Las matemáticas griegas y la construcción euclidiana del pentagóno regular

Asger Aaboe,

1. *Fuentes*

Las dificultades que se nos presentan cuando queremos establecer una sólida base de textos para estudiar las matemáticas griegas son completamente distintas a las que afrontamos con las matemáticas babilónicas, en el capítulo anterior.

Allí, nuestros textos —las tablillas— podían estar rotos o dañados, y la terminología ser oscura y sólo inteligible por el contexto, pero si de algo no teníamos duda era de la autenticidad de los textos, porque éstos eran las verdaderas tablillas que los babilonios mismos habían escrito.

Para mostrar cuán distintas son las circunstancias cuando se trata de los textos matemáticos griegos, tomemos ahora, como ejemplo, los *Elementos* de Euclides, nuestro material de trabajo en este capítulo. El original fue escrito, como ya veremos, alrededor del año 300 a. C., pero los manuscritos más antiguos que se conservan del texto griego pertenecen al siglo x, es decir, están más cerca de nosotros que de Euclides.

Resulta así que los textos de que disponemos, aun los más antiguos, son sólo copias de copias transcritas una y otra vez, y con ellas debemos intentar reconstruir lo que realmente escribió Euclides. ¡Ingente labor de detectives! Sin embargo, los humanistas y filólogos han desarrollado ingeniosas técnicas para resolver esas dificultades. El procedimiento es, a grandes rasgos, como sigue: Comparemos los manuscritos X y Y. Si Y tiene todos los errores y características de X más algunos propios, es lógico suponer que Y es una copia, o una copia de una copia, de X. Si por otra parte X y Y tienen ciertos errores comunes, pero cada uno por su parte tiene a su vez algunos errores propios, es probable que ambos provengan de un arquetipo común Z que, aunque haya desaparecido, es reconstruible. De esta manera, los manuscritos existentes se distribuyen en familias. Cada familia procede de un manuscrito arquetipo. Con los arquetipos se reconstruye entonces el texto original.

El investigador debe poseer no sólo habilidad y destreza, sino un profundo conocimiento del idioma y del asunto de los manuscritos; debe estar familiarizado, por ejemplo, con la historia de las lenguas y estilos usados por los copistas, y tener un perfecto dominio de los antiguos comentaristas de los textos.

Resulta más fácil, sin embargo, reconstruir un texto de asuntos matemáticos que uno de literatura. Es posible, por ejemplo, restaurar la palabra perdida en:

"Los ángulos adyacentes a la . . . de un triángulo isósceles son iguales",

con un grado de exactitud mucho más alto que en:

"Borrascosos vientos agitaban los . . . retoños de mayo".

J. L. Heiberg, el humanista danés que con increíble laboriosidad nos legó las ediciones definitivas de la mayoría de los textos de matemáticas griegas, descubrió que los manuscritos que existen sobre las obras de Euclides pertenecen a dos familias. Todos los textos, excepto uno, son descendientes de una edición hecha por Theon de Alejandría, un prolífero editor y comentarista del siglo IV a. C. Existe un manuscrito que parece provenir principalmente de una traducción libre de revisiones de Theon, pero basadas en una copia de Euclides más reciente que la utilizada por Theon. Tomando en cuenta éstos y otros factores, logró al fin Heiberg restablecer un texto griego de los *Elementos* de Euclides todo lo fidedigno posible, que se publicó entre 1883 y 1888. Esta edición es la base de todas las investigaciones y traducciones de Euclides, por ejemplo, de la versión inglesa de Heath que se consigue fácilmente ahora en ediciones corrientes.

Desde luego que los *Elementos* de Euclides eran conocidos en el Mundo Occidental mucho antes de la edición de Heiberg. Por los tiempos del Califa Harun-ar-Rashid (786-809), cuya fama ha sido conservada en los cuentos de *Las Mil y una Noches*, Euclides fue llevado al árabe por al-Hajjaj; se sucedieron diversas traducciones a ese idioma, algunas de ellas están drásticamente abreviadas, y otras, demasiado libres respecto al original griego. Algunas de esas versiones árabes llegaron a Europa en el siglo XII traducidas al latín (Adelardo, Gerardo de Cremona), y durante los siglos XIII y XIV aparecieron otras muchas traducciones latinas. En 1482 se imprimió y publicó por primera vez una edición de Euclides (la versión de Campano); la primera traducción directa del griego al latín, hecha por Zamberti, apareció en 1505. Un texto griego vio la luz en 1533.

Hemos recorrido un ciclo característico: primero, traducciones del griego al árabe en el siglo IX; después, latinización de las versiones árabes en el siglo XII, época de las Cruzadas donde los contactos entre cristianos y mahometanos no fueron siempre cruentos; posteriormente, las impresiones latinas hacia fines del siglo XV, seguidas de cerca por las traducciones al latín de los textos griegos; más adelante, durante el Renacimiento, la aparición del propio texto griego; y, finalmente, las ediciones eruditas definitivas de este texto en la segunda mitad del siglo XIX.

Esta puede ser la historia de casi todos los textos griegos no sólo de matemáticas sino de ciencias en general, y nos da luz sobre los gustos e intereses de los diversos periodos históricos.

Pueden existir diferencias de una clase u otra; así, algunos de los trabajos de Arquímedes y de Apolonio no son conocidos sino a través de sus versiones árabes; pueden variar un poco las fechas de las distintas fases; pero en general, el ciclo se cumple.

2.2 *Las matemáticas griegas antes de Euclides*

Nuestro conocimiento y apreciación de las matemáticas griegas están basados fundamentalmente en los trabajos que han subsistido de Euclides, Arquímedes y Apolonio. Estos tres matemáticos vivieron dentro de un periodo de unos cien años: Euclides, alrededor del 300 a. C.; Arquímedes, desde el 287 hasta el 212 a. C., aproximadamente; y Apolonio, por el 200 a. C., muchos años después que la influencia política griega había desaparecido. (Alejandro Magno murió el 332 a. C.), y aún más del Siglo de Oro de la literatura y artes griegas.

Ninguno de los tres vivió propiamente en Grecia: Euclides y Apolonio trabajaron en Alejandría, aunque Apolonio había nacido en Pérgamo (Asia Menor); Arquímedes vivió en la colonia griega de Siracusa en Silicia, y fue muerto durante la toma de esta ciudad por los romanos.

Las matemáticas griegas alcanzaron su más alto nivel en el periodo helenístico, (nombre que se ha dado a la época que siguió a la muerte de Alejandro), pero sus orígenes se remontan unos tres siglos más atrás. Uno de los más importantes y difíciles problemas que pesan sobre los historiadores de las matemáticas griegas es establecer lo que ocurrió antes de Euclides, porque, a excepción de un insignificante trabajo sobre astronomía de cierto autor Autólicos, ningún texto completo de las matemáticas de ese período ha llegado a nosotros.

Son, pues, los *Elementos* de Euclides el más antiguo tratado griego de matemáticas que conocemos en su totalidad, y la naturaleza misma de este admirable trabajo nos aclarará por qué ha sucedido así. Euclides consiguió incorporar a esta sola obra todo el bagaje de conocimientos matemáticos acumulados por sus predecesores, con el mérito adicional de una buena preparación y presentación. En consecuencia, los *Elementos* redujeron a puro material de interés histórico los escritos de los matemáticos anteriores a él; éstos dejaron de ser transcritos a nuevas copias, y de ahí, que se perdieran para nosotros. Es curioso que precisamente un trabajo de Euclides sobre secciones cónicas corriera la misma suerte, porque fue, a su vez, opacado por el brillante tratado sobre *Secciones Cónicas* de Apolonio, y así, todo lo que ha quedado de la contribución de Euclides a esa materia no ha sido sino el título.

Durante los últimos cien años, un gran número de eruditos se ha consagrado a la difícil tarea de reconstruir las matemáticas griegas pre-euclidianas. Esto supone escudriñar cuidadosamente la literatura clásica griega en busca de referencias sobre los matemáticos antiguos y sus trabajos; es posible, con suerte, aún encontrar citas completas de ellos. Los conocimientos así adquiridos se confrontan con los *Elementos*, y el investigador puede lanzarse a asignar a distintos precursores de Euclides los nuevos conceptos encontrados. Esta tarea está muy lejos de haberse concluido, ocasionalmente sucede que un descubrimiento inesperado, como el de las matemáticas babilónicas, obliga a toda una revaluación de amplias áreas de conocimientos que hasta ese momento se tenían por bien situados en cuanto a épocas y autores.

No es nuestro propósito dar una exposición detallada de las matemáticas griegas; a continuación ofreceremos sólo un débil bosquejo de las realizaciones pre-euclidianas.

De acuerdo a la tradición griega sostenida por Herodoto y otros historiadores, fue Tales de Mileto quien en los principios del siglo VI a. C., llevó desde Egipto las matemáticas a Grecia, y quien dio a esas matemáticas una característica que conservaron desde la antigüedad griega: el papel protagonista concedido desde entonces al concepto de "demostración" o "prueba". No hay duda de que muchas anécdotas atribuidas a Tales son exageradas; por ejemplo, Herodoto sostiene que Tales predijo lluvias de estrellas y un eclipse solar. Además, varias de las demostraciones que se dicen propuestas por él, son de tal naturaleza, que, no cabe duda, reflejan modalidades propias de un período más reciente que el que corresponde a los hechos narrados. Pero, aunque disculpemos a los griegos su afición a crear y venerar héroes, existe una razón para dudar que el interés de los griegos por las matemáticas naciera en tiempos de Tales, aun cuando no podamos decir con exactitud cuál era el nivel que ellos habían alcanzado. Con el conocimiento que poseemos actualmente de las matemáticas egipcias y babilónicas nos parece que el impulso inicial vino más bien de Mesopotamia que de Egipto.

Durante un siglo y medio después de Tales, hubo en Grecia una actividad febril en el campo de las matemáticas; oímos hablar especialmente de Pitágoras de Samos que parece haberse iniciado alrededor del 530 a. C., y de sus seguidores, los pitagóricos. Sus actividades fueron las ciencias, particularmente las matemáticas, y la religión; y sus dogmas religiosos estaban fuertemente inspirados en principios matemáticos de una mística del número. Sus inclinaciones dentro de las matemáticas eran hacia la aritmética y el álgebra, en las que manifestaban una decisiva influencia babilónica: esta influencia es evidente, ahora que conocemos las matemáticas babilónicas. Se dice que Pitágoras visitó Egipto y Babilonia, pero, aunque según la leyenda, aprendió las matemáticas en Egipto, y adquirió sus creencias místicas en Babilonia, es obvio que fue precisamente en Babilonia donde recibió su inspiración matemática.

Algunos otros filósofos, además de los pitagóricos, fueron atraídos por las investigaciones matemáticas; conocemos varios nombres, como los de Hipócrates de Quíos y de Demócrito, ambos de la segunda mitad del siglo V a C. Muchos descubrimientos se hicieron en el álgebra y la geometría; de éstos, discutiremos sólo unos pocos a continuación.

Las Lúnulas de Hipócrates. En Simplicio encontramos un extracto sacado de Eudemo, autor del siglo IV a. C., que escribió una historia de las matemáticas, desafortunadamente desaparecida. El extracto se refiere a las llamadas "lúnulas" de Hipócrates; reproduciremos una de las tres partes de que consta ese pasaje:

Se traza una semicircunferencia sobre la diagonal de un cuadrado $ABCD$ (Figura 2.1a), y con centro D y radio AD, un cuadrante desde A hasta C. Tanto las dos áreas sombreadas I, como la II son segmentos circulares de 90°. En consecuencia, son semejantes.

En figuras semejantes, la razón de las áreas es el cuadrado de las razones lineales. Así,

$$\frac{\text{segmento circular I}}{\text{segmento circular II}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

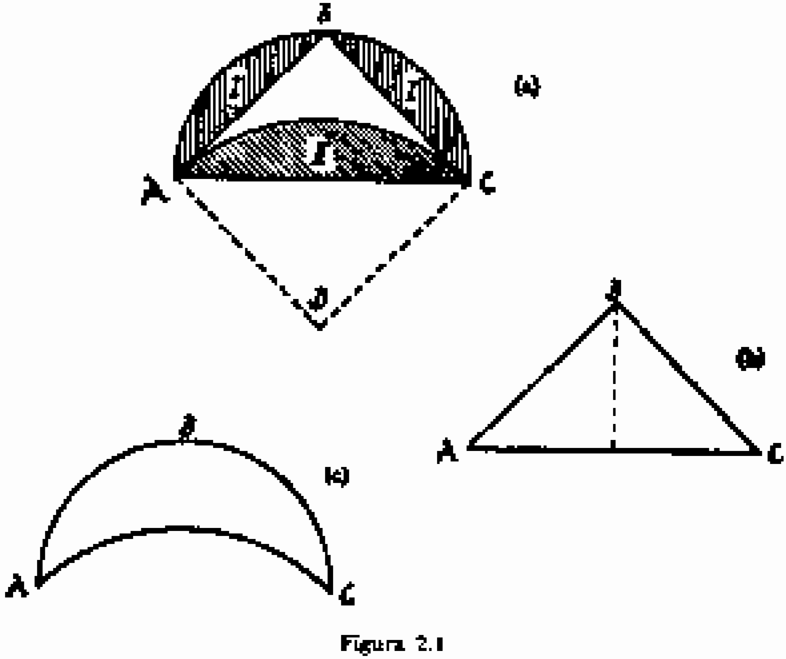

Figura 2.1

Pero esta última razón es 1/2 puesto que AC es la diagonal de un cuadrado de lado AB. Por lo tanto, el segmento II es el doble del segmento I, o es igual a la suma de los segmentos I. Si del semicírculo eliminamos ambos segmentos I, o el segmento II, el área remanente será igual en ambos casos, ya que hemos retirado áreas iguales. En el primer caso, el área remanente corresponde al triángulo ABC (Figura 2.1b), mientras que en el segundo, corresponde a la lúnula ABC (Figura 2.1c). El triángulo y la lúnula deben tener, en consecuencia, la misma área. Es decir, hemos podido *cuadrar* la lúnula. (*Cuadrar* una figura plana es encontrar un cuadrado de área igual a la de la figura dada. Cualquier polígono puede cuadrarse fácilmente; en particular, para cuadrar el triángulo ABC, lo cortamos a lo largo de la altura bajada desde B, y con los triángulos formados se construye un cuadrado).

Hipócrates dio otros dos ejemplos de lúnulas cuadrables; en uno el arco interior es menor que una semicircunferencia, y en el otro, es mayor.

Estos curiosos problemas surgieron indudablemente de los intentos por cuadrar el círculo; sabemos que esta construcción no puede realizarse dentro del cumplimiento de las estrictas condiciones que solemos imponernos para llevarla a cabo, al no permitirnos sino el uso de regla y compás. Es evidente que en estos ejemplos se insinúa que Hipócrates había sacado la conclusión de que también es posible cuadrar el círculo. Esta conclusión, por supuesto, es falsa; más aún, sus lúnulas han sido construidas expresamente para ser cuadrables. Sin embargo, su éxito estuvo en haber sido el primero que demostró que existen superficies que, a pesar de estar limitadas por curvas, pueden cuadrarse; es decir, señaló claramente que la dificultad en cuadrar el círculo no estriba únicamente en que su circunferencia no esté formada por segmentos de recta.

Hacia fines del siglo V a. C., surge una reacción de tendencia racionalista criticista que probablemente tuvo un doble origen: de una parte, el descubrimiento de la irracionalidad de lo que llamamos $\sqrt{2}$, (descubrimiento razonablemente atribuido a los pitagóricos), y, de otra, las investigaciones en el campo de la lógica iniciadas por Parménides y llevadas a agudas expresiones por Zenón en sus famosas paradojas.

La Irracionalidad de $\sqrt{2}$: La clásica prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ (de la que existe un esbozo tan antiguo como Aristóteles) es como sigue: El objeto es mostrar que *no existe una fracción a/b, donde a y b son enteros, cuyo cuadrado sea 2.*

Utilizaremos una simple propiedad de los enteros: "el cuadrado de un número par es par, y el cuadrado de un impar es impar". La prueba es indirecta; supondremos que el teorema es falso, y procederemos a demostrar que ese supuesto conduce a una contradicción. Admitamos, entonces, que existe una fracción cuyo cuadrado es 2; si tal fracción existe, existe también su forma irreducible. Sea a/b tal fracción irreducible. Entonces,

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

ó

$$a^2 = 2b^2. \tag{1}$$

Ahora bien, a tiene que ser par, puesto que su cuadrado, $2b^2$ es par; si a fuera impar su cuadrado no podría ser par, como hemos visto.

Como a/b es irreducible, b tiene que ser impar, pues de otro modo el numerador y el denominador tendrían el divisor común 2.

Hemos llegado a que a es par y b es impar. Esto significa que a es el doble de un entero p,

$$a = 2p, \ (p \text{ entero}),$$

que llevamos a (1) para obtener,

$$4p^2 = 2b^2$$

ó

$$b^2 = 2p^2.$$

Hemos llegado a una contradicción; porque, como b es impar es necesario que b^2 sea también impar, pero estas últimas relaciones expresan que b^2 es par. Entonces, nuestro supuesto tiene que ser falso, y el teorema verdadero.

Es digno de mencionarse que mientras los babilonios encontraron excelentes aproximaciones sexagesimales de $\sqrt{2}$, y, al parecer, se contentaron con ellas, los griegos, sin embargo, llevaron el problema hasta sus últimas consecuencias lógicas aun cuando el resultado, que $\sqrt{2}$ es irracional, no es de gran interés práctico.

Las Paradojas de Zenón sobre Aquiles y la Tortuga: En su *Física*, Aristóteles presenta las paradojas de Zenón. La segunda, llamada *de Aquiles*, es, en resumen, lo siguiente:

Aquiles, el de veloces pies, va a competir en una carrera con una tortuga, y, como es justo, concede una ventaja a la tortuga.

Contra lo que él suponía, y contra nuestra experiencia, Aquiles es incapaz de alcanzar a la tortuga, porque, arguye Zenón, cuando Aquiles llega al punto donde estaba la tortuga al comenzar la carrera, no la encuentra allí: por muy lenta que ella sea, se ha movido hacia algún punto más adelante.

Cuando Aquiles llega a ese nuevo punto, tampoco encuentra a la tortuga, en ese momento, ella está en algún punto más adelante aún. Cuando Aquiles llega, etc., etc. De modo que nunca podrá alcanzar al animal.

Zenón divide hábilmente el intervalo de tiempo, comprendido desde la arrancada de Aquiles hasta su encuentro con la tortuga, en infinitos subintervalos, y afirma entonces que una suma de infinitos términos es necesariamente infinita; esto, por supuesto, es una falacia. Con ese razonamiento podríamos argüir que $\frac{1}{3}$ es infinito, puesto que,

$$\tfrac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \ldots,$$

contiene en el miembro de la derecha una suma de infinitos términos.

Las otras paradojas de Zenón se valen de la misma clase de recursos, (por ejemplo, que el movimiento es imposible, porque si una flecha no se está moviendo en un instante dado, no es posible entonces que se mueva durante un intervalo); y todas se refieren a problemas de ramas de la matemática que hoy día contienen materias tales como continuidad, procesos de límites, y número real. El interés primario de Zenón probablemente fue defender su sistema filosófico, o mejor el de Parménides, mostrando que es mucho más fácil deducir conclusiones ridículas a partir de la axiomática de los sistemas rivales. Con todo, su razonamiento encierra una severa advertencia a los matemáticos en cuanto que constituye un ejemplo evidente del cuidado con que se debe analizar todo argumento que contenga un proceso de límite antes de aceptarlo como convincente.

El descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ también pertenece al campo matemático que lleva al conocimiento preciso del número real, y por ello dio un golpe directo al cuerpo de las matemáticas. En primer lugar, estremeció y puso en peligro toda la teoría de la semejanza. Este aserto se verifica, si analizamos brevemente el teorema fundamental de la semejanza de triángulos: *Si* *los ángulos de dos triángulos son respectivamente iguales dos a dos, los lados homólogos son proporcionales.**

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A$$
$$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle C'.$$

El triángulo $AB'C'$ ha sido colocado de tal manera que su ángulo A coincida con el ángulo A del triángulo ABC, y que AB' caiga sobre AB. $B'C'$ es entonces paralelo a BC. Sea m un segmento contenido p veces en AB', y q veces en AB, donde p y q son enteros. ($p = 4$, $q = 7$ en la figura).
Tenemos entonces que,

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{p}{q},$$

y queremos probar que, necesariamente,

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{p}{q},$$

con lo que,

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}.$$

Tracemos una serie de paralelas a $B'C'$ y a BC, y otra serie de paralelas a AB, como aparecen en la figura 2.2. Consideremos primero los paralelogramos formados, y después, los triángulos pequeños de la derecha. Podemos probar que todos estos triángulos son congruentes, de modo que AC' queda dividido en p segmentos iguales n, y AC en q segmentos n. Entonces,

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{p}{q}.$$

Esta demostración, sin duda alguna, es correcta hasta ahora, pero se apoya en la suposición de que un par de lados homólogos,

* La Figura 2.2 ayudará al lector a recordar la demostración elemental de este teorema; esta demostración, como veremos, es incompleta.

AB' y AB en este caso, admiten un número exacto de veces la medida común m, es decir, son *conmensurables*. Esto significa que la relación de sus longitudes es *racional*, pero la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ prueba que no siempre ocurre así. Por ejemplo, si AB' y AB son el lado y la diagonal de un cuadrado, la irracionalidad de $\sqrt{2}$ muestra que es imposible encontrar tal segmento m. Luego la demostración ofrecida no podría aplicarse a ese caso, y, en consecuencia, es incompleta.

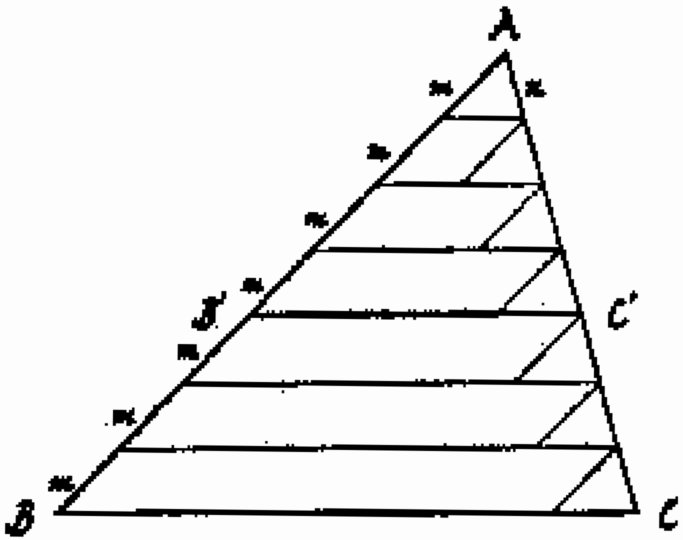

Figura 2.2

Por otra parte, la irracionalidad de $\sqrt{2}$ tuvo serias consecuencias para el álgebra, porque demostró que el simple problema de encontrar un x tal que

$$x^2 = 2,$$

que se propone con tanta facilidad, no tenía solución en "números" en el sentido en que lo entendían los griegos, porque, según ellos, "todo número era un racional".

A la luz de este nuevo criterio, con todas sus consecuencias en los procesos de límites, en la semejanza y en el álgebra, muchas de las antiguas demostraciones perdían toda su fuerza de convicción y quedaban convertidas en sólo argumentos aparentes. Si se quería salvar las matemáticas, era necesario dotarlas de nuevas bases más consistentes.

El dilema algebraico fue probablemente el origen de lo que hemos llamado *álgebra geométrica* de los griegos. Obsérvese que, aunque la ecuación

$$x^2 = 2$$

no tiene solución en los números racionales, sin embargo, tiene una solución geométrica trivial: x es la diagonal del cuadrado unitario, como se comprueba por el teorema de Pitágoras. Toda el álgebra fue formulada en términos geométricos; por ejemplo, se introdujeron expresiones tales como "el rectángulo de lados a y b" para decir "a veces b". Aún hoy conservamos reminiscencias de esa tradición cuando llamamos *cuadrado* y *cubo* de x a x^2 y x^3. El libro II de los *Elementos* de Euclides consta de teoremas que en su forma extensa pertenecen a la geometría, pero cuyo contenido es puramente algebraico. Estudiaremos algunos ejemplos cuando analicemos los teoremas que conducen a la construcción del pentágono regular.

Esta discusión también nos mostrará que es probable que alguien intente resolver las dificultades que presenta el concepto de semejanza, mediante el procedimiento de evitarlas; pero esto, por supuesto, sería sólo una solución temporal. Tocó a Eudoxio proveer a las matemáticas de una sólida cimentación, como veremos en algunas notas de Arquímedes y en los comentarios de Proclo a los *Elementos* de Euclides.

Eudoxio fue una *generación* más joven que Platón; debe haber alcanzado su madurez por los años 370 a. C. Fue él quien rescató la teoría de la semejanza cuando estableció una nueva definición para la *igualdad de razones*, e introdujo un nuevo criterio para determinar cuándo es una razón *mayor* que otra. Logró su propósito utilizando como única base los números enteros, pero lo llevó a cabo de tal manera que sus definiciones comprendían tanto las razones con elementos racionales como irracionales.

Eudoxio, sin embargo, con gran astucia de su parte, dejó indefinido el concepto de razón, porque, como sabemos ahora, tal definición exige una previa introducción al concepto de número real. En el libro V de los *Elementos* encontramos este tema.

Por métodos semejantes Eudoxio llegó a un sólido criterio para la convergencia de una sucesión infinita. (*Elementos*, libro X, Proposición 1). Este criterio establece lo siguiente: *Sean dos magnitudes desiguales dadas, (longitudes, áreas o volúmenes). De la mayor, quítese, al menos, la mitad; de la parte restante, quítese nuevamente, al menos, la mitad; y así sucesivamente. Después de repetir este proceso un número finito de veces, la parte que aún nos quedó será más pequeña que la menor de las cantidades dadas.* Transcrita a simbología moderna, esta proposición establece que:

Si $A > \varepsilon$ y $\alpha_i \leqslant 1/2$ $(i = 1, 2 \ldots)$, entonces existe un n tal que

$$A \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_n < \varepsilon ;$$

o, equivalentemente,

$$\text{si } \alpha_i \leqslant 1/2, \text{ entonces } \lim_{n \to \infty} \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n = 0.$$

El criterio de Eudoxio constituyó el único fundamento de todos los procesos de límites que aparecieron después en las obras griegas de matemáticas de carácter serio y científico. En particular sirvió de base al llamado método exhaustivo, técnica relacionada con la moderna integración.

Está fuera del objetivo de este libro el analizar todas las conquistas de Eudoxio en el campo de las matemáticas porque ello requiere una buena formación matemática previa y no poca erudición clásica.

No fue sino a mediados del siglo XIX cuando se alcanzó de nuevo un nivel de conocimientos matemáticos comparable al de Eudoxio. De hecho, al comenzar la segunda mitad del siglo pasado, se cerraba un período de las matemáticas que nos recuerda en su desarrollo al que acabamos de estudiar. Este período comenzó con el descubrimiento simultáneo por Newton y Leibniz del cálculo diferencial e integral poco antes de 1700. De ahí nació un siglo pletórico de excitante actividad por parte de los matemáticos que, en su afán de conquistar nuevas áreas para esta ciencia, no querían sentirse atados por la exactitud de las leyes de un procedimiento riguroso. Euler es la máxima representación de este período. Con una fecundidad increíble derramaba un verdadero torrente de producción matemática de la más alta originalidad, y fue sólo su intuición y perspicacia quien lo preservó de caer en errores. Al comenzar el siglo XIX se produce la reacción hacia la razón y el análisis; sobresalen, entre otros, Abel y Cauchy. Durante la segunda mitad del siglo se dieron los últimos pasos hacia la solidificación de los fundamentos del cálculo cuando Dedekind, Weierstrass y Cantor introdujeron el número real de un modo irreprochable.

Este proceso de desarrollo no es extraordinario en las matemáticas ya sea en los conceptos fundamentales o en los de menor importancia: surge primero un desarrollo veloz, casi siempre intuitivo, y libre de rigor analítico; sigue después un período de razonamientos y dubitaciones que tiene necesidad de fundamentarse en un trabajo escrupuloso sobre principios básicos; por último, la etapa que pule cuidadosamente los distintos resultados obtenidos, y los unifica en una sola forma final.

El extraordinario logro de Euclides en sus *Elementos* fue precisamente representar esa etapa final en las matemáticas griegas antiguas; su esfuerzo tuvo tan buen resultado que los *Elementos* han subsistido como modelo de trabajo por más de 2000 años.

2.3 *Los "Elementos" de Euclides*

Lo único que con certeza conocemos sobre Euclides son sus obras. Aun Proclo (410-485 d. C.), que escribió unos comentarios a los *Elementos*, tuvo que usar artificiosos argumentos para situar a Euclides en el reinado de Ptolomeo I Soter de Egipto (304-285 a.C.). Afirma Proclo que Euclides es anterior a Arquímedes (287-212 a. C.) puesto que en éste aparecen citas de aquél, pero posterior a Eudoxio y a Theteto cuyos trabajos fueron incorporados a los *Elementos*. Como existe una anécdota que relaciona a Euclides con cierto rey Ptolomeo, Proclo concluye que este rey deber ser Ptolomeo I. Cuenta dicha anécdota que el rey, después de hojear los *Elementos*, lleno de esperanza preguntó a Euclides si no habría un camino más corto para llegar a la geometría; contestó severamente Euclides: "En la geometría no hay caminos especiales para reyes". Esta misma anécdota, poco más o menos, la narra también Stobeo, pero la atribuye a Alejandro Magno y al matemático Menecmo; pero, después de todo, es una bella anécdota. Cuenta Stobeo que un alumno de Euclides que había comenzado a estudiar geometría, tan pronto como terminó el primer teorema preguntó a su maestro: "Y, ¿qué ganaré yo con saber esto?"; Euclides llamó inmediatamente a un esclavo y le dijo:

"Entrégale tres monedas a éste, porque él necesita obtener una ganancia de todo lo que aprende".

Todo lo que sabemos de Euclides son estas anécdotas de dudosa autenticidad. Sólo podemos añadir, como ya sabemos, que desarrolló sus actividades en Alejandría alrededor del año 300 a. C., y que lo único indudablemente cierto es que fue el autor de los *Elementos*.

Los *Elementos* constan de trece libros, como se ha llamado a sus distintas partes. Una impresión actual de una traducción íntegra del texto, sin los comentarios, llenaría un grueso volumen. En estos trece libros Euclides reunió todos los conocimientos matemáticos acumulados hasta sus días, con algunas excepciones tales como las secciones cónicas, la geometría esférica y probablemente algunos descubrimientos propios. Su gran triunfo estriba en que presenta el material de trabajo en una forma bellamente sistematizada, considerado como un todo orgánico.

Euclides abre el Libro I con una serie de *definiciones;* la primera por ejemplo, dice: "Un punto es lo que no tiene parte"; su intención es dar al lector una idea del sentido en que se van a usar los términos matemáticos. A continuación expone cinco *postulados* y cinco *conceptos generales* que en conjunto constituyen el cuerpo de las suposiciones aceptadas sobre las que descansa toda la teoría.

Los postulados y los conceptos generales serán enunciados conforme a la traducción de Heath.

POSTULADOS

1. Trazar una recta de un punto a otro.
2. Prolongar continuamente en línea recta una recta finita.
3. Describir una circunferencia con cualquier centro y distancia.
4. Que todos los ángulos rectos son iguales unos a otros.
5. Que si una recta, al caer sobre dos rectas, hace los ángulos interiores a un mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se encuentran hacia el lado donde están los ángulos menores que los dos ángulos rectos.

CONCEPTOS GENERALES

1. Las cosas que son iguales a una misma cosa son también iguales unas a las otras.
2. Si se añaden igualdades a igualdades los totales son iguales.
3. Si se substraen igualdades a igualdades, los restos son iguales

4. Las cosas que coinciden con otra son iguales unas a las otras.
5. El todo es mayor que la parte.

Los Postulados forman las suposiciones básicas propias de una rama específica del conocimiento, la geometría plana en este caso; mientras que los Conceptos Generales abarcan todos los campos. Hoy en día, los matemáticos no estiman necesaria tal clasificación, y llaman *axiomas* o *postulados* a ambas clases de supuestos.

Antes de entrar en la discusión de la axiomática de Euclides será conveniente considerar lo que sucede en los sistemas teóricos matemáticos. Si de un tratado matemático descartamos todo comentario, obtendremos únicamente una serie de teoremas con sus correspondientes demostraciones. La demostración consiste en probar que el teorema en cuestión es una consecuencia lógica de teoremas anteriores, pero evidentemente esto significa que el "primer teorema", el que encabeza la serie, no puede probarse porque no existen teoremas anteriores que sirvan de base para su demostración. Esos teoremas "indemostrables" que inician una teoría son llamados *axiomas*.

Vale la pena observar que, a los efectos de una teoría, resulta completamente indiferente que los axiomas sean "realmente" verdaderos o falsos; lo único que afirma una teoría es que *si* sus axiomas son verdaderos, *entonces* también lo son los teoremas que de ellos se deriven. Más aún, desde el punto de vista de las matemáticas puras, no interesa *cuáles* son los objetos o elementos (puntos, rectas, círculos, etc.), que satisfacen los axiomas, ni *qué relaciones* tienen entre sí esos objetos indefinidos, como, por ejemplo, el que dos rectas distintas no puedan tener más de un solo punto común. Precisamente, este hecho de no definir cuáles son los objetos a que se refiere una teoría, lejos de convertirla en sólo un conjunto de palabras vacías, la hace con frecuencia mucho más útil, porque, en esa forma, es posible aplicar todo su contenido, como ocurre en la Física, a cualquier elemento que satisfaga los axiomas. Claro está, esto no significa que cualquier axiomática antigua pueda ser aceptada y aplicada indiscriminadamente por los matemáticos, porque toda axiomática además de ser "significativa", (faceta importante, aunque indefinida), tiene que poseer las tres propiedades siguientes:

1. *Completud*; es decir, que todo lo necesario para la teoría, aparezca explícitamente contenido en los axiomas, de modo que no existan suposiciones tácitas.

2. *Consistencia*; es decir, que resulte imposible derivar de los axiomas dos teoremas contradictorios.

3. *Independencia*; es decir, que ninguno de los axiomas sea consecuencia de los otros.

Comentaremos cada una de estas propiedades por su orden. Ya hemos dicho anteriormente que con frecuencia la axiomatización de una teoría tiene lugar después que se ha trabajado con ella durante algún tiempo; éste es un modo de poder asegurar que los axiomas son "significativos", pero al mismo tiempo, no hace fácil el determinar si los axiomas son completos o no, porque, cuando uno se ha acostumbrado a tratar ciertos conceptos habitualmente, corre el peligro de olvidar que esos conceptos tienen necesariamente que estar justificados por alguna axiomática. En consecuencia, para poder descubrir si existen suposiciones implícitas, es menester desmenuzar cada paso y escudriñar meticulosamente cada argumento.

Pocas cosas hay tan difíciles como establecer la consistencia de un sistema de axiomas. Generalmente se prueba que un sistema, digamos los postulados de la geometría euclidiana plana, es consistente, si conviene con alguna axiomática que sea consistente, por ejemplo, la de los números reales; el puente que une los dos sistemas citados es la geometría analítica. En realidad, uno de los grandes problemas de la lógica matemática es establecer hasta qué punto es consistente un conjunto de axiomas dado.

La última propiedad, la independencia, mira por la frugalidad matemática, puesto que pide que no se postule ni un axioma más que los estrictamente necesarios. No obstante si una axiomática es completa y consistente, pero no independiente, no se derivaba de ello ninguna dificultad; sencillamente significa que uno o varios axiomas son superfluos y que deben ser considerados y llamados teoremas puesto que pueden probarse a partir de los demás.

Estas pocas observaciones sobre las características de los sistemas axiomáticos reflejan el criterio moderno sobre esta materia, y, aunque el autor opina que muchos de los matemáticos griegos, en particular Arquímedes, fueron, por sus puntos de vista, mucho más modernos que lo que generalmente se piensa de ellos, es cierto que, para la mayor parte de los antiguos, la palabra "axioma" tenía un significado distinto al actual, ya que por "axioma" entendían "proposiciones y verdades tan evidentes por sí mismas que todo el mundo las aceptaría como tales". Cabe ahora investigar hasta dónde cumplen los axiomas de Euclides las condiciones exigidas modernamente, investigación interesante puesto que la axiomática moderna es descendiente directo de aquel esfuerzo de Euclides.

Desde la primera proposición del libro I de los *Elementos* se ve claramente que el sistema axiomático de Euclides no es completo. La proposición consiste en construir un triángulo equilátero sobre un segmento de recta dado *AB*. La construcción es la usual, figura 2.3. No existe, sin embargo, en los axiomas ninguna base para asegurar que los dos arcos han de tener un punto común; Euclides ha hecho una suposición tácita. Alegar que es *obvio* que los arcos se cortan, o que cualquiera, al trazar la figura, puede *ver* que sucede así, no es hacer matemáticas sino estudios empíricos de los gráficos, donde, por otra parte, no se cumplen los axiomas. Los diagramas son, desde luego, muy útiles, pueden darnos muchas ideas, y nos ayudan a mantenernos en el hilo de un argumento, pero jamás un diagrama debe ser utilizado como argumento en una demostración.

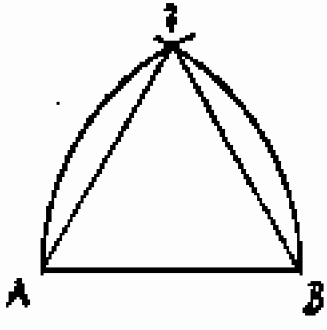

Figura 2.3

Euclides hace otras suposiciones tácitas, principalmente sobre traslaciones y congruencias, pero ya hemos dicho que a fuerza de tratar habitualmente ciertos problemas, disminuye la agudeza de nuestra visión para descubrirlos.

De hecho, no fue sino en 1900 cuando la geometría de Euclides fue dotada de una axiomática completa, trabajo que realizó David Hilbert en su famoso "Grundlagen der Geometrie", ("Fundamentos de la Geometría").

Los axiomas de Euclides son tan consistentes como los axiomas aritméticos, puesto que se puede construir un cuerpo aritmético que los satisface: la geometría analítica.

El problema que más interesó a los matemáticos desde la antigüedad hasta mediados del siglo XIX fue, sin embargo, el de la independencia del sistema axiomático de Euclides, específicamente en lo que se relaciona con el quinto postulado. Resulta curioso que este problema haya causado tanto interés, porque como hemos visto, la independencia de los axiomas no tiene trascendencia alguna sobre la validez lógica de la teoría en conjunto; esa actitud, no obstante, refleja evidentemente la postura de los antiguos matemáticos ante el significado de la palabra "axioma".

El quinto postulado ha sido llamado *postulado de las paralelas* porque su implicación inmediata es que por un punto dado P exterior a una recta l, pasa una y sólo una recta paralela a l; en efecto, si (Figura 2.4)

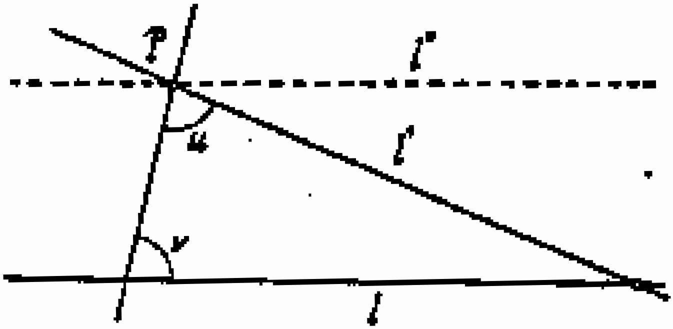

Figura 2.4

$$u + v < 2 \times 90°,$$

el postulado quinto establece que l' encontrará a l, y si

$$u + v > 2 \times 90°,$$

se deduce fácilmente que l' cortará a l, en el lado opuesto. De modo que la única recta que tiene posibilidad de ser paralela a l es l'' que determina la relación

$$u + v = 2 \times 90°.$$

Que l' es realmente paralela a l, es una consecuencia de los otros axiomas; Euclides ofrece esta demostración 1,28. Había algo en el postulado quinto que no lo hacía tan natural ni tan evidente como eran los otros axiomas, porque en éste se habla de la existencia de un punto de intersección que podría estar situado a miles de kilómetros de distancia. Y así se realizaron numerosos intentos por buscarle una demostración al postulado; Ptolomeo, el astrónomo, hizo una tentativa, pero un examen cuidadoso de tales "demostraciones" nos lleva a la conclusión de que sus autores no hicieron más que sustituir el postulado quinto por una serie de suposiciones tácitas que les parecían menos desagradables.

Hacia fines del siglo XVIII, a continuación de los trabajos de Sacheri, se hicieron nuevos esfuerzos por demostrar la dependencia del postulado de las paralelas; esta vez se encauzaron los argumentos por la vía de las pruebas indirectas. Por ejemplo, se razonó así: Si el postulado de las paralelas fuera una consecuencia de los cuatro axiomas anteriores, entonces un sistema axiomático constituido por los cuatro primeros axiomas y por la *negación* del quinto nos llevaría necesariamente a una contradicción, es decir, sería inconsistente. Pero, lejos de ocurrir así, esta nueva axiomática se convirtió sorpresivamente en base de una nueva, hermosa y consistente teoría para la que se pueden construir modelos aritméticos; nació así la llamada geometría no-euclidiana. Se probó de este modo que los cuatro primeros postulados son compatibles tanto con el postulado de las paralelas como con su negación, y en consecuencia, más de dos mil años después de la muerte de Euclides se pudo al fin establecer, la independencia de sus postulados. Los matemáticos que echaron las bases de las geometrías no-euclidianas fueron, en primer grado, Gauss, Bolyai y Lobachevsky. Euclides fue reivindicado precisamente por una geometría no-euclidiana. El tenía razón cuando incluyó el postulado de las paralelas en el cuerpo de su axiomática.

Que Euclides no se decidió impensadamente a introducir el postulado quinto dentro del conjunto de los axiomas, se desprende del modo en que lo utiliza. Como los *Elementos* no contienen prólogos ni comentarios, ni justificaciones, sino únicamente definiciones, axiomas, teoremas y demostraciones, nos vemos obligados a deducir del propio texto las razones que movieron a Euclides a tomar ciertas determinaciones; así haremos para el caso que nos ocupa.

La primera vez que Euclides utiliza el postulado quinto es en la demostración de la Proposición 29 del Libro I cuando establece que, si dos rectas paralelas son cortadas por una tercera, entonces la suma de los ángulos interiores de un mismo lado es igual a dos rectos (la prueba es esencialmente la misma que hemos visto antes). Euclides tuvo una tentadora oportunidad de usar el postulado de las paralelas inmediatamente después de I,17, y si lo hubiera hecho, hubiera acortado varios de los argumentos y les hubiera dado mayor fuerza de convicción. Se ve que Euclides deliberadamente retrasó cuanto pudo el uso de este postulado, y que prefería, en cuanto le era posible, no utilizarlo, aunque esto significara un avance más lento en las demostraciones. Se infiere que evidentemente Euclides, por una parte tenía una opinión particular respecto al postulado de las paralelas, y por otra, era un ejemplo de devoción al principio de la máxima economía de los medios de trabajo.

Por último, observaremos que Euclides a través de las primeras 29 proposiciones del libro I está construyendo una geometría euclidiana y una clase de geometría no-euclidiana.

A continuación ofrecemos un resumen del contenido de los trece libros de los *Elementos*:

Libro I. Construcciones elementales, teoremas sobre congruencias, áreas de Polígonos, teorema de Pitágoras.

Libro II. Algebra geométrica.

Libro III. Geometría del círculo.

Libro IV. Construcción de ciertos polígonos regulares.

Libro V. Teoría de las proporciones, de Eudoxio.

Libro VI. Figuras semejantes.

Libros VII-IX. Teoría de los números.

Libro X. Clasificación de ciertos irracionales (Theteto).

Libro XI. Geometría Sólida, volúmenes simples

Libro XII. Áreas y volúmenes calculados por el "método exhaustivo" (integración) de Eudoxio.

Libro XIII. Construcción de los cinco sólidos regulares.

Un curso de geometría a la antigua cubriría a lo sumo gran parte del Libro I, algunas partes seleccionadas de los Libros III y IV, y una somera exposición de algunos teoremas del Libro IV. Un simple vistazo al resumen del contenido de los trece Libros nos da una idea del tremendo alcance de la obra de Euclides;

los Libros II, VII, VIII, IX y X muestran claramente cuán equivocados están los que consideran como sinónimos las palabras "Euclides" y "Geometría". Los Libros II y X son sustancialmente algebraicos, y los Libros VII-IX exponen una teoría de los números, es decir, de la rama de las matemáticas dedicadas al estudio de los números enteros positivos. Ya hemos encontrado antes pruebas del interés de los babilonios por la teoría de los números, (Plimpton 322 y números pitagóricos; véase capítulo 1 pág. 30), pero, como en lo demás, no es sino en Euclides cuando encontramos por primera vez una sucesión lógica de teoremas con sus adecuadas demostraciones. Una de las características de los enteros, en contraste con los racionales, es que un número entero no es siempre divisor de otro. Euclides se interesó en particular por la teoría de la divisibilidad, y recalcó la importancia del papel que en ella desempeñan los *números primos*, o simplemente *primos*. En Euclides encontramos un método para determinar el máximo común divisor de dos enteros, conocido como *Algoritmo de Euclides*, y una demostración del teorema que establece que el conjunto de los números primos es infinito, es decir, que la sucesión 2,3,5,7, 11,13,17 . . . no tiene un último elemento, o, con palabras de Euclides (IX, 20):

Los números primos son más que cualquier multitud asignada de números primos.

La demostración es tan clásicamente hermosa, que la ofreceremos sustancialmente a continuación. Para llegar a ella se presupone que:

VII,31: *Todo número compuesto es medido por un primo*, o con expresión actual, *un número compuesto, esto es*, un *número $a \neq 1$ que no es primo, tiene siempre un factor primo.* Que a sea un número compuesto, significa que tiene un factor d menor que a, pero mayor que 1. Si d es primo, se ha probado el teorema; si no lo es, d es compuesto y tiene un factor d' menor que d, pero mayor que 1; d' es entonces factor de a. Si d' es primo, se ha probado el teorema; si no lo es, d' tiene un factor d'' menor que d', pero mayor que 1; d'' es factor de d', y por lo tanto, de d y de a. Si d'' es primo, se ha probado el teorema, etc.

Esta cadena de razonamientos no puede ser infinita, puesto que

$$a > d > d' > d'' > \ldots$$

es una sucesión decreciente de enteros, todos mayores que 1. En consecuencia, la sucesión es finita; en particular, diremos que a lo sumo puede constar de a elementos.

El último elemento de la sucesión ha de ser algún d primo con lo que a tiene, entonces, un factor primo.

Vamos a la demostración que ofrece Euclides al teorema antes mencionado. El prueba que, dados los números $p_1, p_2, \ldots, p_n$ siempre es posible encontrar uno más. Consideremos el número N que se obtiene del producto de todos los primos dados, aumentado en una unidad,

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Si N es primo, hemos encontrado el nuevo primo buscado, puesto que N es mayor y, en consecuencia, distinto que $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$. Si por el contrario, N no es primo, razonaremos así: Como N es compuesto, tiene un factor primo p, que no puede ser igual a p_1 porque la división de N por p_1 deja un resto de 1; tampoco puede ser igual a p_2, ni a ninguno de otros primos dados, por la misma razón, es decir, porque la división de N por cualquiera de ellos deja siempre un resto de 1. Entonces, p es un nuevo primo.

De modo que, dado un conjunto finito cualquiera de números primos, podemos siempre asegurar que existe otro número primo distinto de los dados. Por lo tanto, el conjunto de los primos es infinito.

Ambas demostraciones son de Euclides, aunque la terminología y notación moderna no.

De ahora en adelante, al exponer los argumentos de Euclides, utilizaremos una presentación modernizada. Hemos seleccionado la serie de teoremas de los *Elementos* que conducen a la construcción del pentágono regular; omitiremos los más triviales. El lector que desee conocer la forma y el estilo empleados por Euclides, puede consultar la excelente edición inglesa de Heath.

La construcción de un pentágono regular tiene, por supuesto, un gran interés propio, pero además, Euclides lo utilizará en el Libro XIII, cuando construya el dodecaedro regular, sólido limitado por doce pentágonos regulares congruentes. Más aún, la construcción del pentágono es un factor importante en el cálculo de las tablas trigonométricas griegas, como veremos en el capítulo 4.

2.4 *Construcción del Pentágono Regular según Euclides*

Antes de introducirnos en el problema de esta construcción tal como lo presenta Euclides, es conveniente examinar la forma en que es tratado hoy en día. Es claro que, una vez resuelta la construcción de un ángulo de 72°, tendremos resuelto nuestro problema, porque $72° = 360°/5$ es el ángulo central de un pentágono.

En realidad, resulta más fácil atacar el problema de la construcción de un decágono regular (polígono de 10 lados), es decir, construir un ángulo de $36° = 72°/2$ a causa de las propiedades singularmente notables, del triángulo central OAB de la figura 2.5.

Inscribamos, pues, un decágono regular en un círculo dado, de radio r y centro O. Llamaremos x a la longitud del lado del decágono, e intentaremos expresarlo como función de r, de tal manera que podamos construir x con el solo auxilio de regla y compás. La base AB del triángulo isósceles OAB es el lado x del decágono buscado; los lados $OA = OB$ son dos radios r del círculo dado; el ángulo interior en O es el ángulo central (36°) de un decágono regular.

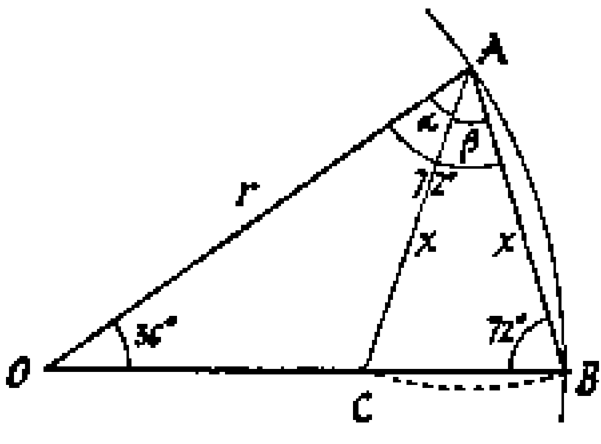

Figura 2.5

Puesto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° resulta entonces que cada uno de los ángulos iguales OAB y OBA vale 72°. Con centro en A, y radio x trazamos un arco

que corte al radio OB en C; entonces, $AC = x$.
Con esto, ΔABC es isósceles; y como

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ABC = 72°,$$

resulta $\beta = 36°$. Por lo tanto $\alpha = 72° - 36° = 36°$.
Ahora bien, como

$$\measuredangle AOC = \measuredangle OAC = 36°,$$

ΔCAO es isósceles; en consecuencia, $OC = x$, $CB = r - x$.

Por otra parte, como nuestro triángulo original OAB es semejante al ΔABC, obtenemos la relación

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{r - x}. \tag{1}$$

de donde resulta

$$x^2 + rx - r^2 = 0,$$

ecuación de segundo grado que resuelta para x, nos da las soluciones

$$x = \tfrac{1}{2}\, r(-1 \pm \sqrt{5}).$$

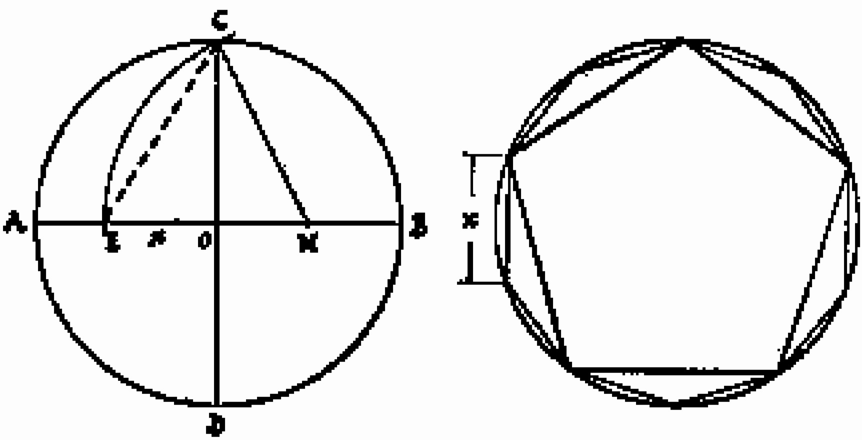

Figura 2.6

Desechamos la solución negativa y tendremos entonces

$$(2) \qquad x = \tfrac{1}{2}\, r(\sqrt{5} - 1)$$

El análisis realizado nos condujo a una expresión del lado del decágono en términos del radio r del círculo circunscrito; si r es dado, x es calculable.

Ofreceremos a continuación la construcción de x con regla y compás de tal manera que se reproduzca en la reconstrucción la expresión algebraica (2).

Sean AB y CD dos diámetros perpendiculares de un círculo de centro O y radio r, figura 2.6. Sea, además, M el punto medio de OB. Con centro en M y radio MC, trazamos un arco que intercepte a OA en E. Probaremos que OE es el lado x del decágono regular inscrito en el círculo dado.

Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$MC = \sqrt{OM^2 + OC^2} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}r)^2 + r^2} = \tfrac{1}{2}r\sqrt{5};$$

pero,

$$OE = ME - MO = MC - MO,$$

luego

$$OE = \tfrac{1}{2}r\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}r = \tfrac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1),$$

que concuerda con lo expresado en (2).

Se toma OE como cuerda, y se señalan en la circunferencia los diez puntos correspondientes. El pentágono regular puede inscribirse fácilmente si tomamos como vértice cinco puntos entre los que no haya dos consecutivos.

PROBLEMA

2.1 Probar que EC en la Figura 2.6 es el lado del pentágono regular inscrito en un círculo de radio OA. (Esta proposición es equivalente a la XIII, 10 de Euclides que establece que los lados del pentágono, exágono y decágono regulares, en un círculo dado, forman un triángulo rectángulo).

Reconsideremos brevemente la demostración ofrecida, y examinemos las herramientas matemáticas que hemos utilizado además de los teoremas geométricos elementales como el que garantiza que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Para establecer (1) hemos hecho uso del teorema fundamental de la teoría de la semejanza: *Si los ángulos de dos triángulos son respectivamente iguales, entonces sus lados homólogos son proporcionales*. Para ir de (1) a (2) hemos aplicado la fórmula para la solución de la ecuación de segundo grado; por último, en la justificación de la construcción, hemos empleado el teorema de Pitágoras.

Cuando estemos dentro de la solución que Euclides da a este problema, prestaremos particular atención a los instrumentos matemáticos que él prefirió usar. Quizás parezca extraño que nos preocupemos tanto por los elementos que intervienen en una demostración; después de todo, puede pensarse, lo importante en una prueba es que sea válida y que conduzca el resultado deseado. Difícil es argüir contra una actitud semejante porque el problema cae dentro del reino de los gustos donde no rige ninguna ley. No es raro oír hablar a un matemático sobre demostraciones hermosas y demostraciones ordinarias; con todo, el placer estético no es la menor satisfacción que un matemático obtiene de su trabajo.

Es imposible ponerse de acuerdo sobre lo que constituye la belleza y la elegancia matemáticas; pero algunos de los ingredientes más comunes son aspectos tales como la brevedad, economía de elementos, cambios dramáticos y sorpresivos, claridad, nuevas aplicaciones de técnicas antiguas, métodos que se presten para generalizar otras situaciones. Algunos de estos factores están algunas veces en desacuerdo unos con otros, tales son la brevedad y la economía. Probar un buen teorema con los elementos más débiles posibles es algo así como pescar una gran trucha con un viejo y querido hilo de seda. No se hace por brevedad ni por prontitud, sino porque hay en ello una inefable fascinación. Euclides no es dado siempre a la rapidez sino que más bien se dedica a la tarea de conseguir lo más que le sea posible con la menor cantidad de herramientas.

El primero de los teoremas de Euclides, en la serie que nos lleva a la construcción del pentágono regular, se caracteriza porque alcanza su objetivo con un mínimo de herramientas; es el siguiente:

Teorema 1. (I, 35). *Paralelogramos sobre la misma base y entre las dos mismas rectas paralelas son iguales (en área).*

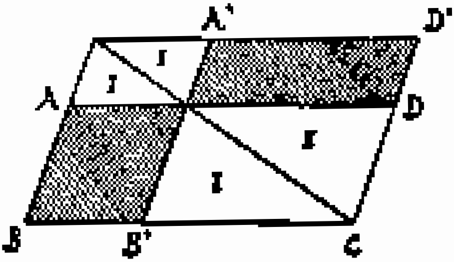

Figura 2.8

ralelogramos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ de la Figura 2.8 cumplen la última propiedad citada.

Ejemplo: Resolver, mediante una construcción, la ecuación

$$x \cdot a = b \cdot c,$$

donde a, b, c son segmentos dados.

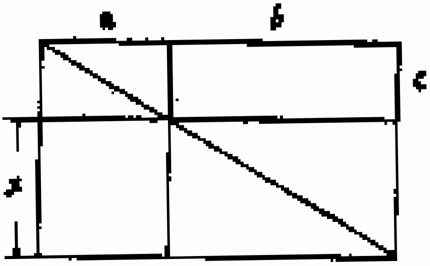

Figura 2.9

La solución está dada en la Figura 2.9 ya que los complementos de los rectángulos alrededor de la diagonal son $x \cdot a$ y $b \cdot c$ respectivamente, y son iguales de acuerdo al Teorema 4. El lector debe trazar la figura comenzando por los segmentos dados a, b, c.

Generalmente, para resolver el problema propuesto transformamos la ecuación dada en.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \cdot$$

y calculamos x como una cuarta proporcional de a, b y c; pero este procedimiento incluye la noción de proporcionalidad que el Teorema 4 nos permite evitar. El Teorema 4 también ha hecho posible una solución geométrica de una ecuación dada; es éste nuestro primer ejemplo del álgebra geométrica griega. Este problema y su solución es un caso especial de la proposición I, 44 de Euclides.

Teorema 5 (I, 47, Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado que subtiende el ángulo recto (la hipotenusa) es igual a (la suma de) los cuadrados sobre los lados que contienen el ángulo recto.*

La demostración de Euclides es como sigue: se construyen cuadrados sobre los tres lados de un triángulo rectángulo ABC, donde $\sphericalangle C = 90°$; Figura 2.10. Se baja la altura CH desde C, y se prolonga hasta F. Se trazan los segmentos DB y CE.

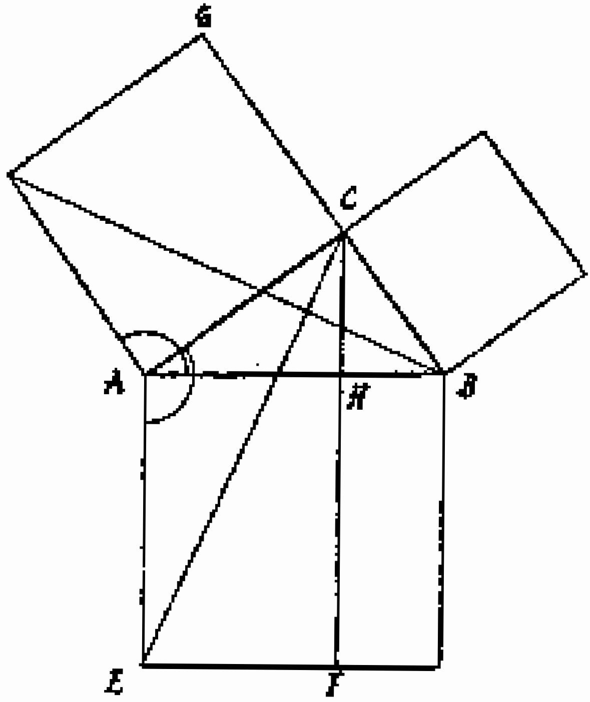

Figura 2.10

Observemos primero que los triángulos DAB y CAE son congruentes, y tales que, si cualquiera de ellos gira 90° alrededor de A, coincide con el otro.

Por otra parte, el cuadrado sobre AC es el doble del triángulo DAB, porque ambos tienen la misma base (AD) y caen entre rectas paralelas. (Teorema 3); de igual modo, el rectángulo $AEFH$ es el doble del triángulo CAE, porque tienen la base común (AE) y caen también entre rectas paralelas. Como ambos triángulos son congruentes, el cuadrado sobre AC es igual (en área) al rectángulo $AEFH$.

A continuación se prueba, con el mismo tipo de argumentos, que el cuadrado sobre BC es igual al rectángulo bajo HB. por lo tanto, la suma de los *cuadrados sobre* AC y BC es igual a la suma de los rectángulos bajos AH y HB; pero esta suma es exactamente igual al cuadrado sobre AB.

Esta es, en verdad, una demostración elegante, a despecho de las tontas observaciones de Schopenhauer. En primer lugar, se ha evitado, como antes, toda noción de semejanza; y, en segundo lugar, además del Teorema de Pitágoras, Euclides ha probado que *el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por su proyección sobre ella*. Una vez que hayamos introducido los conceptos de proporcionalidad, esta proposición resultará equivalente a *cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella*.

Nos ocuparemos ahora en dos teoremas del Libro II. La materia de este libro es lo que hoy llamamos "álgebra geométrica": el siguiente teorema nos aclarará el significado de esta expresión. Por esta vez transcribiremos la traducción literal que hizo Heath del venerable original:

Teorema 6 (II. 6). *Si se biseca una recta y se le añade una recta en línea recta, el rectángulo contenido por la entera con la recta añadida y la añadida, junto con el cuadrado sobre la mitad, es igual al cuadrado sobre la línea formada por la mitad y la recta añadida.*

Para hacer alguna luz que haga comprensible la oscuridad de este enunciado, consideremos la Figura 2.11. La "recta entera" dada es AB, que, bisectada en D, tiene por "mitad" a DB. La "recta añadida" es BC. El Teorema dice ahora que "la suma del rectángulo de lados AC y BC más el cuadrado de lado DB es igual al cuadrado de lado *DC*, o, expresado con letras minúsculas griegas,

(1) $$(2\alpha + \beta) \cdot \beta + \alpha^2 = (\alpha + \beta)^2.$$

La demostración es bien sencilla si nos valemos de la Figura 2.11. El miembro de la izquierda de (1), formado por el rectángulo apaisado y por el cuadrado, equivale a

$$(\mathrm{I} + \mathrm{II} + \beta^2) + \alpha^2,$$

y el miembro de la derecha, a

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} + \beta^2 + \alpha^2.$$

Pero las áreas sombreadas I y III son iguales, y, por lo tanto, también lo son ambos miembros de (1). De paso, para probar que I = III, Euclides aprovecha que II = III por ser los complementos alrededor de la diagonal del cuadrado de lado *DC*, (Teorema 4) y que I = II por ser congruentes.

Es evidente que, una vez trasladado a la notación moderna de (1), éste no es un teorema de geometría, sino una importantísima identidad algebraica que aparece aquí recubierta por una ordinaria vestidura geométrica. *Hubo*, sin embargo, buenas razones para hacerlo así. En los argumentos que siguen reconoceremos la importancia de este Teorema por la frecuencia con que es aplicado.

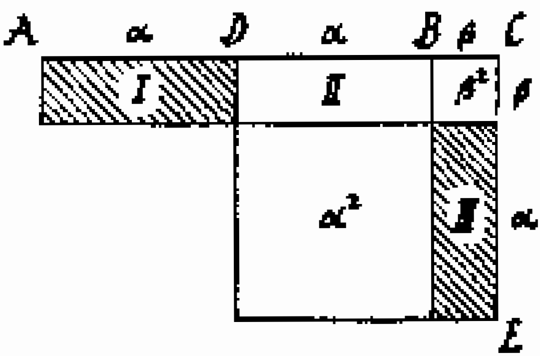

Figura 2.11

El Teorema resultará quizás más fácil de recordar si establecemos que

$$DC = a \quad \text{y} \quad AD = DB = b,$$

de modo que

$$AC = a + b \quad \text{y} \quad BC = a - b.$$

porque, entonces, vendrá a decir que

$$(a + b)\,(a - b) + b^2 = a^2,$$

que no es más que una ligera variación de la bien conocida identidad

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2.$$

TEOREMA 7 (II, 11). *Dada una recta, cortarla de tal manera que el rectángulo contenido por toda la recta y una de las partes sea igual al cuadrado sobre la otra.*

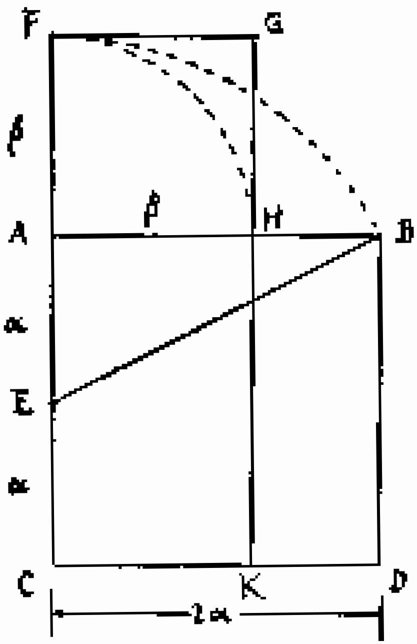

Figura 2.12

dido en estrofas y versos. Esta organización maravillosa es muy impresionante, pero en su mayor parte resulta artificial. En un principio, el artista descubre en las matemáticas algunas relaciones curiosas, propiedades nuevas que parecen estar desconectadas; paso a paso, se las arregla para reunir esos trozos de conocimiento y agruparlos lógicamente, de acuerdo con las normas establecidas, en una sucesión de teoremas. Éste es el estilo matemático, el arte de escribir que fue adoptado por Spinoza en su *Ética* para los problemas filosóficos.

Una teoría matemática no impone límite alguno a su dominio de aplicación y no tiene temor de definir la infinitud. Si el dominio es infinito, también lo es la exactitud. Hablemos ahora de la *información*, de acuerdo con nuestras definiciones anteriores: el dominio P_0 es infinito, el punto P_1 es precisamente 1 y la

$$\text{Información } I = k \ln \frac{P_0}{P_1} = k \ln \infty = \infty \qquad (3)$$

Las demostraciones, pruebas y teoremas nuevos, etcétera, no pueden modificar el resultado. Se supone en un principio una información infinita y ninguna cosa que hagamos puede cambiarla. Este extraño resultado ya fue observado por algunos matemáticos famosos. Carnap y Bar-Hillel expresaron esta paradoja muy claramente (véase Brillouin, 1956, 1962, capítulo 20, página 298).

9. *El punto de vista de los científicos experimentales*

El matemático sueña con mediciones de exactitud infinita, con definir, por ejemplo, la posición de un punto sin ningún error posible. Esto significaría un experimento que produjera una cantidad infinita de información, lo cual es físicamente imposible. Uno de los resultados más importantes de la teoría de la información se conoce como el "principio de anentropía de la información", expresando que cualquier información obtenida en un experimento deberá pagarse en anentropía. Como ha dicho D. Gabor: "No se puede obtener algo por nada, ni siquiera una observación." Si un experimento suministra una información ΔI, debe haber habido un incremento de entropía

$$\Delta S \geqq \Delta I \qquad (4)$$

Sea AB la recta dada, Figura 2.12. El problema es encontrar sobre AB un punto H tal que,

$$AB \cdot HB = AH^2.$$

La solución es la siguiente: Constrúyase sobre AB el cuadrado $ABDC$, y bisáctese en E el lado AC. Prolónguese AC a lo largo de A. Hágase girar sobre E el segmento EB hasta que caiga sobre la prolongación de AC; sea F el punto donde cae el extremo del segmento. Determínese sobre AB un segmento AH igual a AF.

Afirmamos que H es el punto buscado. En efecto, si completamos el cuadrado $AFGH$, y prolongamos GH hasta K, podremos aplicar el Teorema 6 al lado AC, bisectado en E, que tiene añadido el segmento AF. Entonces

$$FC \cdot FG + AE^2 = EF^2$$

ó

$$(2\alpha + \beta) \cdot \beta + \alpha^2 = (\alpha + \beta)^2.$$

Puesto que

$$EF = EB,$$

podemos aplicar el Teorema 5 (Teorema de Pitágoras) para obtener

$$FC \cdot FG + AE^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2,$$

o sea

$$(2\alpha + \beta) \cdot \beta + \alpha^2 = \alpha^2 + (2\alpha)^2.$$

Ahora sustraemos AE^2 de ambos miembros, y llegamos a

$$FC \cdot FG = AB^2,$$

es decir, a

$$(2\alpha + \beta) \cdot \beta = (2\alpha)^2,$$

que expresa en términos geométricos la igualdad del rectángulo $FGCK$ y del cuadrado $ABCD$. A continuación Euclides sustrae de cada una de dichas figuras el área común a ambas, es decir, el rectángulo de lados AC y AH; con esto queda, de una parte, el cuadrado de lado AH, y, de otra, el rectángulo de lados HB y BD. Rectángulo y cuadrado son, por lo tanto, iguales. Entonces,

$$AH^2 = HB \cdot BD.$$

pero, como $BD = AB$, tenemos que

$$AH^2 = HB \cdot AB,$$

esto es,

$$\beta^2 = (2\alpha - \beta) \cdot 2\alpha.$$

que completa la demostración

Si hacemos $AB = a$, es decir, $2\alpha = a$, entonces es una solución de la ecuación cuadrática

$$x^2 = (a - x) \cdot a$$

ó

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Estas ecuaciones y sus soluciones aparecieron al comienzo de esta sección cuando introdujimos el enfoque moderno de la construcción del pentágono regular.

Observemos que Euclides ha resuelto en este teorema una ecuación cuadrática por un método bien diferente de los empleados por los babilonios. La solución

$$x = \tfrac{1}{2}a\,(\sqrt{5} - 1)$$

contiene, como bien sabemos, un número irracional; por esta razón, era necesario utilizar un procedimiento geométrico cuando no se conocían aún los números irracionales.

El Teorema 7 es un caso particular de cierta clase de teoremas en los que se resuelven diversas formas de ecuaciones cuadráticas por medio de teoremas, como vimos en el 4 y el 6. Teoremas de este tipo se encuentran, sobre todo, en el Libro VI. Reconocemos en estas ecuaciones las típicas ecuaciones babilónicas, pero el procedimiento geométrico permite soluciones irracionales, aunque excluye las negativas.

Después de la introducción de los conceptos de proporcionalidad, el Teorema 7 reaparece en VI, 11 relacionado con el problema de dividir un segmento de recta en *media y extrema razón*. Esto significa dividir un segmento dado a en dos partes, x y $a - x$, tales que una de ellas, x por ejemplo, sea media proporcional entre todo el segmento a y la otra parte, $a - x$; es decir,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x},$$

que equivale a

$$x^2 = a(a - x),$$

que es, precisamente, nuestra ecuación. El punto H en la figura 2.12 divide, en consecuencia, a AB en media y extrema razón. Esta división es llamada *sección áurea*, y el segmento x, "segmento áureo de a". Estos términos son de origen reciente; en la antigüedad se hablaba únicamente de *la* sección. Se suponía que era particularmente armoniosa y placentera a la vista.

Pasaremos a considerar ahora tres teoremas tomados del Libro III, que está dedicado a la geometría del círculo.

Teorema 8 (III, 36). *Si desde un punto P, exterior a un círculo, se traza una recta tangente en T a la circunferencia, y otra recta arbitraria cualquiera que corte a la circunferencia en R y en S, entonces tendremos que*

$$PR \cdot PS = PT^2.$$

Este teorema establece que, dados un círculo y un punto P, el producto $PR \cdot PS$ *es constante* e igual a PT^2; a esta *constante*

En la demostración Euclides considera los dos casos que agotan todas las posibilidades:

1. La recta trazada desde P pasa por el centro C, y
2. La recta no pasa por C.

El caso (1) está representado en la Figura 2.13a. El segmento RS, bisectado en C, tiene añadido un segmento PR; entonces, de acuerdo con el Teorema 6,

$$PR \cdot PS + RC^2 = PC^2.$$

Ahora bien, como RC y TC son radios,

$$RC^2 = TC^2,$$

y, si sustraemos esta igualdad de la precedente, resultará

$$PR \cdot PS = PC^2 - TC^2;$$

pero el Teorema de Pitágoras nos da

$$PC^2 - TC^2 = PT^2.$$

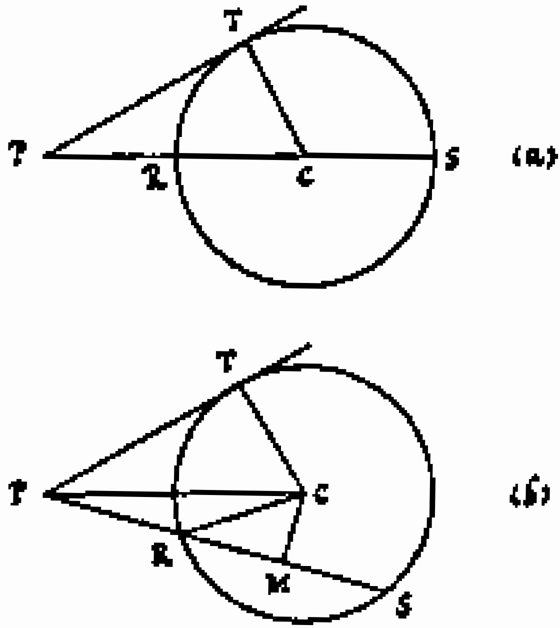

Figura 2.13

con lo que arribamos a la relación deseada

$$PR \cdot PS = PT^2$$

Para el caso (2) consideraremos la Figura 2.13b. M es el punto medio de RS; CM es perpendicular a RS. De nuevo el Teorema 6 puede ser aplicado:

$$PR \cdot PS + RM^2 = PM^2.$$

Si añadimos CM^2 a ambos miembros, obtendremos

$$PR \cdot PS + (RM^2 + CM^2) = (PM^2 + CM^2).$$

Una conveniente aplicación del Teorema de Pitágoras a los términos encerrados entre paréntesis reduce la igualdad anterior a,

$$PR \cdot PS + RC^2 = PC^2,$$

que es el punto de partida del caso (1). De modo que mostramos otra vez la igualdad

$$RC^2 = TC^2$$

para lograr la relación

$$PR \cdot PS = PC^2 - TC^2 = PT^2,$$

que buscábamos.

Teorema 9 (III, 37). *Si desde un punto A exterior a un círculo se trazan dos rectas, una que corte a la circunferencia en B y en F, y otra que encuentre a la circunferencia en D, y si, además,*

$$AB \cdot AF = AD^2,$$

entonces, AD es tangente a la circunferencia en D.

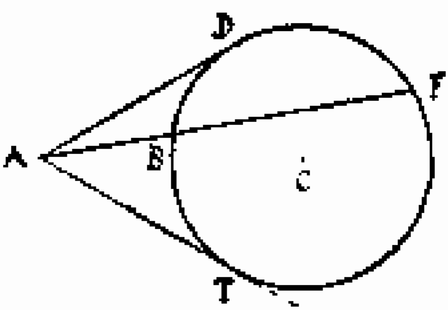

Figura 2.14

La prueba es muy sencilla. Desde A se traza la tangente AT, Figura 2.14. Por el Teorema 8 sabemos que

$$AB \cdot AF = AT^2,$$

pero esto significa que

$$AT = AD.$$

En efecto, de la simetría de los segmentos AT y AD respecto a la recta que pasa por los puntos A y C se sigue que D es un punto de tangencia.

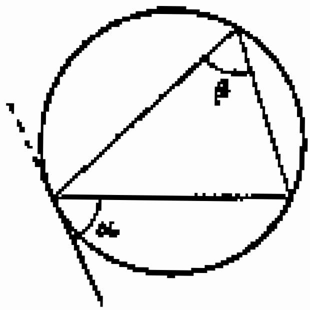

Figura 2.15

La Figura 2.15 servirá al lector para recordar el siguiente Teorema:

TEOREMA 10 (III, 32). *El ángulo α entre una tangente y una cuerda es igual al ángulo β contenido en el arco determinado por la cuerda, y hacia el lado de la cuerda opuesto a α.*

PROBLEMA

2.2 Formule cuidadosamente y pruebe el teorema 10. Por fin estamos preparados para atacar la construcción del pentágono.

TEOREMA 11 (IV, 10). *Construir un triángulo isósceles tal que cada uno de los ángulos de la base sea el doble del tercero restante.*

Este triángulo debe resolver nuestro problema, porque sus ángulos han de ser de 36°, 72° y 72° respectivamente, y 72° es la quinta parte de 360°.

Sea AB un segmento de recta dado, (Figura 2.16). Se determina sobre AB, de acuerdo con el Teorema 7, un punto C tal que

$$(1) \qquad AB \cdot CB = AC^2.$$

Se describe después una circunferencia de centro A y radio AB; se trazan la cuerda $BD = AC$ y los segmentos AD y CD. El triángulo ABD es isósceles; por lo tanto,

$$(2) \qquad \beta = \gamma + \delta.$$

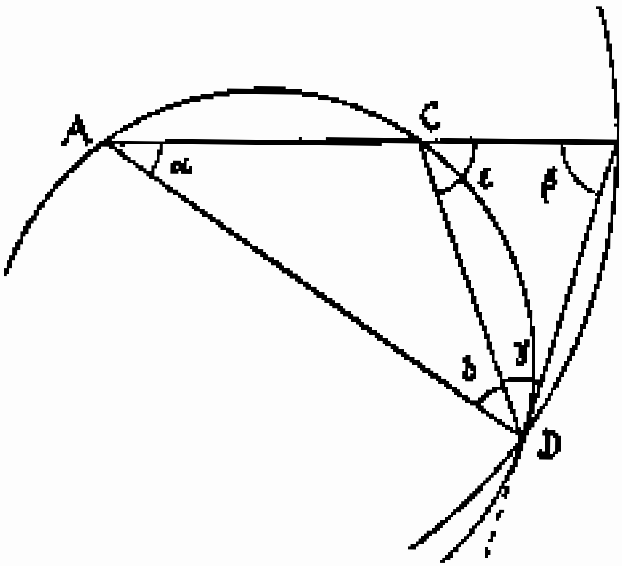

Figura 2.16

El paso siguiente es probar que el triángulo ABD cumple la condición pedida por el teorema, es decir, que

$$\beta = \gamma + \delta = 2\alpha.$$

Para ello, describiremos la circunferencia circunscrita al triángulo ACD, y la llamaremos "circunferencia menor". Si en (1) se sustituye AC por BD, tendremos que

$$CB \cdot AB = BD^2,$$

que, de acuerdo con el Teorema 9, significa que BD es tangente en D a la circunferencia menor. Ahora bien, el Teorema 10 nos asegura que

$$\alpha = \gamma,$$

luego, todo lo que resta es probar que

$$\alpha = \delta,$$

puesto que

$$\alpha = \gamma,$$

es verdadero que

$$(3) \qquad \alpha + \delta = \gamma + \delta.$$

Por otra parte, ε es el suplemento del $\measuredangle\, ACD$ del triángulo ACD, y, como consecuencia, es también igual a la suma de los otros dos ángulos de dicho triángulo, ya que esta suma, añadida a $\measuredangle\, ACD$, es también 180°. Entonces,

$$\varepsilon = \alpha + \delta,$$

pero por (3)

$$\varepsilon = \gamma + \delta;$$

luego, por (2) será

$$\varepsilon = \beta,$$

cuyo significado inmediato es que el triángulo CDB es isósceles. Esta conclusión asegura la igualdad de CD con BD que por construcción es, a su vez, igual a AC. Entonces,

$$CD = CA,$$

que implica directamente que también el triángulo ACD es isósceles. Por lo tanto,

$$\alpha = \delta,$$

como necesitábamos. Como ya habíamos probado anteriormente que

$$\alpha = \gamma,$$

podemos concluir que cada uno de los ángulos de la base BD del triángulo isósceles ABD es el doble del ángulo A. Así, el ángulo A es de 36°, y la construcción del pentágono resulta entonces una tarea sencilla que Euclides finaliza en IV, 11. Lo que aparece en el Libro I no es sino un diagrama de esta construcción, Figura 2.17.

Por último, Euclides construye el pentadecágono regular (polígono de 15 lados) en IV, 16, Figura 2.18. Para convencernos de la validez de esta construcción, no necesitamos más que observar que,

$$\frac{2}{5}\cdot 360° - \frac{1}{3}\cdot 360° = \frac{1}{15}\cdot 360°.$$

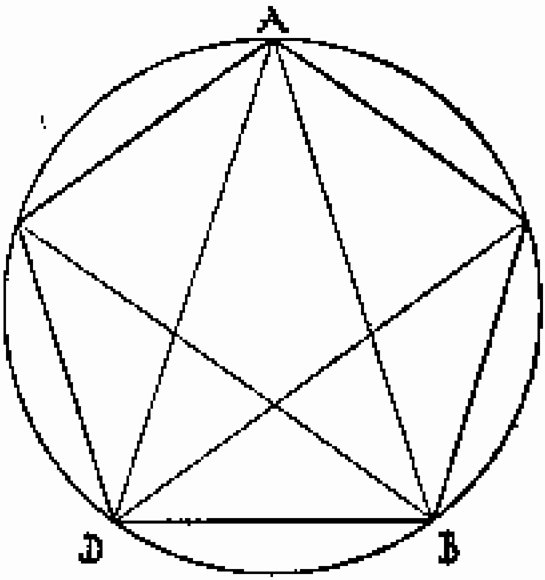

Figura 2.17

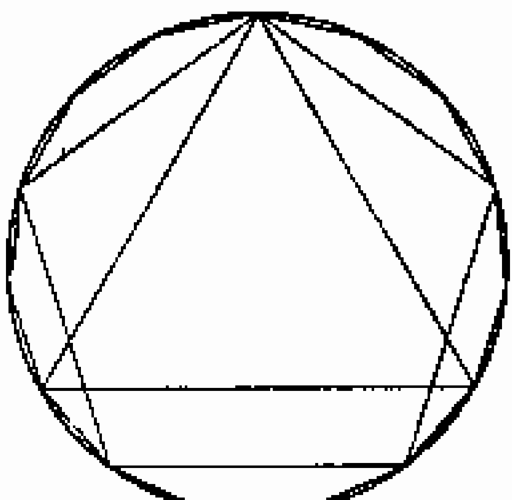

Figura 2.18

Echemos una mirada de conjunto a esta exposición de las matemáticas euclidianas. Es obvio que se diferencian de las matemáticas babilónicas tanto en sus objetivos como en los métodos. Es cierto que en la estructura euclidiana reconocemos diversos elementos babilónicos, como el Teorema de Pitágoras y las ecuaciones cuadráticas, pero aparecen bajo nuevos aspectos.

A Euclides no le interesa el establecer métodos para resolver variaciones triviales de los problemas típicos fundamentales. Su afán es fijar teoremas generales lo suficientemente fuertes que lo hagan capaz de resolver problemas cruciales como el de la construcción del pentágono regular; su gran desvelo, estructurar cuidadosamente la cadena de demostraciones previas que enlaza un teorema con los axiomas. Observaremos en particular que Euclides procura que esa cadena contenga la menor cantidad posible de nociones distintas; así se abstiene deliberadamente de usar argumentos basados en la semejanza. Donde nosotros encontramos muy natural establecer entre segmentos la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

para obtener

$$a \cdot d = b \cdot c,$$

Euclides deduce directamente esta segunda igualdad. Puede hacerlo así gracias a sus poderosos teoremas sobre áreas de polígonos.

Vimos también cómo resolvía mediante algún procedimiento geométrico directo las ecuaciones que resultaban de los planteamientos hechos; Euclides estaba obligado a actuar así porque no tenía modo de expresar la solución

$$x = \tfrac{1}{2}r\,(\sqrt{5} - 1)$$

que contiene un número irracional, y que nosotros usamos como paso intermedio.

Pero, por encima de todo, reconocemos que esto es matemática genuina que puede disfrutarse de inmediato sin respetar su edad venerable, y que aún hoy forma parte del organismo vivo de las matemáticas. La capacidad de crear semejantes estructuras intelectuales, y de deleitarse en ellas, es una de las facultades que distinguen al hombre de las bestias.