Variaciones del estilo matemático

Claude Chevalley

El estilo matemático, al igual que el estilo literario, no deja pasar una época sin sufrir fluctuaciones importantes. Sin duda cada autor posee su estilo propio, pero puede reconocerse en cada época una tendencia general bien definida. Ese estilo sufre, de una época a otra, bajo la influencia de las personalidades matemáticas, revoluciones que transforman la escritura y el pensamiento para los períodos siguientes.

Es así que puede atribuirse a los trabajos de Weierstrass el estilo que podríamos llamar "estilo de las ε". Su razón de ser y su justificación están en la necesidad que se impuso de volver *rigurosas* las demostraciones matemáticas. Se sabe, en efecto, que una vez superadas las dificultades que se habían presentado en el nacimiento del Cálculo Infinitesimal, los matemáticos de la primera mitad del siglo XIX se creyeron autorizados a emplearla con una confianza absoluta... y en ocasiones ciega. Se hablaba de la integral, de la derivada de una función, del límite de una sucesión de funciones sin decir nada acerca de la naturaleza de las funciones que se introducían; más exactamente, por una especie de acuerdo tácito, se suponía que los "entes" manipulados pertenecían a un dominio en el cual todas esas operaciones (derivación, paso al límite, etc.) tenían un sentido preciso. En ese dominio, las operaciones en cuestión eran tratadas exactamente como las operaciones algebraicas; o sea que, como la adición, son independientes de los elementos sobre las que se efectúan y conducen a resultados bien determinados. Tomemos como ejemplo la geometría infinitesimal; no se dudará en emplear expresiones como esta: "tomemos sobre la curva C un punto en una vecindad infinitamente pequeña de un punto *M*" o bien "la tangente en el punto *M* es la recta que pasa por *M* y por un punto que se encuentra en una vecindad infinitamente pequeña de éste". Sin duda, aún empleamos tales expresiones, pero más bien en conversaciones privadas y no por escrito y, en todo caso, como expresiones que sintetizan el razonamiento del paso al límite que ellas suponen, el cual siempre permanece en el subconsciente del geómetra que así se expresa. Por lo contrario, resulta muy claro a partir de los escritos de los geómetras de la Escuela Inglesa del siglo XIX, cómo para ellos estas expresiones no implicaban razonamiento alguno que las justificara, y así consideraban a la noción de punto en una vecindad infinitamente pequeña de otro punto, como perfectamente positiva (cf. por ejemplo, la definición de puntos múltiples de las curvas algebraicas).

Pero no habría que abusar: la existencia de series divergentes era bien conocida y se disponía desde Cauchy, de los criterios de convergencia propios para validar los cálculos que incluían sucesiones infinitas. Pero no se puede negar que los problemas de convergencia o de divergencia permanecieran como preocupaciones latentes. Se consideraba más bien que las series, al devenir divergentes, no por ello dejaban de definir un número, aunque de manera poco adecuada; de ahí las múltiples tentativas de *calcular* la suma de una serie divergente.

Este tratamiento algebraico de las operaciones del cálculo infinitesimal está vinculado al maravilloso florecimiento de resultados matemáticos que se vieron a principios del siglo XIX: funciones analíticas, funciones asociadas a las funciones algebraicas (abelianas), series de Fourier, teoría de superficies de Gauss, ecuaciones de Lagrange en mecánica, trabajos de Laplace, Jacobi, etc. En la misma época, Galois crea la teoría de grupos bajo una forma que hoy llamaríamos puramente algebraica; es decir, independiente de toda operación infinitesimal. Introdujo un nuevo tipo de relaciones algebraicas, las multiplicaciones no conmutativas. Más tarde, Sophus Lie, en su teoría de grupos continuos, realizó la síntesis de la idea de Galois de grupos y de la corriente del cálculo infinitesimal algebraico.

Así, tan pronto fueron establecidas las ideas rectoras del dominio matemático del método constituido, comenzó al interior de ese dominio un trabajo crítico de profundización. Sin duda numerosos geómetras precisaron casos particulares; calcularon, por ejemplo, los desarrollos en serie explícitos de ciertas funciones que la física introdujo, así como otros trabajos análogos. Pero otros más atacaron directamente las bases del edificio analítico-algebraico frente al cual se encontraban. Es de este examen crítico que saldría un estilo matemático enteramente nuevo. La etapa más importante de esta revolución es probablemente el descubrimiento de Weierstrass de una función continua de variable real que no posee derivada para *ningún* valor de la variable y que, por otro lado, está dada por un desarrollo de Fourier bastante simple. Así apareció claramente la posibilidad de encontrar funciones de este tipo en las teorías analíticas clásicas y, por otro lado, aquellas exigían de manera imperiosa el superar los métodos de éstas. Desde entonces se impuso la tarea de reordenar todas las demostraciones clásicas para eliminar la falta de rigor, para definir exactamente el campo de aplicación de los diversos teoremas. Para llevar a cabo este programa se disponía esencialmente de la noción precisa de límite tal y como fue elucidado de manera definitiva por Weierstrass. El paso al límite de Weierstrass, hoy clásico, se define de la manera siguiente: una sucesión de números μ_1, μ_2, . . ., μ_n se dice que tiene por límite el número μ si, para cualquier número positivo ε, es posible determinar un entero N (que depende de ε) tal que la desigualdad $n > N$ implica $|\mu_n - \mu| < \varepsilon$. El infinito considerado en esta noción ha sido llamado con frecuencia infinito virtual; en realidad, la definición, como toda definición matemática utilizable, tiene por objeto remplazar el infinito dado en la sucesión por un esquema puramente finito; a saber, aquel de una demostración que hace pasar de la desigualdad $n > N$ a la desigualdad $|\mu_n - \mu| < \varepsilon$. La fecundidad de la definición proviene del "para cualquier número positivo ε" que ella contiene o si se quiere, de que se exige tan sólo la existencia de una función N de ε que satisfaga la propiedad del enunciado, sin que su naturaleza sea precisada. Pero el enunciado de la definición no pide que se verifique para cada ε individual, lo cual sería efectivamente un proceso infinito. Exige sólo que exista una función $N(\varepsilon)$ tal que un cálculo algebraico u otro permita pasar de $n > N$ a $|\mu_n - \mu| < \varepsilon$. No habría pues que creer que la matemática que va a edificarse a partir de Weierstrass se funda sobre un estudio del infinito como tal; por lo contrario la enorme ventaja de la nueva noción de límite fue la de sustituir el antiguo paso al límite, que conducía bajo su forma algebraica a contradicciones, por un procedimiento algebraico equivalente, fundado sobre transformación de desigualdades.

La definición de Weierstrass se completa por un lema de existencia de límites así definidos. Ese lema, llamado de Bolzano-Weierstrass, se enuncia así: de cualquier sucesión acotada de números reales se puede extraer una subsucesión convergente. La validez del lema puede considerarse como una definición para los números reales; puede probarse construyendo los números reales siguiendo los métodos de Dedeind o de Cantor. Es claro que la pregunta sobre si su empleo conducirá a contradicciones permanece abierta; sólo se puede afirmar que ha permitido evitar aquellas contradicciones introducidas por la noción puramente algebraica del paso al límite y que ha permitido hasta el momento un desarrollo riguroso del análisis.

Es a esta edificación rigurosa que se dedicaron Weierstrass y sus alumnos y sucesores. Ellos nos mostraron cómo se podía, por una cadena de razonamientos sin lagunas, asentar sólidamente los resultados conocidos. Más aún, dotados de un instrumento de de precisión, pudieron penetrar en el dominio de las funciones para las cuales los procedimientos del cálculo infinitesimal clásico fracasaron, funciones que son analíticas, o bien que se presentan como casos límites de funciones analíticas. De esta manera se abrió un campo nuevo a las investigaciones matemáticas.

El empleo por parte de los matemáticos de la definición de límite de Weierstrass se observa por la apariencia externa de sus textos; comenzando por el empleo intenso y en ocasiones inmoderado, de la "ε" con varios índices (es por lo que hablamos anteriormente del "estilo de las ε") y siguiendo con el remplazo sucesivo de la igualdad por la desigualdad, sea en la demostración, sea en los resultados (teoremas de aproximación; teorema de límite superior; teoría de incrementos, etc.). Este último aspecto retendrá nuestra atención; pues hará comprender las razones que exigieron el abandono del estilo de pensamiento de Weierstrass. En efecto, mientras que la igualdad es una relación que tiene sentido para cualesquiera entes matemáticos; la desigualdad sólo se puede adoptar sobre objetos dotados de cierta ordenación, en la práctica, sólo sobre los números reales. Para abarcar todo el análisis la reconstrucción completa a partir de números reales y de funciones de números reales. Es así que los números complejos fueron definidos como parejas de números reales; igualmente, los puntos del espacio de n dimensiones como sistemas de n números reales. Se pudo creer en un momento dado que las matemáticas iban a constituirse en un dominio unitario, fundado enteramente por vía de definiciones constructivas a partir de los números reales.

Pero no fue así. Para empezar, la teoría de grupos proporcionaba un tipo de relaciones que en ningún caso se dejaba construir a partir de los números reales, y por lo tanto, no se dejaba enmarcar en esta matemática unitaria. Pero, por otro lado, los dominios que sí se dejaban construir, no lo hacían sino de una manera poco satisfactoria. Definir, por ejemplo, un punto del plano (o un número complejo) como una pareja ordenada de números reales, es fijar implícitamente un sistema de coordenadas en el plano que se quiere definir. Como además se sabe que se puede elegir en el plano una infinidad de sistemas de coordenadas diferentes, parece inadecuado el elegir uno en particular para la definición. Se puede, por cierto, formular este reproche a nombre de la misma teoría de grupos. Klein había mostrado así que lo más importante para una geometría no lo constituye la naturaleza de los puntos estudiados, sino la estructura del grupo de transformaciones que define la igualdad de dos figuras. Las definiciones constructivas a partir de los números dejaban a la geometría en un absoluto caos de puntos que no estaban ligados a ninguna estructura. Se pueden llamar "puntos del plano euclideano" o "números complejos" a las parejas de números reales y, sin embargo, la geometría euclideana del plano y la geometría conforme son esencialmente diferentes. Sólo las definiciones de estas geometrías pueden decir en qué consiste un punto o un número complejo.

Se puede decir así que las definiciones constructivas del análisis, si bien en un principio permitieron un razonamiento riguroso, tuvieron como efecto posterior el ocultar profundamente la naturaleza de aquello que querían definir, o confundir indebidamente dominios matemáticos que eran, en realidad, distintos los unos de los otros. De esto resultan las complicaciones que se encuentran en muchas demostraciones clásicas por emplearse métodos que nada tienen que ver con el resultado esperado; podría decirse: métodos que no admiten el mismo grupo de transformaciones que el resultado.

Por otro lado se conocía ya una teoría matemática que, siendo perfectamente rigurosa, no sufría de este carácter de artificialidad: se trata de la *geometría plana axioamatizada de Hilbert.* Esta teoría partía de un punto de vista diametralmente opuesto al punto de vista constructivo del que hemos hablado. En efecto, en lugar de definir puntos, rectas, etc., a partir de otras nociones, para deducir en seguida sus propiedades, dejaba la naturaleza de estos objetos completamente indeterminada, contentándose en dar una definición *descriptiva* que consiste en el enunciado de cierto número de sus propiedades fundamentales, calificadas como axiomas. La teoría se constituía sobre la base de esos axiomas y consistía en deducir los teoremas de la geometría elemental, sin inquietarse sobre la naturaleza de los objetos tratados. No era sino al final de esta deducción que podía constatarse que los puntos del plano podrían asociarse a parejas de números reales o, más aún, que los axiomas de la teoría devenían verdaderos si se remplazaban los puntos y rectas por los objetos construidos a partir de los números reales. De tal suerte que si la teoría de los números reales podían considerarse como exenta de contradicciones, sería lo mismo para la geometría así constituida.

El ejemplo de la axiomática de Hilbert no permanecería aislado. En el seno de esa multitud de objetos matemáticos definidos a partir de los números, se producía cierta cristalización; los teoremas se agrupaban unos con otros utilizando métodos análogos; en estos agrupamientos se encontraban en germen las teorías autónomas que pronto habrían de desprenderse de las construcciones a partir de números reales. Citemos, por ejemplo, la definición descriptiva de la integral de Lebesgue, que sin tomar exactamente la forma axiomática de la geometría de Hilbert, seguía la idea principal, puesto que daba en un principio la integral en base a sus propiedades fundamentales dedicándose a demostrar en seguida la compatibilidad de las condiciones impuestas con el objetó a construir. A la teoría de la integral así constituida, se sumaron las teorías de las funciones absolutamente continuas y de las funciones de variación acotada, constituyen un conjunto coherente que dejaba de lado las funciones continuas arbitrarias.

La teoría de estas últimas pertenece a otro dominio que habría de constituirse pronto de manera más precisa: el de los espacios topológicos. Después de Weierstrass se había generalizado considerablemente la noción de límite, extendiéndola más allá de los números reales: puntos del espacio, funciones continuas, funciones analíticas..., etc. En todos estos dominios cierto número de razonamientos se hacían de manera análoga, utilizando algunas propiedades de límite. La idea original de Fréchet de tomar estas propiedades como definición descriptiva del límite, se encuentra en el origen de la topología general que estudia las propiedades de los conjuntos de objetos (llamados generalmente puntos de un espacio) que pueden deducirse de la existencia de entre objetos, abstracción hecha de su naturaleza, de relaciones del tipo de las del límite. En esta nueva teoría entraron poco a poco la teoría general de las funciones continuas, por un lado, y por el otro, aquella parte de la geometría que estudia las propiedades deducidas sólo de la continuidad (*analisis situs*).

El álgebra no permaneció ajena a este movimiento. Puede decirse que fue una de las primeras ramas que se constituyó de manera autónoma, puesto que Dedekind enseñaba ya la teoría de grupos abstractos. Pero el gran impulso de la axiomatización del álgebra data de la memoria de Steinitz, sobre la teoría de campos. En esta memoria el autor considera objetos de naturaleza indeterminada entre los cuales existen dos relaciones, adición y multiplicación, que gozan de las mismas propiedades de estructura algebraica que las operaciones correspondientes de la teoría de números. Tal sistema se llama campo y una teoría completa de los sistemas de esta naturaleza se construye sobre la base de las propiedades de las operaciones admitidas en un principio.

La axiomatización de las teorías ha modificado profundamente el estilo de los escritos matemáticos contemporáneos. Así, para cada resultado que se obtiene, siempre es posible buscar cuáles son las propiedades estrictamente indispensables para poder establecerlo. La procupación será así, la de dar a este resultado una demostración mínima, para lo cual hay que determinar exactamente en qué dominio de las matemáticas nos encontramos para poder eliminar, tanto como sea posible, los métodos ajenos a este dominio que siempre nos pueden llevar a introducir hipótesis inútiles. Al lado de la antigua pregunta: ¿es verdadero este enunicado? (es decir, ¿puede deducirse de las propiedades de los números reales?) se plantea ahora la pregunta: ¿en cuál teoría (es decir, bajo cuáles hipótesis) el enunciado es verdadero, en cuáles no lo es? Este cuidado por la exacta adecuación de los métodos restituye su honor a la investigación de la elegancia de las demostraciones, dándole un sentido preciso, pero bastante descuidado por los geómetras de la escuela precedente. En seguida, la constitución de dominios que se adaptan con exactitud a ciertas operaciones permite, en esos dominios, dar enunciados generales sobre los objetos estudiados. Para dar un ejemplo, el empleo de la integral de Lebesgue en su dominio, que es el de las funciones medibles, permite casi siempre efectuar libremente la operación del paso al límite bajo el signo de integración; la cual exigía, cuando no se estaba en el dominio adecuado, una justificación previa, fastidiosa y siempre repetida. Es decir, que las operaciones del cálculo infinitesimal devienen operaciones de tipo algebraico; pero adquieren este carácter gracias a los axiomas iniciales en los cuales se ha puesto previamente todo lo necesario, y nada más, para poder operar con todo rigor. Gracias a ello, el matemático no tiene, como después del descubrimiento de funciones sin derivadas, la impresión de progresar sobre un terreno sembrado de trampas; por el contrario, se encuentra frente a teorías bien elaboradas en las cuales un cierto número de procedimientos pueden hacerse con toda libertad mientras que otras se excluyen porque carecen de sentido. A propósito de ésto señalemos que es posible esperar una reconciliación entre matemáticos y físicos; éstos, guiados por el mundo físico, jamás sienten la necesidad de plegarse a la técnica de las "ε" ni de establecer con rigor las deducciones; pero conservan una especie de complejo de inferioridad que afortunadamente se disipará cuando posean los instrumentos con los que puedan trabajar sin verse en la necesidad de justificar cada paso que dan.

Los hechos matemáticos se encuentran casi todos repartidos en la actualidad en las diversas teorías, más o menos autónomas, que se constituyeron. Citemos las principales; en álgebra, la teoría general de campos, de la que ya hemos hablado; la teoría de grupos abstractos; la de los sistemas que conllevan relaciones algebraicas con propiedades más débiles que aquélla de los campos (anillos, sistemas hipercomplejos), debidos esencialmente a los trabajos de Mele. Noether, de quien los matemáticos lamentan la reciente desaparición; en análisis, las teorías de la medida y de integración, topología, superficies de Reimann generales, espacios de Hilbert, ...etc.; en geometría, las geometrías proyectiva y conforme, la teoría de espacios de Riemann, la topología combinatoria...

No hay que pensar que estas teorías permanecen aisladas las unas de las otras, por el contrario se asocian entre sí en teorías más complejas. Es así que si se opera sobre ciertos elementos entre los que existen a la vez relaciones estrictamente algebraicas (por ejemplo multiplicación) y relaciones de continuidad, se obtiene el álgebra topológica que es más rica en propiedades que el álgebra y la topología reunidas. Las superposiciones complejas de teorías así formadas son numerosas. Por otro lado, teorías muy diferentes pueden transponerse la una en la otra, si es que se fundan sobre axiomas de la misma estructura; por ejemplo, el cálculo de probabilidades y la teoría de la medida.

Refiriéndose a ese proceso de conjunción de teorías, los diversos sistemas de entes matemáticos aparecen cada uno como la intersección de un cierto número de teorías. Es así que el conjunto de números reales es a la vez un campo (gozando de ciertas propiedades algebraicas muy particulares), un espacio topológico, un grupo topológico, un conjunto ordenado, un espacio medible, etc. Las propiedades de los números reales son los teoremas de una u otra teorías válidas para ellos, o bien, propiedades resultantes de la validez simultánea de varias de esas teorías. Y el conocimiento preciso de aquello sobre lo cual descansa una propiedad de los números reales indica así en qué dominio ésta podrá generalizarse.

De todo esto resulta que la matemática contemporánea busca definir los objetos matemáticos en comprensión; es decir, por sus propiedades características, y no en extensión, es decir, por construcción. Sin duda este aspecto no es definitivo. Pero es difícil de prever en qué sentido evolucionará. En todo caso, la tendencia actual parece aún lejos de haber agotado su dinamismo interno. Las diversas teorías que hasta aquí se han separado, probablemente no han alcanzado su forma definitiva. Varias de ellas, sin duda, podrán todavía analizarse en superposición de teorías más generales; otras, son presentidas como equivalentes entre ellas o como derivando de una misma fuente. El análisis estructural de los hechos ya conocidos está lejos de haberse terminado, sin hablar del de los nuevos hechos que se manifiestan de vez en cuando.