El nacimiento de la teoría de los números cardinales transfinitos

Carlos Álvarez J.

En 1892 G. Cantor publicó un pequeño artículo cuya finalidad era dar una nueva demostración de que la potencia del conjunto de números reales es mayor que la potencia del conjunto de números enteros positivos. La novedad del artículo consistía en la generalización que el nuevo método permitía para probar las desigualdades de las potencias de dos conjuntos. El *método de diagonalización* que Cantor introdujo en 1892 permite establecer, en general, que la potencia de un conjunto es siempre menor que la del conjunto de todos sus subconjuntos, resultado clásico en la teoría de los conjuntos.

En cierto sentido, la nueva demostración sigue el procedimiento utilizado ya en 1873, a saber, dada una sucesión numerable de números reales, se encuentra un número real que no pertenece a la sucesión.

La prueba de 1873 consistía en mostrar la imposibilidad de que una sucesión infinita pudiera contener a todos los números de un intervalo $(a, \ldots b)$, al tomar la sucesión de los intervalos anidados cuyos extremos se definen como los elementos de la sucesión de números reales con la propiedad de ser los que poseen los dos números naturales mínimos como sus índices y que se encuentran en el intervalo definido anteriormente con el mismo procedimiento. En otras palabras, si $(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ es una sucesión de números reales y $(a, \ldots, b)$ un intervalo de números reales, sean α y β los dos primeros miembros de la sucesión que pertenecen al intervalo. Del mismo modo se eligen a α' y β' los dos primeros términos de la sucesión que pertenecen a $(\alpha, \ldots, \beta)$. Se tiene que: $a < \alpha < \alpha' < \beta' < \beta < b$. Al seguir el mismo procedimiento se obtiene una sucesión creciente de números reales $(a, \alpha, \alpha', \ldots)$ que es una subsucesión $(u_{k1}, u_{k2}, \ldots, u_{kn}, \ldots)$ de la original, cuyo índice k es creciente. Por su parte los números b, β, β', ... forman una subsucesión decreciente. En la sucesión de intervalos que se generan, cada uno de ellos contiene el siguiente, por lo que dos casos se pueden presentar: o bien sólo se generan un número finito de intervalos y $(\alpha^n, \ldots, \beta^n)$ es el último de ellos, o bien hay una infinidad de intervalos. En el primer caso cualquier nmero $\tau \varepsilon (\alpha^n, \ldots, \beta^n)$ no pertenece a la sucesión original. En el segundo caso, las respectivas subsucesiones creciente y decreciente definen elementos α^- y β^- con $\alpha^- \leqq \beta$. En el caso de la igualdad, el número $\tau = \alpha^- = \beta^-$ no pertenece a la sucesión pues de lo contrario $\tau = u_g$ pertenece a todos los intervalos definidos; pero es claro de la definición de los subintervalos que u_g no pertenece al intervalo $(\alpha^g, \ldots, \beta^g)$. Por otro lado, si son distintos, no hay términos de la sucesión en el intervalo $(\alpha^-, \ldots, \beta^-)$.[1]

Este resultado constituyó el primer ejemplo de que para dos conjuntos infinitos, una correspondencia biunívoca entre sus respectivos elementos no siempre es posible. Por otro lado, el resultado encontrado en el mismo año de 1873 y que establece que la correspondencia deseada sí existe entre los números enteros positivos y el sistema de todos los números algebraicos, despierta de inmediato el interés de Cantor por encontrar una clasificación entre los distintos conjuntos infinitos de puntos.

Estos trabajos lo llevaron a resolver, en 1877, el problema que le plantearía a Dedekind apenas en 1874, poco después de haber descubierto las propiedades del conjunto de números reales y las del conjunto de números algebraicos.[2] Su artículo de 1877, *Una contribución a la teoría de los conjuntos* introduce la noción de *potencia* de un conjunto: dos conjuntos M y N *tienen la misma potencia* si es que una correspondencia biunívoca entre sus elementos existe. Si la correspondencia sólo existe entre N y un subconjunto M' de M, entonces la potencia de N es *menor* que la de

[1] Esta prueba fue dada por Cantor en su artículo *Sobre una propiedad de los números algebraicos* y es, de hecho una prueba más sencilla que la original expuesta a Dedekind en una carta fechada el 7 de diciembre de 1873. Otra prueba del mismo resultado, muy parecida a la que hemos expuesto, aparece en la memoria sobre *Los conjuntos infinitos y lineales de puntos*.

[2] El 5 de enero de 1874 Cantor le envía a Dedekind una carta en la que le plantea el siguiente problema: "¿es que una superfice puede colocarse en relación unívoca con una curva, de modo que a cada punto de la superfcie le corresponda un punto de la curva?".

M. Con esta primera definición procede a enunciar el teorema central:

> Sean $x_1, x_2, \ldots x_n$ n magnitudes reales, variables, independientes la una de la otra, donde cada una puede tomar cualquier valor $\geqq 0$ y $\leqq 1$, y sea τ una variable real comprendida entre los mismos límites $(0 \leqq$ y $\geqq 1)$. Se puede hacer corresponder esta magnitud τ al sistema de la n magnitudes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de modo que a cada valor determinado de τ pertenece un sistema de valores determinados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y viceversa, a cada sistema de valores determinado $x_1, x_2, \ldots, x_n$, un cierto valor de τ.

Como consecuencia de este teorema Cantor enuncia:

> Se pueden hacer corresponder de un modo completo y en sentido único un conjunto continuo de n dimensiones a un conjunto continuo de una sola dimensión; dos conjuntos continuos, el uno de dimensión n y el otro de dimensión m tienen la misma potencia; los elementos de un conjunto continuo de n dimensiones pueden determinarse en sentido único por una sola coordenada τ continua y real; pero pueden también determinarse en sentido único por un sistema de n coordenadas continuas $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$.

Este sorprendente resultado le lleva a conjeturar que entre los conjuntos infinitos de puntos existen sólo dos potencias posibles: la de aquellos conjuntos que pueden ser colocados en una serie infinita, como el conjunto de números algebraicos o el de los números racionales, y la potencia de los conjuntos continuos. Además, estas dos potencias podían mostrarse en un conjunto continuo lineal; es decir, todo subconjunto infinito de un conjunto continuo lineal era equipotente al mismo, o bien era equipotente al conjunto de números enteros positivos.

Con la convicción en esta hipótesis, Cantor centró desde entonces sus estudios en torno a los conjuntos infinitos y lineales de puntos, con la seguridad de que en ellos se encontraban las dos únicas potencias infinitas para los conjuntos de puntos.

El resultado de estos trabajos fue la teoría de los números transfinitos, publicada por primera vez en el artículo *Fundamentos para una teoría general de los conjuntos,* la cual descansaba sobre un principio del cual Cantor no tenía la menor duda: todo conjunto (aún un conjunto infinito) puede ser bien ordenado. La idea de Cantor era simple: el conjunto de números enteros positivos constituye la potencia infinita más pequeña, en el sentido de que cualquier conjunto infinito tiene un subconjunto equipotente a él. Ello quiere decir que los números enteros positivos constituyen la *primera clase de números,* cuya principal característica es que son todos números finitos. Siguen a estos números finitos los números *transfinitos* con la propiedad de poder *numerar* a los conjuntos equipotentes a toda la clase I (es decir, a los conjuntos infinitos numerables). Cantor encuentra que estos números transfinitos forman a su vez un conjunto (la clase II) cuya potencia es *inmediatamente mayor* que la potencia de la clase I.[3] El procedimiento continúa al definir una nueva clase de números (la clase III) con la propiedad de ser los que *numeran* a los conjuntos equipotentes a la clase II y cuya potencia es *inmediatamente superior* a la de la clase II. La continuación de este procedimiento permitiría encontrar una sucesión infinita de potencias infinitas distintas (una por cada clase de números) lo cual generaliza los resultados encontrados al analizar los conjuntos infinitos de puntos.[4]

Si bien es cierto que a partir de 1882, en que nace la teoría de números transfinitos, las potencias infinitas forman una serie infinita creciente, su generación siempre está sujeta a la generación de la clase de números respectiva. Las distintas clases de números son conjuntos que definen distintas potencias infinitas.

El texto de 1892 presenta así un método que no sólo generaliza la prueba de 1873 sobre la diferencia de las potencias de los números enteros positivos y los números reales, sino que *de manera independiente* a la teoría de números transfinitos y sus clases, define un método de generación de potencias infinitas. Pero lo que resulta sorprendente son las consecuencias que Cantor extrae de su nuevo método: el que se trate de un nuevo procedimiento para la generación de potencias de conjuntos, no supone que éste contradiga a los resultados encontrados previamente en la teoría de números transfinitos. A partir del nuevo método de diagonalización, Cantor asegura que las potencias de los con-

[3] En el sentido de que todo subconjunto infinito de la clase II tiene la potencia de la clase I o es equipotente a la propia clase II.

[4] Para Cantor la generalización era inmediata pues desde el primer artículo en el que presenta a sus números transfinitos, establece que la potencia de un conjunto *continuo* (en particular el conjunto de números reales) es la misma que la de la clase II. Esta afirmación constituye la formulación original de la *hipótesis del continuo.*

juntos infinitos constituyen la generalización de los números cardinales finitos. Desde este momento, y de manera paralela a la teoría de los números (ordinales) transfinitos ya existente, es posible pensar en una nueva clase de números infinitos que constituyan la generalización a la idea de *cantidad,* tal y como ésta funciona, de manera idéntica a la idea de numeración, para los números finitos. Con ello la teoría cantoreana del infinito alcanza su formulación completa: los dos conceptos que se identifican en el caso de los conjuntos finitos, la *numeración* de sus elementos y la *cantidad* de los mismos, y que se reflejan con los números finitos, se separan necesariamente en los conjuntos infinitos; a la idea de numeración corresponderán los números ordinales transfinitos y a la idea de cantidad corresponderán las potencias de los conjuntos. Esto será posible dada su ordenación en una serie infinita (bien ordenada) y dado el método, autónomo, de generación de las mismas que se ha encontrado.

Los últimos años de su vida, Cantor los dedicó a la elaboración de su nueva teoría de números cardinales transfinitos (o *alefs*) y a establecer su relación con la teoría de números ordinales transfinitos. Ambas completaban una teoría matemática del infinito, teoría que Hilbert llamaba el "paraíso cantoreano", la creación más asombrosa del pensamiento matemático.