El florecimiento del programa de Erlangen

Alberto Campos

Thomas Hawkins. 1982. "Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras". *Archive for history of exact sciences*. 26: 127-192.

________ 1984. "The Erlangen Programm of Felix Klein: Reflections on its place in the history of mathematic". *Historia Mathematica* 11: 422-470.

________ 1989. "Line geometry, differential equations and the birth of Lie's theory of groups". Contenido en *The history of modern mathematics. Ideas and their reception*. Editado por David Rowe y John McCleary. New York: Academic Press. Vol. I. Pp. 257-327.

Resumen

> Hay algo de verdad en esto de que muchas cosas tienen una época en la que pueden ser encontradas al mismo tiempo en diversos lugares, de la misma manera que las violetas florecen por todas partes en primavera.

Esto escribía Bolyai padre a Bolyai hijo, en 1823. No sólo las geometrías no euclidianas aparecieron en diversas latitudes. Se creyó que el programa de Erlangen era como una especie de torre aislada que se elevaba por encima de la investigación matemática corriente en el siglo XIX y que llegaría a convertirse en un faro posteriormente. Thomas Hawkins [1984] controvierte esta opinión aceptada y para desvirtuarla parece exagerar cuando aprecia la intención de algunos de los investigadores. En realidad, la idea básica de Klein depende esencialmente de la existencia de otras geometrías, como las no euclidianas, y puede ser que estuviera en el aire y que hubiera madurado poco más o menos durante los mismos años en la mente de diferentes matemáticos; pero, es de Klein el mérito de haberla enunciado magistralmente.

Bonola *Non-euclidean geometry* 1906 [Reprinted with supplements 1912] New York: Dover. Pp 99].

Not only non euclidean geometries appeared in different latitudes. It was a common opinion that the Erlanger Programm was a kind of isolated tower looming up above the mathematical research current in the nineteenth century and becoming subsequently a guiding light. Thomas Hawkins [1984] controverted this accepted opinion and, to detract from it, apparently goes too far when he evaluates the intention of some investigators. Actually, the Klein's basic idea depends essentially on the existence of other geometries, like the non euclidean geometries, and, perhaps, the idea was in the air, and thus matured, more or less at the same time, in different mathematical minds, but it was Klein's merit to enunciate it masterfully.

Introducción

Hacia los años 50 culmina una etapa de reformulación del lenguaje y de los métodos empleados en matemáticas, especialmente en geometría, tanto en la investigación como en la presentación de los resultados. El Programa de Erlangen [Klein 1872] es un episodio clave en este desenvolvimiento de la geometría, pero es igualmente importante para el de toda la matemática.

Substanciales artículos de Chern [1942, 1946, 1954, 1966] o de Ehresmann [1950, 1953], como son citados frecuentemente para ejemplificar la presentación más actual de la geometría diferencial [Akivis y Rosenfeld 1993], [Millman and Stehney 1973], [Vidal Abascal 1952], [Yaglom 1988]. Tales trabajos, empero, no son estelas conmemorativas de proezas aisladas, sino puntos culminantes de una ardua labor de predecesores.

Así, los artículos mencionados suponen los de Élie Cartan. Estos, a su vez, suponen los de Killing, Klein y Lie, los cuales tienen su apoyo en las geometrías no euclidianas. Las ideas cimeras de lo que se entiende por programa de Erlangen aparecerían fuera de contexto cedimiento de Descartes y de Fermat de valerse del álgebra enriquecida desde los árabes hasta Viète para resolver problemas de geometría que los griegos resolvían mediante una especie de álgebra de figuras [Campos 1994a]

En matemática, como en general donde hay evolución, es especialmente cierto que nada procede de nada: la presentación actual de la geometría no brota como un manantial de una fuente desconocida, sino que es un proceso. Intento visualizarlo mediante el cuadro sinóptico adjunto.

El Programa de Erlangen, en particular, es pensado y expuesto por Klein; Lie contribuye inicialmente en su concepción y luego con una espléndida realización, los grupos que llevan su nombre y que investigó durante toda su vida matemática.

Las geometrías no euclidianas y el problema de los fundamentos de la geometría

Finalmente aceptadas, después de resistencias superadas gracias inicialmente a Gauss (cuya correspondencia comenzó a ser publicada en la década del sesenta del siglo pasado) y luego a Beltrami y a Klein, las geometrías no euclidianas provocaron una reflexión particularmente intensa relativa a los fundamentos de la geometría.

Entre los tres temas para su Habilitationsvortrag propuestos por Riemann a Gauss, Gauss optó por aquel en el que se formulaba el problema de los fundamentos: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* [Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría. 1854. Publicado, póstumamente, en 1868] [Vidal Abascal 1958]. Según el parecer de Millman y Stehney [1973] y [Millman 1977], la geometría moderna surgió al separar Riemann el concepto de geometría del concepto de espacio. Estos son los términos de Riemann: "Como es bien sabido, la geometría supone el concepto de espacio así como los principios básicos para las construcciones en el espacio" [Vidal Abascal 1958].

un poco del primer planteamiento de Riemann y para que el problema fuera llamado de Helmholtz.

También Lie trabajó mucho en la cuestión. El trabajo de Lie fue tan importante que le mereció el Premio Lobachevski, instituido por la Universidad de Kazán para el primer centenario, 1896, del nacimiento del geómetra ruso.

Arthur Cayley entre 1854 y 1859, escribió seis memorias sobre polinomios algebraicos homogéneos (que llamaba 'quantics' o 'forms'). En febrero de 1870, Klein hizo una presentación del ensayo de Cayley en el seminario de Weierstrass en Berlín. Sugería, en particular, que el trabajo de Cayley podía estar relacionado con la geometría no euclidiana de Lobachevski, que Klein, por el momento, no conocía muy bien. El campeón del rigor, Weierstrass, criticó severamente a Klein por la presentación. Alguien con menos valor habría renunciado a ocuparse del tema para siempre, no Klein; allí mismo había conocido a Stolz, quien le suministró informes detallados tanto de la geometría de Lobachevski como de la de Bolyai [Hawkins 1980, Wussing 1984]. Con esa información, en particular, Klein comenzó a forjar su ensayo: *Ueber die sogenannte nichteuklidische Geometrie* [Sobre las así llamadas geometrías no euclidianas, 1871]. A pesar de la amplia visión de Klein acerca de los sistemas geométricos en el plano y en el espacio, el ensayo fue criticado incluso por el mismo Cayley. Constituyó, sin embargo, la base para las que luego fueron nominadas geometrías de Cayley-Klein [Yaglom 1979]. En 1887, Poincaré, sirviéndose de grupos de Lie, dio su enfoque del problema de Riemann-Helmholtz [Poincaré 1956].

Otro matemático, para quien el problema de los fundamentos fuera punto de partida de su investigación se llamó Wilhelm Killing, como su visión del problema lo lleva más allá de la idea básica del Programa de Erlangen y no simplemente a desarrollarla, será recordado más adelante.

Baste lo evocado someramente para darse cuenta de que tanto el problema de Riemann-Helmholtz como el de las geometrías no euclidianas, analíticos; por otra, Poncelet, Steiner y von Staudt como geómetras sintéticos. Según Bourbaki [1974] es el programa de Erlangen, precisamente, el que va a hacer caducar tales denominaciones.

Klein mismo fue alumno de Plücker y editor de la obra capital de éste *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* [Nueva geometría del espacio, basada sobre la consideración de la línea recta como elemento espacial]. Al morir Plücker, en 1868, Klein fue encargado de completar lo que Plücker no había terminado. Klein trabajó con Clebsch en Göttingen y se hizo una autoridad en geometría lineal de Plücker y en teoría de invariantes que había aprendido de Clebsch, uno de los maestros en la materia.

Desde fines de abril de 1870 hasta mediados de julio, Klein y Lie (se habían conocido a principios de año en Berlín), estuvieron en París, donde el contacto era Darboux; pero Jordan los interesó más. Dice Klein [1921]: "Camille Jordan me impresionó extraordinariamente. Su tratado de las substituciones y de las ecuaciones algebraicas era para mi un libro con siete sellos". Los dos viajeros se separaron rápidamente porque estalló la guerra franco prusiana en 1870. Klein volvió a Berlín. El problema que le preocupaba entonces era el de la dispersión de las corrientes investigativas en geometría: se proponía encontrar una manera de unificarlas. Entre 1871 y septiembre de 1872, hizo un intento con base en la teoría de invariantes.

Klein y Lie habían hecho y publicado investigaciones conjuntas. Especialmente importante fue el trabajo sobre las curvas W. Esta letra es la primera de la palabra alemana Wurf, que literalmente es el número de puntos en una echada de dados; pero que von Staudt usaba en el sentido de razón doble de 4 puntos sobre una recta, proyectivamente hablando.

El punto de partida de la investigación de Klein y Lie era sencillo. En el plano euclidiano las únicas curvas homogéneas, es decir, tales que ningún punto se distingue de los otros, son las rectas y las circunferencias. Para una línea recta hay un grupo de autosimetría, es "grupo completo de movimientos proyectivos a lo largo de sí misma" (donde en lugar de completo pudiera decirse transitivo).

Yaglom cree que la actividad científica entera tanto de Klein como de Lie se inspiró en esta indagación conjunta, efectuada antes del viaje a París [Yaglom 1988]. Presentaron 2 notas a la Academia de Ciencias, por intermedio de Chasles. Aparecieron como: F. Klein, et. S. Lie. "Sur une certaine famille de courbes et de surfaces". *C.R.A.S.* París. LXX. [1870]. 1222-1226, 1275-1279. Rowe 1989. Wussing 1984].

Para Lie fue importante punto de partida en cuanto estudio de subgrupos uniparamétricos de un grupo continuo, el de las transformaciones proyectivas. Era importante para Lie y para Klein en cuanto utilizaban la noción de transformación infinitesimal en la búsqueda de las curvas W. Para Klein era importante en cuanto enfoque, mediante un grupo de un determinado objeto de la geometría proyectiva; y en cuanto al objeto mismo, era caracterizado en términos de simetrías proyectivas. Se pone en relación una geometría, la proyectiva, y un grupo de simetrías.

Lie y Klein hicieron una publicación más sobre el tema, en *Mathematische Annalen*, 1871. IV: 50-84. *Ueber diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen* [Sobre las curvas planas aplicables en sí mismas mediante un sistema cerrado de infinitas transformaciones lineales permutables simples]. No aparece aún el término 'grupo' pero sí el de sistema cerrado, lo que indica que Klein y Lie están sobre el camino del Programa de Erlangen [Rowe 1989].

En esta publicación de 1871, Klein y Lie dan explicaciones en cuanto al método: se percatan de que están extendiendo la teoría de grupos por fuera del campo en que se le conoce entonces y desde Galois, es decir, las substituciones. Citan dos tratados bien conocidos: *Cours d'algèbre supérieure*, de Serret; y *Traité des substitutions et des équations algébriques*, de Camille Jordan. Señalan una 'profunda diferencia' con ellos: el paso de lo discreto a lo continuo. Hacen anomás tarde. La primera versión, según Klein, fue el artículo *Über die sogenannte nicht euklidische Geometrie*. Como la primera parte de este ensayo tiene fecha 19/VIII/1871 y la segunda 8/VI/1872, las ideas claves debieron de surgir entre las composiciones de las dos partes.

La segunda versión [1872], es la que se conoce como Programa de Erlangen. En realidad el título es: *Consideraciones comparativas de las nuevas investigaciones geométricas* [Klein 1872].

He aquí algunas ideas del Programa de Erlangen.

Klein distingue 'espacio' [Raum] de variedad o multiplicidad [Mannigfaltigkeit]: el primero es 'imagen física' [sinnliches Bild] de la geometría; la segunda es su forma abstracta [abstrakte Form]. Así, escribe Klein: "Siguiendo la analogía con las transformaciones del espacio, se habla de transformaciones de la variedad: éstas también forman grupo". Para decir algo de lo abstracto, la variedad, parte de lo concreto, el espacio.

Hay transformaciones del espacio que no alteran las propiedades geométricas de las figuras. Llámase grupo principal de transformaciones del espacio al conjunto de todas estas transformaciones. Las propiedades geométricas no son alteradas por las transformaciones del grupo principal. La recíproca es igualmente verdadera: las propiedades geométricas son caracterizadas por su invariación relativa a las transformaciones del grupo principal.

Esta es la idea cardinal del Programa de Erlangen en la terminología actual: Una geometría determina un grupo. Recíprocamente, un grupo determina una geometría. Por lo tanto, una geometría es una terna (V, G, I), en la que V es un conjunto no vacío, el de los elementos de base de la geometría; G es un grupo de transformaciones; I son las propiedades de los elementos de V, invariantes respecto de G. Por ejemplo, si V es el plano euclidiano bidimensional, G puede ser el grupo de las similitudes, es decir, de las transformaciones que no alteran los ángulos, pero sí las distancias; entre las propiedades I se encontrarán los teoremas de semejanza de triángulos. Un subgrupo, es el de las isometrías, las cuales conservan las distancias, a más de los ángulos.

La geometría proyectiva no nació sino cuando se volvió costumbre: considerar como enteramente idénticas a la figura primitiva y a todas aquellas que se obtienen de ella por proyección, y enunciar las propiedades proyectivas de tal manera que se ponga en evidencia su independencia respecto de las modificaciones causadas por la proyección; esto era lo mismo que tomar como base de consideraciones a el grupo de las transformaciones proyectivas. El grupo de las semejanzas es subgrupo del proyectivo: así la geometría de la semejanza resulta subordinada a la proyectiva. La subordinante es más general.

Se llega a la idea de las geometrías equivalentes. Dos geometrías aparentemente disímiles pueden resultar equivalentes si es posible exhibir una correspondencia inyectiva entre los elementos de cada geometría. Los grupos serán isomorfos.

Klein utilizaba en estos casos el llamado principio del transporte, se dice actualmente transporte de estructura. Mostrar que un determinado conjunto no vacío admite una estructura de variedad diferenciable no es otra cosa que mostrar que cada punto posee una vecindad, a la cual es posible transportar la estructura de espacio euclidiano.

En el texto del Programa de Erlangen, con una referencia a los tratados de Jordan y de Serret, Klein escribe que sería posible, por analogía, una teoría de transformaciones que permitiera tratar las variedades como aplicación de la teoría de las transformaciones.

A guisa de resumen puede aducirse el dictamen de Bourbaki [1974]: Es Klein quien viene a darse cuenta de que "los teoremas de la geometría clásica no son otra cosa que la expresión de relaciones idénticas entre invariantes y covariantes del grupo de las similitudes; los de geometría proyectiva expresan las identidades entre covariantes del grupo proyectivo. Es la tesis magistralmente expuesta por Félix Klein en el célebre *Programa de Erlangen*.

Estas son algunas ideas salientes del Programa de Erlangen, que, por haber entrado en las costumbres matemáticas, algunos podrían juzgar triviales, si no las sitúan apropiadamente en su contexto histórico [Rowe 1989]. Cuestión pertinente ahora es cómo fueron acogidas.

presentar en el seminario la relación entre los invariantes a la manera de Clebsch y Gordan, y la teoría de grupos de transformaciones, cometido que Study tomó tan a pecho que pasó el mes de enero de 1887 en Erlangen, donde estaba Gordan, con el fin de prepararse mejor

Study llegó a expresar sus convicciones en un lenguaje muy kleiniano, aunque sin querer tener que ver nada con Klein: Study, como Lie, cree que

> habrá pocos dominios de la ciencia matemática que no puedan llegar a vislumbrar algunas cuestiones esenciales, al introducir los conceptos fundamentales de la nueva disciplina. Principalmente, en dominios tan afines como el de las ecuaciones diferenciales y la geometría, acarrearán abundancia de enfoques y de temas [Hawkins 1984, 451]

El siguiente texto de Study [Hawkins 1984], contrapone inesperadamente a Leibniz y Grassmann, de una parte, con el Programa de Erlangen, de la otra; luego formula una tarea que concuerda con éste:

> Leibniz y Grassmann creían que se daría un cálculo tal que gracias a él podrían expresarse todas las proposiciones geométricas con igual sencillez y compleción. Hoy en día, podemos decir que esto no puede ser así, dado que las geometrías de grupos de transformaciones diferentes exigen medios [de expresión] diferentes. El problema será ahora crear especialmente para los grupos más importantes, sistemas algorítmicos apropiados, es decir, una teoría de invariantes

Alumno de Study fue Blaschke, quien alguna vez dijo que había pasado toda su vida tratando de desarrollar las consecuencias para la geometría diferencial del Programa de Erlangen. Hans Beck, otro estudiante de Study, escribió dos textos de acuerdo con el Programa de Erlangen.

Los geómetras italianos Gino Fano —tradujo el Programa al italiano por sugerencia de Conrado Segre—, Federico Enriques y Hugo Amaldi, son mencionados por Hawkins entre quienes se ajustaron a la idea de Klein, como Study, Blaschke o Beck, en sus pesquisiciones geométri-

Erlangen, de Klein, son meramente dos casos particulares) no provocó entusiasmo entre los matemáticos. Algunos, ya se anotó, como el mismo Cayley, no aceptaron los resultados de Klein (irónicamente inspirados por trabajos de Cayley), sospechaban que por esa vía kleiniana se llegaría a una contradicción.

El mismo Klein, en *Las así llamadas geometrías no euclidianas* [1871], y en una obra, publicada póstumamente en 1928, *Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie* [Lecciones sobre geometrías no euclidianas], no insistió en lo de nuevas geometrías, sino más bien en el hecho de que el nuevo punto de vista permitía ligar las geometrías elíptica e hiperbólica con la euclidiana, y establecer la no contradicción en cada una de ellas. Yaglom opina que este objetivo fue alcanzado: los geómetras no opusieron más resistencia a las nuevas geometrías. No se debe olvidar sin embargo, que ya en 1868 Beltrami había establecido la no contradictoriedad de las nuevas geometrías. Es este un primer punto en el que Klein parece apocar el alcance de su idea primordial. Hay otros, bien aprovechados por Hawkins.

En sus conferencias sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX, Klein había escrito que el Programa de Erlangen pertenecía a esa clase de escritos que "se proponen inspirar algo nuevo con el hecho de poner en orden lo que ya se tiene a la mano" [Hawkins 1984, 463].

Vorlesungen, de Klein, no se ocupa sino de las geometrías elíptica e hiperbólica. Generalmente, la literatura se refiere a estas geometrías cuando se habla de geometrías no euclidianas. El mismo Klein no se ocupó en calcular el número de geometrías cobijadas con la concepción nueva. Una clasificación la hizo el geómetra inglés Duncan Sommerville. Según se considere una de las tres maneras (parabólica, elíptica, hiperbólica) de medir una longitud sobre una línea y una de las tres maneras de medir ángulos en un haz, en el plano hay nueve geometrías, a saber, la euclidiana y ocho más. Una exposición es la de Yaglom [1979]. Hay veintisiete geometrías Cayley-Klein en tres dicontraria el parecer escrito en diversas fuentes. Antes de estudiar la tesis de Hawkins, conviene aludir a la repercusión del Programa de Klein en la enseñanza de la geometría. En el seminario internacional de Royaumont [1959, "New thinking in school mathematics"] parece haber habido consenso en el sentido de que el Programa de Erlangen era tan conocido en el terreno de la investigación como desconocido (salvo en Alemania) en los cursos de geometría. Y no es que haya faltado quien suministre propósitos claramente enunciados; para muestra este de Thomsen en 1933:

> De lo que se trata es de convertir el cálculo de grupos en un instrumento tan perfecto que aparezca como un rival de la geometría analítica cartesiana [Campos 1981].

Sobra decir que ésta no es una tarea fácil. Es pertinente recordar la nota pesimista de Coxeter en la presentación que hace del Programa de Erlangen [Klein 1872], según la cual, su texto original es no muy conocido, pero sí muy discutido. Tesis de Hawkins [1984]:

> Es aceptado generalmente que el Programa de Erlangen de Klein fue una de las obras más significativas y de mayor influencia en la historia de la matemática durante el medio siglo que siguió a su publicación en 1872. Pongo en duda tal aserción.

Hawkins trata entonces de establecer

H1. El Programa de Erlangen permaneció desconocido durante los veinte años que siguieron a su publicación.

H2. En este mismo periodo algunos matemáticos (*i.e.*, Poincaré, Killing, Study) llegaron a ideas comparables y que fueron tenidas más en cuenta.

H3. Es imposible desenredar la influencia del Programa de Erlangen de la influencia de la escuela matemática creada por Lie en Leipzig, con una sucursal en París aseveraciones acerca de la relación entre su personal proyecto de investigacion y el Programa de Klein, las cuales podrían estar inspiradas en la antipatía que llegó a sentir por Klein o en su peculiar manera de ser que, por ejemplo, no placía a Hilbert [Hawkins 1984, 465, cita la biografía de Hilbert, de Reid]. En efecto, Study a los veintitrés años (1886) presentó su Habilitationsschrift con la asesoría de Klein, como ya se anotó; cuando en 1892 Klein echó en cara a Study el exponer como propias ideas explicitadas en el Programa de Erlangen, Study respondió que él mismo las había expuesto antes a Klein, sin que él las relacionara con el Programa. ¿Sería posible que Study, no sólo en el ambiente de Klein, si no bajo su dirección, nunca hubiera oído hablar de los grandes principios allí expuestos? La experiencia de cada graduando con su asesor investigativo, es aceptable como un primer argumento para una respuesta negativa.

Hawkins compendia la tesis del Programa de Erlangen, así: Las diversas investigaciones geométricas emprendidas durante el siglo XIX pueden ser unificadas y clasificadas al considerar la geometría como el estudio de aquellas propiedades de configuraciones sobre una variedad que son invariantes respecto de un grupo subyacente de transformaciones.

Hawkins pone en tela de juicio la anotación de Klein en su Autobiografía [1923], según la cual el Programa de Erlangen fue el mayor principio guía para la investigación subsiguiente. Esto se debe, afirma Hawkins, a que Klein enfoca el Programa de Erlangen con una luz muy amplia: el concepto de grupo es un principio unificador para toda la matemática. Esta visión no se atiene al hecho histórico de lo expresado en el Programa de Erlangen, sino que es una visión retrospectiva en cuanto al alcance para toda la matemática de lo que fué el Programa para la geometría; y en tal caso, ya no es solamente idea de Klein. Había otros matemáticos que incubaban los mismos pensamientos.

Otro grande, Poincaré, había quedado impresionado, tanto como Klein y Lie, por el "Traité de substitutions et des équations algébriques, Quien sí se dedicó eficazmente a la realización de la idea de que el concepto de grupo es un principio de explicación y de unificación fue Sophus Lie. Hawkins asevera que fue Lie quien le dio forma a tal idea; de modo que la situación comenzó a cambiar con las publicaciones de Lie. Lie proveyó el contexto matemático apropiado para el desenvolvimiento de las ideas del Programa de Erlangen. Fueron los avances de Lie en investigación, dice Hawkins, los que movieron a Klein a profundizar en el estudio del grupo de los poliedros regulares como principio de explicación para la resolución de ecuaciones. Y solamente después de publicados los tres volúmenes de Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, hizo Klein la reedición del Programa de Erlangen. Es el mismo Klein quien escribe en 1892:

> Mi Programa de 1872, como publicación separada, ha tenido una limitada circulación. Podría estar satisfecho de ello tanto más cuanto que de los enfoques desarrollados en el Programa pudo no esperarse que llamarían mucho la atención. Pero ahora, cuando el desarrollo general de la matemática ha tomado, entretanto, la dirección correspondiente precisamente a tales enfoques, y, especialmente, desde que Lie comenzó a publicar de manera extensa su *Theorie der Transformationsgruppen*, me parece conveniente dar una circulación más amplia a la exposición de mi Programa.

Curiosamente aparecieron, sólo entonces, traducciones al italiano en 1890, al francés en 1891 y al inglés en 1893. Fue en este mismo año cuando el Programa apareció en el volumen 43 de *Mathematische Annalen*, 460-497. Klein lo adicionó con notas. Durante el año académico 1892-1893, Klein hizo conferencias en las que expuso contenidos del Programa.

En 1907, fue incluido el tema de la teoría de grupos como principio clasificatorio en geometría, en la célebre *Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften*, en un artículo redactado por Gino Fano y complementado al ser adaptado al francés, por Cartan. [1984, III/2, 1727-1861]. Hawkins insiste en que, aunque Fano conocía bien el Programa de Erlangen, sin embargo, su artículo está más inspirado en Lie

Klein y Lie trabajaron con frecuencia conjuntamente en los tres años precedentes al Programa, y, como se mencionó, hicieron publicaciones conjuntas sobre temas pertinentes. Según Yaglom [1988, 229], el primero de septiembre de 1872 Lie llegó a Göttingen, por invitación de Klein, quien trabajaba en la redacción del Programa (pronunciado en el octubre siguiente). Klein había escrito: "métodos geométricos diferentes, generados por grupos diferentes"; es Klein mismo quien relata que tal expresión fué substituida, por iniciativa de Lie, por esta otra, quintaesencia de lo que se entiende por Programa de Erlangen: 'geometrías diferentes, generadas por grupos de transformaciones diferentes'. Parece no haber habido acuerdo después, ni en la parte de cada uno, ni en la conjunta. El Programa de Erlangen era lo suficientemente panorámico como para cobijar los grupos continuos; así consta en las observaciones finales del texto. Pero, en 1879 cuando Lie hace un repertorio de publicaciones anteriores a 1874 con ideas atinentes a grupos de transformaciones, no da al Programa de Erlangen el énfasis que Klein esperaba. Ante el reclamo de éste, Lie responde que estima el Programa de Erlangen y que le ha servido de estímulo.

> Pero, por otra parte, debe estar claro que en su ensayo no está puesto el problema de determinar todos los grupos, probablemente porque entonces tal problema parecía a usted absurdo o imposible, como lo era para mí [...] Su ensayo no sugería medios para resolver mi problema, por lo menos no más de los que eran conocidos antes [Hawkins 1989, 309, 331]

En 1891 Lie escribió que el Programa de Erlangen era obra conjunta, es decir, de él y de Klein. Pero, en 1921 Klein insistía en la personal pertenencia del Programa. La conclusión de Hawkins es que parece razonable pensar que la idea de valerse de grupos continuos de transformaciones y de las transformaciones infinitesimales asociadas, en investigaciones geométricas, era obra de Lie. Pero que la idea de valerse de grupos de transformaciones para clasificar sistemáticamente las teorías geométricas existentes era de Klein y fue realizada por Klein.

formaciones provenía del que dispensaba en profundidad a las ecuaciones diferenciales en el espíritu geométrico de Monge. Era así como se había impuesto el proyecto de su vida: una teoría análoga a la de Galois, pero para las ecuaciones diferenciales [Hawkins 1989, Campos 1993, Lie 1895]. Klein, en cambio, no estaba motivado tan monolíticamente: dispensó su atención investigativa a diferentes problemas.

Consta, por la correspondencia, que Klein y Lie entrevieron claramente qué significaba el reto de extender la teoría de grupos del caso discreto al caso continuo: en el horizonte, la clasificación de todos los subgrupos de un grupo. Sin embargo, uno de los dos, Lie, cambia del parecer adverso inicial en el otoño de 1873 y se siente movido a emprenderla. ¿Qué había pasado a Lie y no a Klein? Lie había logrado determinar todos los grupos de transformaciones en una variable. Era un caso sencillo, pero él lo había logrado mediante la utilización de lo que hoy llamamos álgebras de Lie, conformadas por las que Lie llamaba, y por deferencia con Lie son llamadas aún con frecuencia, transformaciones infinitesimales del grupo.

Es la intuición genial de Lie. Resolver problemas de análisis mediante procedimientos del álgebra; más aún de álgebra lineal. Lie se dedica con ahínco extraordinario a explotar a fondo su idea; los resultados son abundantes y lo son igualmente las publicaciones. Y todo tiene el mismo esquema, estudio de problemas de geometría, referentes generalmente a ecuaciones diferenciales, mediante grupos. Una realización incontestable de la idea básica del Programa de Erlangen [Hawkins 1984, Campos 1993].

Algunos otros matemáticos habían alcanzado la idea básica del Programa de Erlangen

Escribía Farkas Bolyai a su hijo Janos, uno de los creadores de la geometría no euclidiana:

> Hay algo de verdad en esto de que muchas cosas tienen una época en la

Hay un párrafo de Chasles destacado por Bourbaki [1974]:

> Hoy en día, cualquiera puede presentarse, tomar una verdad conocida cualquiera, y someterla a los diversos principios generales de transformación; sacará de ahí otras verdades, diferentes o más generales; y con éstas, podrá iterar el procedimiento; de suerte que podrá multiplicar, casi indefinidamente, el número de nuevas verdades deducidas de la primera [...] Así puede quien quiera, en el estado actual de la ciencia, generalizar y crear en geometría; el genio ya no es indispensable para añadir una piedra al edificio.

Lo curioso es que estas apreciaciones del geómetra Chasles son de 1837, cuando Cayley tenía apenas 16 años y Klein no había nacido todavía.

La geometría en el lenguaje de las transformaciones había sido puesta en circulación, principalmente por obra de Poncelet. Lo que falta en la aseveración de Chasles es lo referente a grupos, y por allí mismo, la idea de geometrías equivalentes; esa carencia, supongo, permite a Chasles pensar que haya 'verdades' que se multiplican casi indefinidamente.

Otros distinguidos matemáticos, poco más o menos coetáneos de Klein y Lie, resultan pregonando ideas parecidas a la del Programa de Erlangen, antes de conocer publicaciones de Klein o de Lie.

Poincaré manifestó a Lie en París, 1882, que no conocía el Programa de Klein. Pero, las ideas centrales de Klein eran convicciones de Poincaré para la teoría y la práctica de la geometría. Hace una de las formulaciones más elocuentes del principio fundamental del Programa de Klein (1880), cuando escribe que la geometría es 'el estudio del grupo de operaciones formado por los desplazamientos a los que podemos someter una figura con la condición de que no se deforme'.

Tanto Poincaré como Emile Picard se entusiasmaron con la teoría de Lie. Ambos contribuyeron a su difusión, tanto con los medios académicos a su disposición, como mediante la utilización de los grupos de Lie en el estudio de problemas de ecuaciones diferenciales. En parespecializarse en la nueva teoría. En particular, a los dos primeros se debe que la palabra alemana 'Zusammensetzung' [composición, combinación] haya sido vertida al francés como 'structure' que, luego, Cartan consagraría definitivamente [Hawkins 1982, 162], y que con Bourbaki se extendería por toda la matemática.

Desbordamiento del Programa de Erlangen

Así, pues, los geómetras (ver un poco más adelante la cita de Cartan de 1927) ajustaron su investigación a la letra del Programa de Klein. Sin embargo, investigaciones muy importantes culminaron en resultados no encajables en él. Se requería cobijar tales teorías, si ello era posible, ateniéndose al espíritu del Programa de Erlangen.

Dos personajes tienen a este respecto una importancia capital: Killing y Cartan.

Wilhelm Killing, doctorado con Weierstrass en 1872, participó luego en el seminario organizado por Weierstrass acerca de las geometrías no euclidianas. La contribución de Killing a la matemática consiste en las respuestas que alcanzó a dar a cuestiones sobre los fundamentos de la geometría, surgidas durante su participación en el seminario de Weierstrass a la luz del problema de Riemann-Helmholtz.

El filósofo Kant había tenido un presentimiento genial, al que desafortunadamente no dio curso en su sistema. Escribió Kant en 1747: "Una ciencia de todos los espacios posibles sería indudablemente la geometría más elevada que un entendimiento finito pueda concebir" [Campos 1994b, 676].

En 1884, Killing diseñó un programa de investigación acerca de la extensión del concepto de espacio, llamado Programa de Braunsberg [Erweiterung des Raumbegriffes, Programm Braunsberg, 1884]. Killing se proponía hacer una clasificación sistemática y exhaustiva de todas las 'formas de espacio' posibles, dicho así no parece tener relación con la concepción de Klein y Lie. Cuando se ve que las formas de espacio de Killing corresponden de alguna manera a las álgebras de por Killing, vale la pena mencionar el detalle anotado por Dieudonné en la nota obituaria de Charles Ehresmann, fallecido el veintidós de septiembre de 1979: "Desde antes de 1940, Ehresmann soñaba con una teoría abstracta de todas las especies posibles de estructuras, lo cual provocó algunas resistencias en el seno del grupo Bourbaki". Sin embargo, ¿no es la concepción de la matemática que rezuma de la obra de Bourbaki?

Killing tampoco tuvo buenas relaciones con Lie, aunque fue Killing quien inició un desarrollo indispensable para la teoría de Lie. Pero Killing mantuvo en cambio una fructífera correspondencia con Engel, alumno de Lie. Engel animó siempre a Killing, especialmente, lo alentó en su difícil trabajo de la clasificación de ciertas estructuras llamadas simples. El resultado fue un extenso artículo distribuido en 4 números del *Mathematische Annalen* (1888-1890) [Hawkins 1980, 1982, 1984].

El hecho es que hacia 1892, Cartan andaba a la búsqueda de un tema para su tesis. Tresse, uno de los matemáticos franceses que había estado en Leipzig, puso a Cartan al tanto del trabajo de Killing, que Tresse había conocido por Engel, en el cual ya se habían advertido bastantes imprecisiones. La tesis de Cartan [1894], consistió en desenvolver el plan de Killing [Cartan 1984, I, 137-287].

También Cartan reformula el problema con cuantificadores universales. 'Encontrar todas las estructuras posibles de grupos con un número cualquiera de parámetros'. Desde luego, Cartan no se contentó con suplir las carencias, sino que logró resultados espectaculares, que por cierto, recalcaron en la parte abstracta de la teoría de Lie e hicieron olvidar durante unos 60 años su aplicación a las ecuaciones diferenciales. Killing, prácticamente, no volvió a ocuparse de su proyecto, pues, Cartan lo había hecho propio [Helgason 1990].

Ni Killing, ni Cartan se habían propuesto desarrollar el Programa de Erlangen. Killing no intentaba explícitamente aventajarlo, sino que acertó a formular un problema que contenía implícitamente un aventajamiento. Por el contrario, Cartan sintió la necesidad de rebasar el pensamiento de Klein, que resultaba estrecho para los problemas que francés declara que el Programa de Klein es un hecho; éstos son:

1924. Les récentes généralisations de la notion d'espace. 863-889. Partie III.1. [Cartan 1984].

1924. La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle. 891-904. Partie III.1. [Cartan 1984].

1927. La théorie des groupes et la géométrie. 841-866. Partie I. [Cartan 1984].

1927. Rapport sur le mémoire de J.A. Schouten, intitulé *Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie*. 1099-1104. Partie III.2. [Cartan 1984].

1936. Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne. 1373-1384. Partie III.2. [Cartan 1984].

Cito las primeras líneas del tercero de estos trabajos:

> Aunque la puesta en evidencia de las relaciones entre la teoría de grupos y la geometría no tenga más de medio siglo, no hay matemático que ignore la influencia profunda ejercida sobre el desarrollo de la geometría por las ideas sistemáticamente activadas en 1872 en el célebre Programa de Erlangen, de Felix Klein. Así, pues, no abrigo la intención de volver sobre estas ideas, que ahora forman parte del patrimonio común de todos los matemáticos

La idea de Cartan es claramente opuesta a la tesis que Hawkins intenta sentar. Ahora bien, Cartan no sólo conocía muy bien la obra de Lie sino que además está en primera línea entre cuantos contribuyeron a su desarrollo. Cartan, el mayor geómetra diferencial del siglo XX, estuvo profundamente compenetrado con la tendencia que concibe a la geometría a través de las transformaciones, es decir, Cartan conoce a fondo tanto la obra de Lie como la de Klein; así, pues, cuando atribuye a Klein y no a Lie, la paternidad de la idea que él mismo llevó hasta un punto culminante, da una opinión con más ponderación y sindéresis que la de Hawkins, excelente historiador, pero no geómetra en el sentido eminente en que lo es E. Cartan.

En diversas memorias técnicas fundamentales, Cartan detalla su método para ampliar el Programa de Erlangen. En ellos está en cierne la teoría de las conexiones en un espacio fibrado diferenciable [Akivis and Rosenfeld 1993, Millman y Stehney 1973, Yaglom 1988]

Conclusiones

La idea, subrayada por Hawkins, es que los geómetras que se guiaron por la idea de que hacer geometría es aplicar un grupo, trabajaron influenciados por Lie o por estudiosos de la escuela de Lie más que por Klein o por estudiosos de Klein, aunque todos contribuyeron al desarrollo de la idea de Klein

Se puede estar de acuerdo con Hawkins en que la idea de hacer geometría mediante grupos es todo un movimiento en la evolución de la geometría. La idea aparece en un artículo de Cayley en 1859. Un poco antes de 1870, Klein y Lie la explotan conjuntamente. Klein le da carta de ciudadanía en el Programa de Erlangen. Klein y Lie se dividen luego, en la práctica, el reino de la geometría. Klein hace aplicaciones de su Programa referentes a grupos discretos.

Lie consagra el resto de su vida exclusivamente al estudio de los grupos continuos; su investigación abarca, desde luego, problemas muy variados, lo cual ocasionará el enriquecimiento de la teoría; situaciones muy diversas lo obligan a construir más y mejores teorías. podrá decirse que es Lie quien da forma de este modo a la idea enunciada por Klein

Otros geómetras cultivan el estudio de la geometría mediante grupos dentro (ver, por ejemplo, el extenso estudio de Freudenthal [1965]) o fuera de la corriente de ideas de Klein y Lie

Killing enuncia un problema muy general que pudo resolver en alguna parte.

Cartan extiende extraordinariamente el estudio de la geometría mediante grupos de transformaciones. De las seminales ideas de Cartan saldrán específicamente la teoría de los espacios fibrados y las conexiones infinitesimales en un espacio fibrado diferenciable, en la terminología tuidos apropiadamente por conjuntos y por estructuras según designio determinado. Bourbaki hace una presentación rigurosamente axiomática de las complejas estructuras resultantes al combinar los axiomas a la manera de Hilbert.

Referencias

AKIVIS, M.A. y ROSENFELD, B.A. 1993. *Élie Cartan (1869-1951)*. Providence, Rhode Island: Translations of *Mathematical Monographs*, Volume 123, AMS, xii + 317 pp (original ruso: 1990).

BOURBAKI, Nicolas. 1974. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann. 379 pp.

CAMPOS, Alberto. 1981. *La educación geométrica*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. 248 pp.

__________. 1993. *El surgimiento de la teoría de grupos de Lie de transformaciones según Thomas Hawkins*. Bogotá: X Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. ii + 45 pp.

__________. 1994a. *Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides*. Bogotá: Alberto Campos. xvi + 600 pp.

__________. 1994b. *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá: Alberto Campos. vi + 717 pp.

CARTAN, Élie. 1984. *Oeuvres complètes*. Paris: Centre National de la Recherche Scientifique. Springer-Verlag. Partie I: xxx + 1356 pp. Partie II: xiii + 1384 pp. Partie III.1: xvi + pp 1-992. Partie III.2: xvi + pp 993-1955.

COLEMAN, A. John. 1989. "The greatest mathematical paper of all time". *The Mathematical Intelligencer*. XI: 29-38.

CHERN, S.S. 1942. "On integral geometry in Klein spaces". *Annals of Mathematics*. 43: 178-189. [Shiing-shen Chern. *Selected Papers*. 1978. New York: Springer-Verlag. xix + 476 pp.]

________. 1946. "Some new viewpoints in the differential geometry in the large". *Bulletin of the American Mathematical Society*. 52: 1-30.

________. 1954. "Pseudo-groupes continus infinis". *Géométrie différentielle*. Paris: Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique. 119-136. [S.S. Chern. 1978. *Selected Papers*. New York: Springer-Verlag. xix + 476 pp. 199-216].

________. 1966. "The geometry of G-structures". *Bulletin of the American Mathematical Society*. 62: 167-219. [S.S. Chern 1978. *Selected Papers* II: 23-75].

EHRESMANN, Charles. 1950. "Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable". *Colloque de Topologie*. Bruxelles. pp 29-55. [CHARLES. Ehresmann. 1984. *Oeuvres Complètes et commentées*. Amiens: Imprimerie Evrard. Volume II et I2. 179-205].

________. 1953. "Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des place in the history of mathematics''. *Historia Mathematica* 11: 442-470.

________________. 1989. ''Line geometry, differential equations and the birth of Lie's theory of groups''. *The history of modern mathematics. Ideas and their reception*. Editado por David Rowe y John McCleary. New York: Academic Press 1: 257-327.

HELGASON, Sigurdur. 1990. ''A Centennial: Wilhelm Killing and the exceptional groups''. *The Mathematical Intelligencer* 12: 54-57.

KLEIN, Felix. *Le Programme d'Erlangen. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. Préface de J. Dieudonné. Postface de F. Russo*. 1974. Paris: Gauthier-Villars éditeur. xiv + 72 pp.

1977. ''KLEIN Felix. The Erlangen Program''. *The Mathematical Intelligencer* 0: 21-30.

LIE, Sophus. 1895. ''Influence de Galois sur le developpment des mathématiques''. Le centenaire de l'Ecole Normale 1795-1895. Contenido en: Evariste Galois. *Oeuvres mathématiques*. Reimpressions (pp. 381-444. *Journal de Liouville*. 11. 1846) de Jacques Gabay. 1989. Sceaux. (France). pp 1-9.

MILLMAN, Richard y STEHNEY, Ann. 1973. ''The geometry of connections''. *The American Mathematical Monthly* 80: 475-500.

MILLMAN, Richard. 1977. ''Kleinian transformation geometry''. *The American Mathematical Monthly* May: 338-349.

POINCARÉ, Henri. 1887. ''Sur les Hypothèses fondamentales de la géométrie''. *Bulletin de la Société Mathématique de France*. 15: 203-216. (Henri Poincaré. 1956. *Oeuvres*. XI: 79-91).

ROWE, David E. 1989. ''The early geometrical works of Sophus Lie and Felix Klein''. *The history of modern mathematics. Ideas and their reception*. Editado por David Rowe y John McCleary. New York: Academic Press 1: 209-273.

VIDAL ABASCAL, E. 1952. ''Concepto de geometría y espacio geométrico. Revisión del Programa de Erlangen''. *Revista Matemática Hispano Americana* 12: 3-6.

________________. 1958. *Estado actual, métodos y problemas de la geometría diferencial. Apéndice: Traducción de la memoria póstuma de B. Riemann*. Madrid: Instituto Jorge Juan. 111 pp.

WUSSING, Hans. 1984. *The genesis of the abstract group concept*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press. 331 pp.

YAGLOM, Isaak Moiseevich. 1979. *A simple non euclidean geometry and its physical basis*. New York: Springer-Verlag. xviii + 307 pp.

________________. 1988. *Felix Klein and Sophus Lie. Evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century*. Boston. USA: Birkhäuser. ix + 237pp.

Universidad de París. Tesis dirigida por Charles Ehresmann: "Problema de equivalencia de ecuaciones diferenciales ordinarias por transformaciones de contacto". Profesor en la Universidad Nacional de Bogotá. Áreas de interés: Enseñanza, Filosofía, historia de la matemática. Estudio de ecuaciones diferenciales mediante grupos de Lie.