica y filosofía de la ciencia en 1991, por la Universidad Autónoma de Madrid. Ha publicado diversos trabajos en revistas como *Theoria*, *Historia Mathematica*, y *Archive for History of Exact Sciences*. Asimismo, una versión revisada de su tesis doctoral apareció publicada por el servicio editorial de la Universidad Autónoma de Madrid. Su tema de investigación actual considera los contactos internacionales (dentro de Europa) en el marco de las ciencias físicas y las matemáticas a principios del siglo XIX, con el fin de establecer su papel en el desarrollo interno y en la forma institucional de la ciencia. Desde enero de 1993 se encuentra en la Universidad de California en Berkeley realizando un postdoctorado gracias a una beca MEC/Fulbright.