Tres ejemplos de las matemáticas de Arquímedes

Asger Aaboe

3.1 *Vida de Arquímedes*

No existe tratado alguno de matemática clásica que supere en solidez de fondo y elegancia de forma a los trabajos de Arquímedes. Así lo reconocieron aun los antiguos como demuestra Plutarco quien comenta la obra de Arquímedes con estas palabras:

> "No es posible encontrar en la geometría cuestiones más difíciles e intrincadas, ni explicaciones más sencillas y brillantes. Algunos lo atribuyen a su genio; otros, a un increíble esfuerzo y desvelo que producen esos resultados aparentemente fáciles y naturales."

Plutarco, quien vivió en la segunda mitad del siglo primero de nuestra era, hizo el anterior comentario en *Vidas de los Hombres Ilustres de Grecia y de Roma* (*Vidas Paralelas*); más específicamente, en la vida de Marcelo. Marcelo, fue el general que, al frente del ejército romano, sitió y, por último, tomó la colonia griega de Siracusa, en Sicilia, durante la segunda guerra púnica (218-201 a. C.). Las ingeniosas maquinarias de guerra (los espejos ustorios) inventados por Arquímedes jugaron un importante papel en la defensa de la ciudad de Siracusa; por esta razón, Plutarco dedicó a Arquímedes un extenso escrito.

Arquímedes iniciaba cada uno de sus libros con un prólogo-dedicatoria donde frecuentemente exponía algunos antecedentes del asunto que iba a tratar. Estos prólogos contienen preciosas informaciones para la historia de las matemáticas, y aun a veces, arrojaban alguna luz sobre la propia vida de Arquímedes. En la literatura clásica encontramos, además, algunas referencias aisladas sobre Arquímedes; así es el matemático griego sobre el que poseemos una mayor información biográfica, que aunque escasa, es valiosa.

Arquímedes murió el 212 a. C., durante el saqueo que siguió al sitio y asalto de Siracusa. Como se dice que vivió hasta los

75 años de edad, debe haber nacido alrededor del 287 a. C. En el prólogo de su libro *El contador de arena* (El Arenario) habla de su padre Fidias, el astrónomo, de quien no tenemos ningún otro dato. Se dice que Arquímedes estudió en Alejandría, centro del saber en su época; pero lo cierto es, según se desprende de sus prólogos, que tuvo amigos entre los matemáticos alejandrinos, y que pasó la mayor parte de su vida en Siracusa donde estuvo ligado a la familia real por una gran amistad o según algunos, por parentesco.

La vida de Arquímedes estuvo dedicada a útiles empeños que abarcaban desde las matemáticas puras y la astronomía hasta la mecánica y la ingeniería. En realidad, han sido sus descubrimientos prácticos los que le han dado fama universal. Si hemos de creer las anécdotas que sobre él se conservan, Arquímedes no tuvo por qué añadir una gota de dramatismo a sus demostraciones; así, cuenta Plutarco, según la magnífica versión de Dryden:

> "Arquímedes, sin embargo, en un escrito al Rey Hierón, de quien era amigo y familiar allegado, afirmó que, dada la fuerza, cualquier peso puede ser movido, y, basado en la consistencia de su demostración, llegó a jactarse, según hemos oído, de poder mover la Tierra si existiera otra Tierra a la que pudiera trasladarse para aplicar desde allí una fuerza sobre ésta. Como Hierón quedase maravillado al leer esto, y le rogase que verificara tal aserto con una demostración práctica donde se mostrara un gran peso movido por una maquinaria pequeña, Arquímedes escogió para ello, en el arsenal del Rey, una embarcación de carga que no podía ser sacada del astillero a no ser con un gran esfuerzo de muchos hombres. Hizo subir a la nave un considerable número de pasajeros y toda la carga posible, mientras que él se colocaba lo más lejos que podía. Entonces, apenas sin esfuerzo alguno, con sólo sostener en una mano el extremo de una polea, y jalar gradualmente las cuerdas con la otra, arrastró el barco en línea recta, tan suave y uniformemente como si estuviera en el mar."

La polea compuesta a que se refería este pasaje fue otro de los inventos de Arquímedes. También encontramos en este relato de Plutarco la famosa frase atribuida a Arquímedes por Pappus: "Dadme un punto de apoyo, y moveré la Tierra". Como veremos, este dicho viene perfectamente de acuerdo con sus estudios teóricos sobre la mecánica.

Plutarco continúa la anécdota referida agregando que Hierón, impresionado por el resultado del experimento, le pidió a Arquímedes que construyera maquinarias bélicas ofensivas y defensivas.

Así lo hizo Arquímedes, y sus inventos encontraron buen uso en el reinado de Hierónimo, nieto y sucesor de Hierón, durante la defensa contra los romanos comandados por Marcelo. Plutarco describe dramáticamente la eficacia de tales artefactos en las luchas tanto a corta como a larga distancia, tanto en tierra como en mar. Tan aterrorizados llegaron a estar los romanos que, "con sólo ver un trozo de cuerda o un pedazo de madera en las murallas de la ciudad, comenzaban a gritar que Arquímedes iba a lanzar sobre ellos alguna nueva arma, y, volviendo las espaldas, huían". Marcelo tendió un prolongado asedio a la ciudad, y finalmente pudo tomarla. El General romano intentó impedir, cuanto le fue posible, que sus soldados se entregaran al pillaje y a la depredación, pero se sintió apesadumbrado al ver que no se prestaba atención a su orden.

> "Nada, sin embargo, afligió tanto a Marcelo como la muerte de Arquímedes, quien, dedicado a resolver un problema mediante un diagrama, tenía de tal manera entregada su mente y sus ojos al objeto de su especulación, que no se enteró ni de la caída de la ciudad ni de la entrada de los romanos. Durante este arrobamiento de estudio y meditación, un soldado se acercó repentinamente a Arquímedes y le ordenó que lo siguiera al cuartel de Marcelo; como Arquímedes se negara a obedecer mientras no hubiera encontrado una solución al problema que tenía planteado, el soldado, enfurecido, desenvainó la espada y lo atravesó con ella. Cuentan otros escritores que un soldado romano, acercándose a él espada en mano, le advirtió que lo mataría, y que Arquímedes, volviendo la cabeza hacia su atacante le rogó ardientemente que esperara unos instantes para darle muerte, pues no quería dejar inconcluso e imperfecto el trabajo que estaba realizando; el soldado no se conmovió ante esta súplica, e inmediatamente lo mató. Hay otros que relatan que cuando Arquímedes llevaba a Marcelo unos instrumentos matemáticos (cuadrantes, esferas y ángulos) con los cuales se podía medir a simple vista la magnitud del Sol, fue descubierto por unos soldados que, al pensar que era oro lo que él llevaba en el cofre, lo mataron. Lo cierto es que su muerte afectó tan profundamente a Marcelo que éste siempre consideró que el soldado que arrancó aquella vida no era más que un asesino; más aún, Marcelo hizo traer a su presencia la familia de Arquímedes, y la honró con señalados favores."

Plutarco ofrece aquí tres versiones de la muerte de Arquímedes, que se tornan tanto más dramáticas cuanto más se alejan cronológicamente del suceso. En Tzetzes y Zonaras encontramos la variante en la que Arquímedes, que se encontraba dibujando en la arena, le dijo a un soldado que se le acercó demasiado:

"Amigo, apártese de mi diagrama"; al oír esto, el soldado (que, como militar romano, no podía sufrir tal afrenta) se enfureció tanto que lo mató. He ahí el origen del moderno dicho: "No estropees mis círculos."

Este es uno de los pocos episodios llenos de verdadero dramatismo, en la historia de los matemáticos. Muchos años después, Galois, con solamente 21 años, trataba frenéticamente de escribir sus acertadas ideas la noche anterior al duelo donde, como presentía, iba a morir. Unos pocos genios matemáticos, el noruego Niels Henrik Abel, por ejemplo, murieron jóvenes y pobres, minados por la tuberculosis; Condorcet, por citar uno más, tuvo una muerte violenta después de la revolución francesa. Generalmente, sin embargo, las biografías de los matemáticos, comparadas, digamos con las de los poetas, no están salpicadas de episodios llenos de dramatismo como los descritos.

Arquímedes, como Einstein en nuestros días, llegó a ser la imagen popular del "sabio", y se le atribuyeron muchas anécdotas que lo presentan como un hombre permanentemente sumido en meditaciones. Así leemos en Plutarco que Arquímedes se entregaba tan profundamente a sus reflexiones que "descuidaba su persona a tal extremo que cuando era obligado por la fuerza a tomar un baño o a untar su cuerpo con aceites, solía trazar figuras geométricas en la ceniza de la lumbre, y diagramas en el aceite que cubría su cuerpo, mientras se mantenía en un estado de arrobamiento total, y de verdadero éxtasis divino en su amor y deleite por la ciencia".

También tenemos la narración que hace Vitruvio, aunque creemos que está ligeramente alterada, de cómo Arquímedes descubrió durante uno de sus (quizás obligado) baños, la ley de fluctuación que todavía lleva su nombre; este descubrimiento lo excitó en tal grado que se lanzó a correr completamente desnudo por las calles de Siracusa, a la vez que gritaba: "Eureka, Eureka", que en griego significa "Lo encontré, lo encontré". Su descubrimiento le permitió confirmar las sospechas que tenía el Rey Hierón de que un joyero, al que el Rey le había entregado su corona para una reparación, había sustituido por plata parte del oro. Arquímedes pudo entonces determinar la densidad de la corona, y encontró que era menor que la del oro.

Estos relatos sobre las distracciones de Arquímedes pueden parecernos un tanto ridículos, sin embargo, no debemos olvidar que una de las características de los genios como Arquímedes es el poseer una enorme capacidad de concentración absoluta, durante un largo tiempo, con total exclusión de todo lo demás.

Hemos visto hasta aquí, en resumen, todos los datos sobre la vida de Arquímedes que se han podido recopilar en otros libros que no sean sus propias obras. Algunos rasgos de su personalidad pueden además, descubrirse en los prefacios de sus obras y en las anécdotas acerca de él; así hemos captado algunos destellos de su sentido del humor. Lo notamos en su deleite durante el dramático episodio de la plaza, cuando demostró en la práctica la ley de la polea. En el prefacio de su tratado *Sobre las Espirales* nos cuenta que tenía la costumbre de enviar varios de sus teoremas a sus amigos de Alejandría, pero sin las demostraciones, con el fin de que ellos tuvieran el placer de demostrar esos enunciados. Sucedió sin embargo, que algunos de sus corresponsales publicaron esos teoremas como propios pero ni siquiera se preocuparon por probarlos. Esta actuación molestó tanto a Arquímedes que en el siguiente envío incluyó, como un escarmiento, dos teoremas falsos, "para que aquellos que afirman haberlo descubierto todo, pero no ofrecen prueba alguna, puedan ser refutados de haber pretendido, en realidad, descubrir lo imposible".

3.2. *Las obras de Arquímedes*

Si *Los elementos* de Euclides no fueron sino una compilación de las conclusiones de sus antecesores, cada tratado de Arquímedes, por el contrario, es una nueva contribución al caudal de los conocimientos matemáticos.

Se han conservado los textos griegos de las siguientes obras, que enumeramos en su probable orden cronológico:

Sobre el Equilibrio de las Figuras Planas, I
Cuadratura de la Parábola
Sobre el Equilibrio de las Figuras Planas, II
Sobre la Esfera y el Cilindro, I, II
Sobre las Espirales
Sobre los Conoides y Esferoides
Sobre los Cuerpos Flotantes, I, II
Mediciones en el Círculo
El Arenario

La edición definitiva del texto griego fue hecha por J. L. Heiberg, quien, además, descubrió en 1906 el texto griego de otro libro de Arquímedes, *El Método*, que hasta ese momento se consideraba perdido. El descubrimiento tuvo lugar en la biblioteca de un monasterio de Constantinopla. El texto había sido escrito sobre un pergamino en el siglo x; más tarde, en el siglo XIII, el texto fue raspado para poder utilizar nuevamente el pergamino, material costosísimo y difícil de obtener, en la transcripción de un libro de oraciones y liturgia. A estos textos que han sido raspados y que han recibido sobre ellos un nuevo escrito se les da el nombre de *palimpsestos* (del griego, "raspado nuevamente"). Naturalmente, la lectura de un palimpsesto es dificilísima. Afortunadamente Heiberg pudo rehacer casi totalmente el texto borrado, y sacar a la luz una buena edición que contiene la mayor parte de este notable libro de Arquímedes, así como trozos de otras obras que no están plenamente identificadas o que han llegado incompletas hasta nosotros; entre éstas, *El problema de los Bueyes*, que se refiere a un pasatiempo matemático. Es probable que *El Método* sea ya la última de las obras de Arquímedes que se han conservado. Este libro cierra la lista que ofrecimos más arriba.

A través de la sobria narración en que Heiberg expone su descubrimiento trasciende su alegría y justificado orgullo por este singular hallazgo que fue para él una bien merecida recompensa a su paciente y brillante labor de investigador.

Además de los textos griegos ya mencionados, existen dos tratados que lograron sobrevivir, aunque parcialmente adulterados, gracias a la traducción árabe de Thabit ibn Qurrah (836-901). Uno de ellos es el *Libro de los Lemas*, cuya versión latina está incluida en la edición de Heiberg; de este libro hemos tomado la "trisección del ángulo" que analizaremos adelante. El otro fue descubierto por Schoy, y publicado en 1927; de él tomaremos la construcción del heptágono.

J. L. Heath llevó al inglés la obra de Heiberg. En su traducción introdujo Heath la notación matemática moderna. Esta versión inglesa se consigue hoy fácilmente.

De otras obras de Arquímedes sólo conocemos los títulos; los textos han desaparecido. Sabemos, por ejemplo, que Arquímedes construyó un ingenioso aparato que representaba los movimientos del Sol, la Luna y otros cuerpos celestes, y que llegó a escribir un libro donde describía la construcción de tal maquinaria. Este libro tenía por título *Sobre la Construcción de Esferas*.

A continuación haremos una breve descripción parcial del contenido de los libros de Arquímedes. Nuestro único propósito es ofrecer una vista de conjunto sobre la naturaleza y los objetivos de las obras de nuestro autor.

En sus tratados *Sobre el Equilibrio de las Figuras Planas*, comienza por probar la "ley de la palanca" a partir de simples axiomas; más adelante se basa en dicha ley para encontrar el centro de gravedad de láminas de formas diversas. Es interesante saber que también debemos a Arquímedes el concepto de centro de gravedad. La antigüedad nos ha legado únicamente tres libros sobre Física cuyos contenidos tienen aún importancia y significado para el lector moderno; éstos son: *Sobre el Equilibrio de las Figuras Planas* y los dos volúmenes *Sobre los Cuerpos Flotantes*. Las Proposiciones 5 y 6 del libro I de *Sobre los Cuerpos Flotantes*, contienen el llamado "Principio de Arquímedes" claramente establecido y bellamente justificado.

Sin embargo, la mayor parte de las obras de Arquímedes está dedicada a las matemáticas puras. Los problemas analizados y resueltos por Arquímedes son casi todos de tal naturaleza que hoy forman parte del cálculo diferencial e integral. Así, por ejemplo en *Sobre la Esfera y el Cilindro*, se llega a determinar que el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circunscrito a ella, mientras que su superficie equivale a cuatro círculos máximos.

En *Mediciones en el Círculo* Arquímedes comienza por probar que el área A de un círculo de radio r es igual al área de un triángulo cuya base tiene la misma longitud que la circunferencia C del círculo, y cuya altura es r, es decir

$$A = \tfrac{1}{2}\, rC.$$

Esta igualdad implica que la razón expresada por el área del círculo y el cuadrado de su radio, es la misma que existe entre la circunferencia y el diámetro. Esta razón común es hoy conocida por π. Arquímedes encontró que

$$3^{10}/_{71} < \pi < 3^{1}/_{7}$$

mediante el cálculo de los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito de 96 lados. La cota superior corresponde, como se

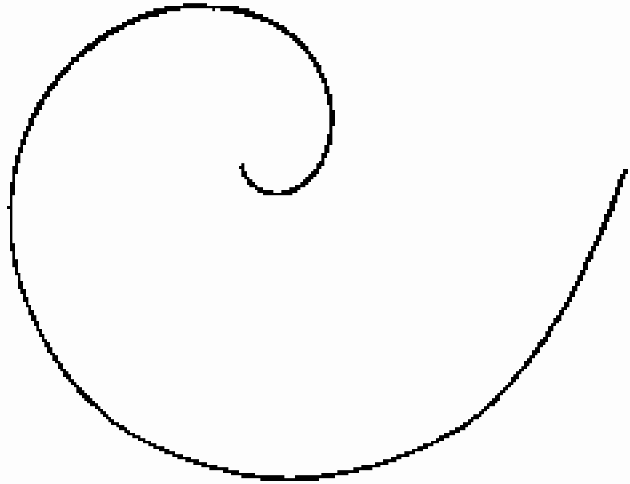

Figura 3.1

observa fácilmente a $^{22}/_{7}$ que se suele dar frecuentemente como un valor aproximado de π.

En su libro *Sobre las Espirales* discute la curva que tan apropiadamente llamamos *espiral de Arquímedes*, Fig. 3.1. Si una semirrecta de origen en O gira con movimiento circular uniforme, como las agujas de un reloj, alrededor del origen, y un punto P sale de O y se mueve uniformemente a lo largo de la semirrecta, P irá describiendo una espiral de esta clase. La ecuación de la curva, expresada en nuestro sistema de coordenadas polares, viene dada por

$$r = a \cdot \theta\,, \quad \theta \geqslant 0.$$

Sorprendentes fueron las muchas propiedades que encontró Arquímedes en esta curva; entre éstas, citaremos las siguientes: sea la curva abierta de origen O y extremo A (Fig. 3.2) la primera vuelta (espira) de una espiral de Arquímedes, esto es, el gráfico obtenido para $0 \leq \theta \leq 2\pi$; el área limitada por la curva y el segmento OA es igual a un tercio del círculo de radio OA. Más aún, si AB es tangente a la curva en A, y OB es perpendicular a OA, entonces la longitud del segmento OB es igual a la circunferencia de radio OA. Aunque Arquímedes no lo enunció explícitamente, estas relaciones implican que el área del triángulo OAB es igual al área del círculo de radio OA, como podemos compro-

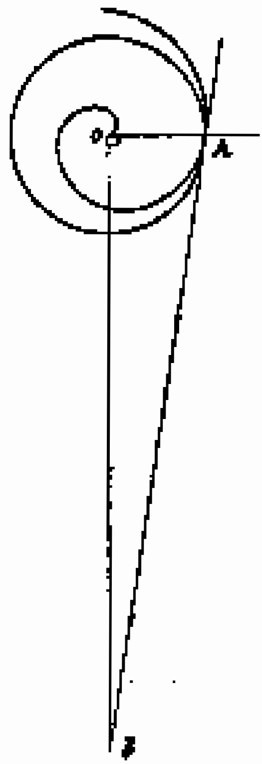

Figura 3.2

bar fácilmente si aplicamos el teorema que mencionamos al hablar de *las mediciones en el círculo*. Así llegó Arquímedes tanto a la *rectificación* de la circunferencia, como a la *cuadratura* del círculo, aunque por medios bastante complicados. (*Rectificar* una curva, que en este caso es una circunferencia, es determinar un segmento de recta cuya longitud sea igual a la longitud de la curva dada; *cuadrar* una superficie es determinar un cuadrado cuya área sea igual al área de la superficie propuesta).

En la *Cuadratura de la Parábola* prueba el teorema donde establece que un segmento parabólico equivale a cuatro tercios del triángulo inscrito de mayor área; tal era la pasión que por este teorema sentía Arquímedes, que le buscó y encontró tres demostraciones distintas. *El Arenario*, dedicado a Gelón, hijo del Rey Hierón, es una obra de carácter más popular. En *El Arenario* expone Arquímedes una notación numérica de su propia invención, que se prestaba admirablemente bien para expresar números muy grandes. Para poner a prueba su notación, acometió el trabajo de escribir un número, 10^{63}, mayor que el número de granos de arena necesarios para llenar todo el Universo, aun cuando el Universo tuviera las dimensiones que suponía Aristarco. Este autor había propuesto un sistema planetario heliocéntrico; la Tierra giraba una vez al año alrededor de un Sol inmóvil. Para poder justificar que las distancias entre las estrellas fijas se conservaran aparentemente inmutables durante todo el año, Aristarco se vio obligado a suponer que la esfera celeste tenía unas dimensiones mayores que las que comúnmente se le atribuían. Arquímedes, al tratar este asunto, se convierte en una de las pocas fuentes que poseemos para conocer la astronomía antigua griega; nos refiere además, los esfuerzos que realizó personalmente para medir el diámetro aparente d del Sol. Su investigación lo llevó a

$$90°/200 < d < 90°/164;$$

de hecho, se admite que el valor $d = ½°$ es una aproximación no rigurosa.

Probablemente, el *Método* cierra cronológicamente la lista de sus obras. En este tratado Arquímedes aplica cierto método mecánico, como él lo llamó, a una gran diversidad de problemas. Los resultados que obtiene con dicho método, que por cierto está íntimamente relacionado con nuestra integración, son impresionantes.

Este método, según Arquímedes, no proporciona la convicción de una demostración, sino que está de acuerdo con la naturaleza de ciertos argumentos razonables. Así, hace ver la utilidad primordial de tales argumentos para conjeturar la existencia de algunas propiedades, y formularlas en teoremas que después se esforzará en probar rigurosamente. Nuestro último ejemplo de las matemáticas de Arquímedes está tomado del *Método*.

Esta reseña superficial e incompleta nos da, sin embargo, una buena idea de la capacidad, originalidad y amplitud matemáticas de Arquímedes. Ofrecer aquí con lujo de detalles algunas de sus destacadas series de demostraciones, serviría, sin duda, para justificar nuestra admiración por Arquímedes, pero, por otra parte, estaría fuera de las limitaciones que nos hemos impuesto en este libro. Esperamos que el lector cuya curiosidad por estas magníficas contribuciones a las matemáticas antiguas se haya despertado con esta lectura, consultará por sí mismo las obras de Arquímedes.

Antes de pasar a una breve exposición de algunos ejemplos de la producción de Arquímedes, mencionaremos que gran parte de la fama que gozó en la antigüedad la debe a sus inventos. La polea compuesta, cuya efectividad probó en el experimento de la playa, y aplicó después a varias máquinas bélicas, es una consecuencia natural de su profundo conocimiento teórico de esa rama de la mecánica que hoy llamamos estática. Inventó también el tornillo sin fin, que se utilizó y aún se utiliza, por ejemplo, para elevar el agua. Por último, sus descubrimientos como ingeniero mecánico, incluyen la construcción del aparato astronómico ya mencionado, y sobre todo, un órgano hidráulico.

3.3 *Construcción de polígonos regulares*

Modernamente la palabra "construcción" en geometría plana ha llegado a ser sinónimo de *Construcción mediante un compás y una regla.* Las únicas operaciones permitidas por las leyes que rigen estas construcciones son las siguientes:

1. Se puede trazar una circunferencia tomando cualquier punto conocido como centro y cualquier segmento de recta conocido, como radio.
2. Se pueden unir cualesquiera dos puntos conocidos por medio de un segmento de recta.
3. Se puede prolongar tanto como se quiera un segmento de recta conocido.

(Al vocablo "conocido" se le da el significado de *dado por hipótesis* o de "construido con anterioridad de acuerdo con las operaciones permitidas").

Estas son restricciones severas, y resulta sorprendente lo que podemos realizar a pesar de esas limitaciones.

Las investigaciones sobre construcción han tomado, durante las dos últimas centurias, dos orientaciones: 1) La búsqueda de construcciones equivalentes. (Por *construcciones equivalentes* entendemos las llevadas a cabo con una nueva serie de instrumentos y de operaciones lícitas, de tal manera que todo lo que pueda ser construido mediante regla y compás conforme a las leyes antedores, pueda también ser construido con los nuevos instrumentos y las nuevas leyes; y recíprocamente, todo lo que pueda ser construido con los nuevos instrumentos y operaciones permitidas pueda ser también construido con regla, compás y las antiguas leyes). 2) Esfuerzos encaminados a determinar qué es lo que podemos, y principalmente lo que no podemos, construir con regla y compás si nos ceñimos a las operaciones enumeradas anteriormente.

En los comienzos del siglo diecisiete la primera orientación llevó a los investigadores a comprobar que todo lo construible con regla y compás, puede ser también construido con regla y un compás de abertura fija (compás enmohecido). Es evidente que se ha limitado ahora la operación (1), puesto que en un punto dado solamente se puede trazar una circunferencia, es decir, aquella cuyo radio corresponde a la separación que existe entre las puntas del compás fijo. El italiano Mascheroni publicó en el año 1797 un libro llamado *Geometría del Compasso*, donde demostró que se pueden construir con sólo compás todos los puntos que son construibles con regla y compás. Ya que dos puntos determinan una recta, podemos aceptar que un segmento de recta está construido cuando conocemos sus extremos; en general, un polígono se considera construido si conocemos sus vértices, porque es imposible que los lados se tracen si sólo contamos con un compás. El sorprendente descubrimiento de poder eliminar el uso de la regla sin necesidad de aceptar nuevas formas operativas hizo famoso a Mascheroni; sin embargo, en 1927 se descubrió que el danés Georg Mohr se le había anticipado desde 1672 en su obra *Euclides Danicus*, libro que fue olvidado durante doscientos años.

Durante el siglo diecinueve se descubrieron otras muchas construcciones equivalentes, por ejemplo: construcción con regla y una circunferencia fija de centro conocido, y construcción con regla y dos circunferencias fijas que se intersectan. Si usted ha perdido su compás, puede resolver el problema si dispone de una moneda de cincuenta centavos para trazar dos circunferencias que se corten, pero, si no dispone de ella, no podrá, pues es obvio que sólo la regla no es suficiente.

El otro aspecto de la investigación —la determinación de las construcciones posibles e imposibles— fue objeto del mayor interés. Citaremos un teorema, atribuido al gran matemático alemán C. F. Gauss (1777-1855). Se refiere a la pregunta: ¿Cuáles son los polígonos regulares construibles? Su enunciado es el siguiente:

Un polígono regular de n lados puede ser construido mediante regla y compás si, y solamente si, se cumple que

$$n = 2^{\alpha} \text{ ó } n = 2^{\alpha} \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_r,$$

donde $p_1, p_2, \ldots p_r$ *son números primos diferentes, de la forma*

$$p = 2^{2^{\beta}} + 1,$$

donde α y β son enteros $\geqq 0$.

Algunos comentarios de este teorema se presentan cuidadosamente ordenados. Su demostración es demasiado complicada para darla en este libro; podemos decir que Gauss vio la relación entre el problema geométrico de dividir un círculo en n partes iguales y el problema algebraico de resolver la ecuación

$$x^n = 1;$$

debido a que, cuando se representan en el plano complejo las n raíces de esta ecuación, se forman los vértices de un polígono regular de n lados inscritos en el círculo unitario.

Veamos lo que dice el teorema. El factor 2^{α} es fácil de entender porque, si construimos un polígono regular de cierto número de lados, podemos inmediatamente construir el de doble número de lados, con sólo bisectar todos los arcos de la circunferencia circunscrita. Del polígono de 15 lados, construido por Euclides, podemos, por lo tanto, obtener de inmediato los de 30, 60, 120, etc., lados.

Los números primos de la forma

$$2^{2^{\beta}} + 1$$

eran ya famosos antes de que Gauss descubriera su función en este problema de construcción. Se les llamaba *Números Primos de Fermat* desde que el matemático francés Pierre Fermat (1601-1665), fundador de la moderna teoría de los números, hizo la desafortunada sugestión "que todo número de esta forma es primo". Cuando β toma los valores

$$0, 1, 2, 3, 4,$$

$2^{2^{\beta}} + 1$ toma los valores

$$3, 5, 17, 257, 65537;$$

todos ellos son, sin duda, primos. En 1732 Euler (1707-1783) encontró que

$$2^{32} + 1 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Probaremos que $2^{32} + 1$ es divisible por 641; para ello, escribiremos $2^{32} + 1$ como una diferencia de dos enteros, cada uno de los cuales tiene por factor a 641.

Por otra parte,

$$641 = 5^4 + 2^4,$$

por tanto, 641 es un divisor de

$$A = 2^{28}(5^4 + 2^4) = 5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32}.$$

Además,

$$641 = 5 \cdot 2^7 + 1;$$

por consiguiente, 641 es un divisor de

$$(5 \cdot 2^7 + 1)\,(5 \cdot 2^7 - 1) = 5^2 \cdot 2^{14} - 1,$$

y, por lo tanto, de

$$B = (5^2 \cdot 2^{14} + 1)\,(5^2 \cdot 2^{14} - 1) = 5^4 \cdot 2^{28} - 1.$$

Se deduce entonces que 641 divide a

$$A - B = 2^{32} + 1.$$

En 1880 Landry demostró que

$$2^{64} + 1 = 274{,}177 \cdot 67{,}280{,}421{,}310{,}721.$$

Desde entonces las investigaciones sobre esos números han continuado; últimamente ha encontrado el auxilio de calculadoras electrónicas. Hasta hoy no han sido hallados más números primos de Fermat que los cinco arriba señalados. La suposición de Fermat está ampliamente estudiada, y muchos matemáticos se inclinan ahora a creer que esos cinco son los únicos números primos de Fermat que existen.

Podemos comparar con este teorema los resultados de Euclides. El ideó construcciones con regla y compás para el triángulo equilátero y el pentágono regular; notamos que 3 y 5 son los dos primeros números primos de Fermat. Más aún, construyó el polígono regular de 15 lados, que corresponde a $\alpha = 0$, $r = 2$, $p_1 = 3$ y $p_2 = 5$ en el teorema. Ningún progreso se realizó hasta que Gauss encontró una construcción para el polígono regular de 17 lados. Fue esta construcción, de la cual estaba muy orgulloso, la que señaló a Gauss el camino hacia el teorema general.

Debemos observar que este teorema implica que, en general, la trisección de un ángulo con regla y compás es imposible, porque si tal trisección fuera realizable (digamos en un ángulo de 60° ó 120°), podríamos construir un polígono regular de 9 lados a partir del triángulo equilátero; ahora bien, $9 = 3 \cdot 3$ no está formado por factores primos *diferentes*, según exige la fórmula de Fermat; por lo tanto, el polígono regular de 9 lados, no es construible con regla y compás.

Es un error muy generalizado creer que los griegos se limitaran solamente a construcciones con regla y compás. Es cierto que todas las construcciones de Euclides pueden ser efectuadas por esos métodos, pero, por otra parte, los geómetras griegos no aceptaron tales restricciones en sus trabajos. Veremos a continuación que Arquímedes ideó interesantes procedimientos tanto para la trisección de un ángulo cualquiera, como para la construcción del heptágono regular (7 lados).

3.4 *Trisección de un Ángulo según Arquímedes*

Esta construcción aparece como la Proposición 8 del *Libro de los Lemas* o *Liber Assumptorum* del que se conserva una traducción latina de la versión árabe de Thabit ibn Qurrah. La demostración que exponemos a continuación es una ligera variante de la que se encuentra en el texto citado; la idea, sin embargo, es la misma.

Sea α un ángulo cualquiera y llamemos O a su vértice. Sobre uno de los lados del ángulo escojamos un punto A, y, con centro O y radio $OA = r$, tracemos una circunferencia. Sea B el punto donde la circunferencia corta al otro lado del ángulo, y sea C, el punto diametralmente opuesto a A. Prolónguese OC a partir de C.

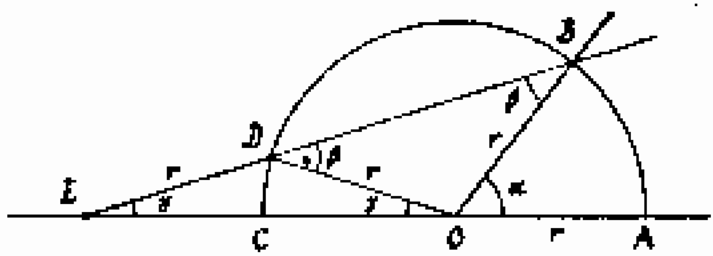

Figura 3.3

Es ahora cuando viene la construcción crucial. Hagamos sobre nuestra regla dos marcas tales que la distancia entre ellas sea igual a r; designemos por L la marca de la izquierda, y por R, la de la derecha. (Obsérvese que hemos violado los preceptos usuales de las construcciones con regla y compás, puesto que hemos marcado la regla). Coloquemos la regla marcada sobre la figura de modo que pase por el punto B, y que R caiga sobre el arco CB de la circunferencia. A continuación, movemos la regla de tal manera que ésta continúe siempre pasando por B, y que R se desplace sobre la circunferencia hasta que L caiga sobre la prolongación de OC. La recta BDE representa esta posición de la regla es decir, pasa por B, y $DE = r$.

Probaremos que el ángulo γ, en E, es la tercera parte del ángulo α.

Observemos que el ángulo β, en D, es el doble de γ por ser suplementario del $\sphericalangle D$ en el triángulo isósceles ODE, e igual, por lo tanto, a la suma 2γ de los otros dos ángulos. Por otra parte, α es suplementario de $\sphericalangle O$ en el triángulo EOB, y en consecuencia, igual a la suma $\beta + \gamma$ de los dos ángulos restantes. Con esto, tenemos:

$$\alpha = \beta + \gamma = 2\gamma + \gamma = 3\gamma.$$

De modo que γ es igual a un tercio de α, y hemos logrado trisecar el ángulo dado. Como esta trisección no se consigue mediante la construcción ordinaria con regla y compás, nos vemos obligados a realizar una operación no permitida; hacer dos señales en nuestra regla, como ya se dijo antes. Este artificio nos permite acomodar entre dos curvas un segmento dado de manera que su prolongación pase por un punto determinado; en nuestro caso las curvas son la semicircunferencia y la recta, el punto es B. Esta operación es un poderoso aporte a las tres que son lícitas en las construcciones ordinarias, y hace posible la solución de varios nuevos problemas, por ejemplo, el que acabamos de ver. Este recurso no resultaba nuevo en las matemáticas griegas de los tiempos de Arquímedes; es más, las construcciones que lo utilizaban tenían un nombre particular: *construcciones neusis*, del verbo griego *neuein*, que significa "inclinarse hacia" o "tender hacia", (el segmento *LR* marcado en la regla "se inclina hacia", o señala el punto fijo *B*).

Aunque se ha puesto en duda que sea Arquímedes el autor de esta demostración (no se conserva el texto griego), estamos seguros de que el teorema es suyo por la semejanza que tiene con algunos de los teoremas del libro *Sobre las Espirales*.

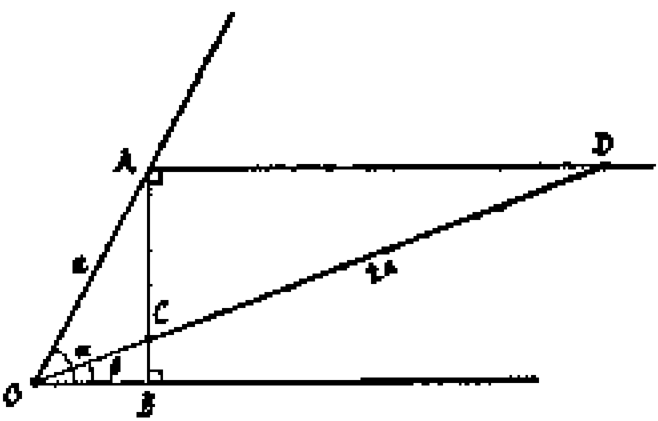

Figura 3.4

Problemas

3.1 Sea $\alpha = \sphericalangle AOB$ un ángulo dado; Fig. 3.4. Sobre uno de los lados de α se determina un segmento arbitrario $OA = a$; por A se trazan dos rectas: una paralela y una perpendicular al otro lado de α. Entre estas dos rectas se acomoda un segmento CD, de longitud $2a$, de modo que su prolongación, a partir de C, pase por O (una *construcción neusis*). Probar que, en términos de la notación empleada en la Fig. 3.4,

$$\alpha = 3\beta,$$

es decir, que α puede ser trisecado. Esta elegante construcción aparece en las obras de Pappus (alrededor del 300 d.C.), y muy bien puede ser de dicho autor.

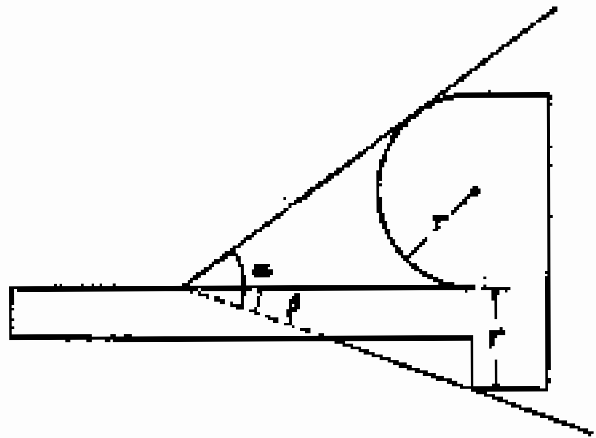

Figura 3.5

3.2 La Fig. 3.5 muestra una lámina recortada en forma de "tomahawk" (hacha de guerra de los indios norteamericanos). Llamaremos "hacha" a esta lámina. Sea α un ángulo arbitrario cualquiera. Se coloca el hacha en el interior del ángulo α de modo que el borde superior del mango pase por el vértice. Probar que

$$\alpha = 3\beta,$$

es decir, que el hacha es simplemente un trisector de ángulos. Desconocemos el origen de este hermoso procedimiento; lo hemos conocido por un alumno que nos lo comunicó.

3.3 *La construcción del Heptágono Regular según Arquímedes*

Durante sus investigaciones sobre las matemáticas islámicas, Carl Schoy descubrió un manuscrito que contenía, traducido al árabe por Thabit ibn Qurrah, un tratado de Arquímedes hasta entonces desconocido. Fue publicado en 1927, después de la muerte de Schoy. La décimo-sexta proposición (última de este tratado) es la construcción del heptágono regular debida a Arquímedes, que presentaremos a continuación siguiendo la edición alemana de Tropfke.

a) Comenzaremos la construcción de la Fig. 3.6 a partir de un segmento dado AB, sobre el cual se construye el cuadrado $AFEB$. Trácese la diagonal AE, y prolónguese AB por su extremo B.

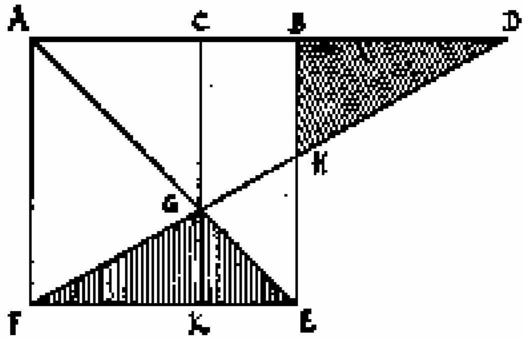

Figura 3.6

Ahora es necesario realizar una construcción *neusis*: Supongamos que una semirrecta de origen F gira sobre este punto hasta tomar una posición tal que el área comprendida entre la semirrecta, la diagonal AE y el lado FK sea igual a la comprendida entre la semirrecta, el lado BE y la prolongación de AB. Al alcanzar la posición conveniente, la semirrecta encuentra a la diagonal en G, al lado BE en H, y a la prolongación de AB en D. Las áreas iguales han sido sombreadas.

Trazamos por G una paralela a BE. La paralela cortará a AB en C, y a FE en K. Podemos asegurar que los cuatro puntos colineales A,B,C,D satisfacen las identidades siguientes:

(i) $$AB \cdot AC = BD^2$$

(ii) $$CD \cdot CB = AC^2.$$

En efecto, de la igualdad de las áreas sombreadas se deduce que

$$GK \cdot FE = BH \cdot BD,$$

es decir,

(1) $$\frac{BH}{GK} = \frac{FE}{BD}.$$

Por otra parte, puesto que los ángulos en F y D de los triángulos rectángulos HBD y GKF son iguales por correspondientes, estos triángulos son semejantes, y, en consecuencia,

(2) $$\frac{BH}{GK} = \frac{BD}{FK}.$$

De (1) y (2) obtenemos

$$\frac{FE}{BD} = \frac{BD}{FK},$$

que nos lleva a

$$FE \cdot FK = BD^2.$$

Si sustituimos FE por AB, y FK por AC, llegamos a la igualdad (i), esto es,

$$AB \cdot AC = BD^2.$$

La igualdad (ii) se prueba por la semejanza de los triángulos FKG y DCG, que produce la relación

$$\frac{GK}{FK} = \frac{GC}{CD},$$

o sea,

$$(3) \qquad GK \cdot CD = FK \cdot GC.$$

Ahora bien, como AE es la diagonal de un cuadrado, entonces $\sphericalangle GAC = \sphericalangle GEK = 45°$, de donde $GC = AC$, y $GK = KE$. Más aún, $FK = AC$, y $KE\ (= GK) = CB$. Ahora en (3) sustituimos GK por CB, FK y GC por AC, y obtenemos

$$CB \cdot CD = AC^2,$$

que es, precisamente, la igualdad (ii).

Es probable que el lector, impaciente, se esté preguntando qué relación puede haber entre lo expuesto y la construcción del heptágono. Le haremos ver esa relación tan pronto como hayamos recordado un teorema que necesitaremos utilizar frecuentemente en esta exposición: *El lugar geométrico de todos los puntos P tales que, dado un segmento AB, los puntos P caigan hacia uno de los lados del segmento, y que el ángulo APB sea igual a un ángulo dado, es un arco de circunferencia determinado por la cuerda AB y el ángulo α; además, la medida de $\sphericalangle APB = \alpha$ viene dada por la mitad del arco de circunferencia que cae hacia el otro lado de AB, véase Fig. 3.7.*

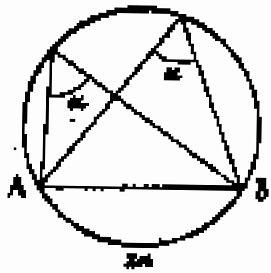

Figura 3.7

b) En la Fig. 3.8, el segmento AD ha sido dividido igual que en la Fig. 3.6, es decir que

(i) $$AB \cdot AC = BD^2$$

(ii) $$CD \cdot CB = AC^2.$$

Determinamos ahora el punto E de manera que

$$CE = CA \quad \text{y} \quad BE = BD,$$

y describimos la circunferencia circunscrita al triángulo AED; esta circunferencia es la mayor de las que aparecen en la figura. Ya podemos lanzar nuestra proposición: "AE es el lado del heptágono regular inscrito en la circunferencia recién trazada".

La demostración de esta tesis no es sencilla; sin embargo, es menos complicada que desconcertante el resultado.

Comencemos por observar que el triángulo EBD es isósceles, y por lo tanto, los ángulos α de la base son iguales. Otro tanto podemos decir de los ángulos β en la base del triángulo ACE.

Si prolongamos los segmentos EB y EC, éstos cortarán a la circunferencia en F y G, respectivamente. Tracemos AF; sea H su intersección con EG. Unamos H con B.

Ya sabemos que los ángulos cuyos vértices están en la circunferencia tienen por medida la mitad del arco subtendido; consecuentemente, arco AE = arco $DF = 2\alpha$, con lo que $\measuredangle FAD = \measuredangle AFE = \alpha$.

Por otra parte, $\measuredangle EBA$ es suplementario del $\measuredangle B$ del triángulo EBD, e igual, por lo tanto, a la suma 2α de los otros dos ángulos de dicho triángulo.

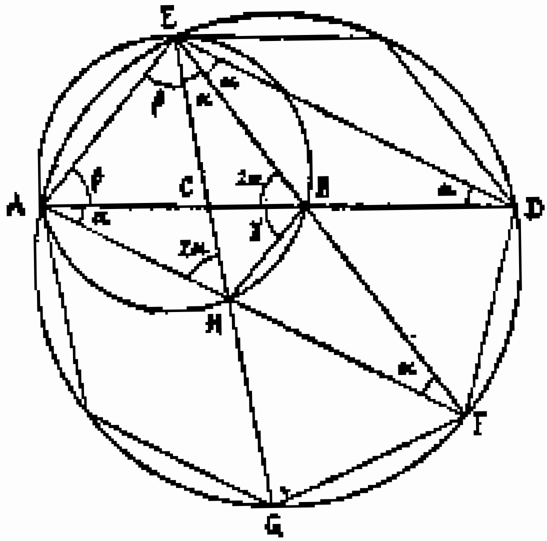

Figura 3.6

De acuerdo con nuestra condición (ii), tenemos

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{CB},$$

pero como, $AC = EC$, entonces

$$\frac{CD}{EC} = \frac{EC}{CB},$$

que implica que los triángulos BEC y EDC son semejantes por tener común el ángulo C, y proporcionales los lados que forman dicho ángulo. De aquí, $\sphericalangle BEC = \alpha$, y arco GF también igual a 2α, e igual a los arcos AE y DF.

Los arcos ED y AG son iguales porque la medida de ambos es 2β. Si ahora conseguimos probar que $\beta = 2\alpha$, ya estará terminada la demostración, pues es inmediato que el arco AE es la séptima parte de la circunferencia. Para llegar a esta prueba final, observemos que el segmento HB subtiende ángulos α tanto en A como en E; en consecuencia, A y E son puntos de un arco que tiene al segmento HB por cuerda. En otras palabras, el cuadrilátero $AHBE$ es inscriptible; trácese la circunferencia circunscrita. Las cuerdas EB y AH de esta circunferencia son iguales por estar subtendidas por ángulos inscritos β. Es más, $\sphericalangle AHE$ es igual a $\sphericalangle ABE = 2\alpha$, porque ambos están inscritos en la misma circunferencia y subtienden la misma cuerda AE; por lo tanto, $\sphericalangle AHE = 2\alpha$

Hacemos uso ahora de nuestra relación (i) bajo la forma

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{AC}, \quad \text{equivalente a} \quad \frac{AB}{AH} = \frac{EB}{EC},$$

puesto que $EB = BD = AH$. De aquí se implica que los triángulos EBC y ABH son semejantes, ya que, además,

$$\sphericalangle BAH = \sphericalangle BEC = \alpha.$$

Así, el ángulo γ es igual a 2α, con lo que llegamos al final de esta larga demostración. En efecto, como γ y β se oponen a la cuerda AH, son iguales y, entonces, $\beta = 2\alpha$, y arco ED = arco $AG = 4\alpha$. De este modo, la circunferencia mayor es igual a 14α y el arco AB será igual a una séptima parte de dicha circunferencia. Finalmente, se traza el heptágono en la figura.

La construcción "neusis" empleada en (a) es un caso único en las matemáticas griegas, y bien puede parecer que intuitivamente es menos satisfactoria que la empleada en la trisección de un ángulo dado. En realidad no sabemos qué norma proponía Arquímedes para decidir cuándo se había logrado la igualdad de las áreas de los dos triángulos; el texto árabe no ofrece ningún indicio al respecto. No obstante, se prueba fácilmente que las ecuaciones (i) y (ii) pueden ser resueltas mediante la intersección de dos secciones cónicas, método ampliamente utilizado por los geómetras griegos.

Problemas

3.3 Probar que, si $AB = a$, $AC = x$, $BD = y$, y entonces (i) y (ii) se reducen a

$$\text{(i)}\ y^2 = ax, \qquad \text{(ii)}\ y = \frac{a^2}{a - x} - 2a.$$

Si (x, y) expresan coordenadas cartesianas, (i) representa una parábola, y (ii), una hipérbola. Haga un gráfico de ambas curvas con toda la exactitud posible, y pruebe (gráficamente) que no existe más que una sola solución aceptable para (i) y (ii).

Los matemáticos griegos eran perfectamente capaces de reducir un par de ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas a un problema de intersección de cónicas, pese a que no disponían, como nosotros, de una notación algebraica adecuada.

3.6 *Volumen y Superficie de una Esfera de Acuerdo con el método*

Si hacemos girar la Fig. 3.9 alrededor de la línea de puntos, generaremos un cono inscrito en una semi-esfera que, a su vez, quedará inscrita en un cilindro. Los volúmenes de estos tres sólidos están en relación 1:2:3. Este hermoso teorema es una variante del que fuera el descubrimiento favorito de Arquímedes. Tan es así, que Arquímedes, orgulloso de su teorema, pidió que, a su muerte, se grabara en su lápida mortuoria una esfera inscrita en un cilindro y la razón de sus volúmenes (2:3). Que su deseo fue cumplido lo sabemos por Cicerón, quien siendo cuestor en Sicilia, encontró la tumba de Arquímedes en un estado lamentable, y ordenó su restauración.

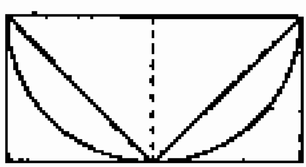

Figura 3.9

Demostrar este teorema de una manera excepcionalmente rigurosa es uno de los principales objetivos del libro primero de su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro;* el otro objetivo es probar que la superficie de la esfera es igual a cuatro círculos máximos. Quien lee el citado libro se siente fuertemente impresionado por la elegancia de la serie de teoremas que lo van llevando, a través de sorprendentes y dramáticos rodeos, hasta las dos metas finales; pero al mismo tiempo, el lector no puede dejar de comprender que la serie de teoremas que está recorriendo no señalan el camino que Arquímedes siguió originalmente para descubrir estos resultados.

Al escribir su obra en ese estilo, Arquímedes no hacía sino seguir una práctica común entre los geómetras griegos, de hecho así lo hicieron los más ilustres escritores matemáticos, cuyo propósito era que el lector quedara convencido de la validez de una demostración, y no el enseñarle cómo llegar a descubrir nuevos teoremas a partir de los suyos propios.

Esta falta de elementos analíticos y heurísticos en la geometría griega codificada, es decir, la ausencia de una clara exposición del modo en que inicialmente se descubría la existencia de una propiedad geométrica aún antes de poderla probar, fue deplorada en el siglo diecisiete, cuando los matemáticos se esforzaban por crear un nuevo análisis: el cálculo y sus ramificaciones. El matemático inglés Wallis (1616-1703) llegó a creer que los griegos habían ocultado deliberadamente los procedimientos a través de los cuales habían llegado a sus descubrimientos asombrosos.

Es este un ejemplo evidente, entre otros muchos, que nos muestra cómo la falta de textos originales ha conducido a los científicos modernos a conclusiones falsas, ya que la suposición de Wallis fue destruida cuando Heiberg descubrió *El Método* de Arquímedes. El propósito de esa obra está perfectamente descrito en el prólogo, dedicado a Erastóstenes. Escribe Arquímedes en el prólogo según la traducción de Heath:

> . . ."He pensado que es conveniente que le escriba ampliamente y le explique en detalle en el mismo libro las características de cierto método, mediante el cual le será a Ud. posible tener un punto de partida que lo hará capaz de poder investigar algunos problemas matemáticos por medio de la mecánica. Estoy convencido de que este procedimiento no es menos útil en las demostraciones de los teoremas mismos; algunas cuestiones se me hacen claras a través de un método mecánico, aunque después tengan que ser demostradas geométricamente puesto que la investigación realizada por el método dicho no constituye una demostración efectiva. Sin duda alguna es más fácil encontrar una demostración cuando ya se ha alcanzado, por medio del método, un conocimiento previo de la cuestión, que buscar una prueba sin que existan nociones precedentes sobre la materia. Esta es una de las razones por las que concedo a Demócrito no poca parte del crédito atribuido a Eudoxio por la demostración que éste hizo de algunos teoremas que ya Demócrito había enunciado anteriormente aunque no los había probado; me refiero específicamente a los teoremas que demuestran que los volúmenes del cono y de la pirámide corresponden a la tercera parte de los volúmenes de un cilindro y un prisma, respectivamente, que tengan la misma base y altura que los sólidos en

cuestión. Yo mismo, utilizando el método indicado, descubrí el teorema que ahora doy a conocer, y creo que es necesario ir exponiendo el método, pues, como ya he hablado de él, no quiero que se piense que he dicho palabras sin sentido, y además, porque estoy persuadido de que prestará no poca ayuda a los matemáticos, y porque espero que alguno de mis contemporáneos o sucesores podrá, mediante el método, descubrir otros teoremas que no se me han ocurrido a mí".

A continuación presentaremos los razonamientos que, basados en la mecánica, llevaron a Arquímedes al teorema referente al cono, la esfera y el cilindro (*Método*, Proposición 2).

En primer lugar aclararemos que parte de este teorema fue conocido antes de Arquímedes; él mismo reconoce, en el pasaje anteriormente citado que Eudoxio probó que un cono es la tercera parte del cilindro circunscrito, teorema que conocemos por los *Elementos* de Euclides, XII, 10. (Tenemos aquí un ejemplo, y en realidad uno de los más importantes, en el que, apoyados en el prestigio de un autor antiguo, podemos atribuir parte de los *Elementos* a uno de los predecesores de Euclides). La labor de Arquímedes consiste, entonces, en referir la esfera tanto al cono como al cilindro.

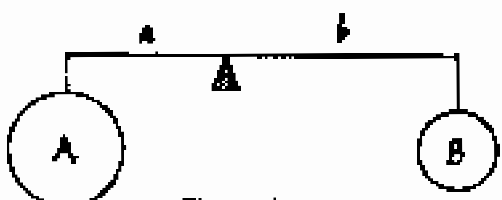

Figura 3.10

Necesitaremos la ley de la palanca: "La palanca (Fig. 3.10) está en equilibrio si el producto del peso A por la distancia a entre el fulcro y el punto de suspensión de A es igual al producto del peso B por su distancia b al fulcro". En símbolos

$$A \cdot a = B \cdot b.$$

Arquímedes prefiere ciertamente escribir la condición de equilibrio con la fórmula

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{a},$$

y así elude algunas cuestiones embarazosas tales como la de dar una interpretación física al producto $A \cdot a$ (*momento*). Esta condición de equilibrio la encontramos como las Proposiciones 6 y 7 en *Sobre el Equilibrio de las Figuras Planas, I.*

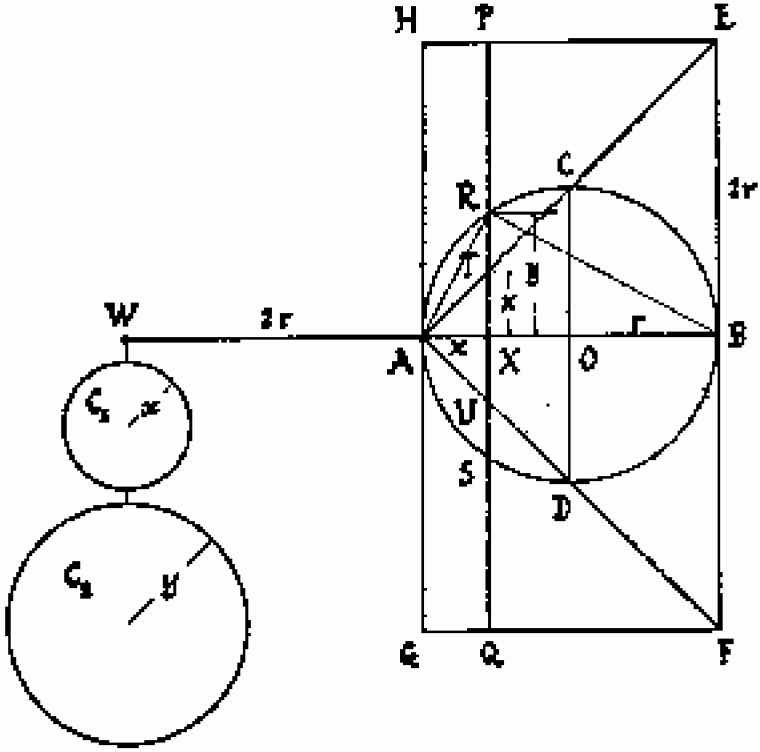

Figura 3.11

En la circunferencia de centro O y radio r (Fig. 3.11) trazamos dos diámetros perpendiculares, AB y CD. Trazamos además el segmento AC, y lo prolongamos hasta E, o sea hasta su intersección con la recta que es perpendicular a AB en B; por último, trazamos AD y lo prolongamos hasta que intersecte a EB en F. Notamos que

$$EB = 2r = BF,$$

puesto que los ángulos BAE y BAF son iguales a 45°. Queda construido el rectángulo $EFGH$ de base EF y altura AB.

PQ es un segmento perpendicular al diámetro AB, al cual corta en un punto arbitrario X, intersecta a la circunferencia en R y S, a AE en T, y a AF en U.

Hacemos

$$XT = x$$

y

$$XR = y,$$

observamos que también

$$AX = x.$$

Del triángulo rectángulo AXR obtenemos

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = AR^2,$$

y del triángulo rectángulo ARB (el ángulo en R es recto por estar inscrito en una semicircunferencia),

$$(2) \qquad AR^2 = x \cdot 2r,$$

ya que "cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella" (ver Cap. 2, pág. 58).

Entonces, por transitividad entre (1) y (2), será

$$(3) \qquad x^2 + y^2 = x \cdot 2r.$$

Prolongamos AB a partir de A hasta un punto W tal que:

$$WA = 2r,$$

con ésto hemos terminado la construcción de la figura.

Hacemos rotar ahora la figura completa alrededor de WB. La circunferencia genera una esfera de radio r; el triángulo EAF genera un cono cuya base es el círculo de radio $BE = 2r$, y cuya altura es $AB = 2r$; por último, el rectángulo $EFGH$ genera un cilindro cuya base es el círculo de radio $BE = 2r$, y cuya altura es $AB = 2r$. Durante la rotación el segmento arbitrario PQ se mueve en un plano cuya intersección con el cilindro es un círculo de radio $2r$, con el cono es el círculo C_1 de radio x, y con la esfera es el círculo C_2 de radio y.

Dividiendo ambos términos de (3) por $(2r)^2$, obtenemos

$$\frac{x^2 + y^2}{(2r)^2} = \frac{x}{2r}, \tag{4}$$

ó

$$\frac{\pi x^2 + \pi y^2}{\pi(2r)^2} = \frac{x}{2r}. \tag{5}$$

(Al introducir π en (5) nos hemos apartado por completo del texto de Arquímedes, pues él toma como base para su argumentación el hecho de que la razón de las áreas de dos círculos es igual a la razón de los cuadrados de los diámetros.)

Si ahora consideramos a WB como una palanca apoyada en A, podemos interpretar la ecuación (5) como su condición de equilibrio, en la siguiente forma: La razón de la suma de las áreas de los círculos C_1 y C_2 (tomados del cono y de la esfera respectivamente) y el área del círculo de radio $2r$ (tomado del cilindro) es igual a la razón de la distancia x (desde A hasta X), y la distancia $2r$ desde A hasta W. En otras palabras, si suponemos que los círculos son discos cuyos pesos son proporcionales a sus áreas, y que el segmento WB es una palanca con punto de apoyo (fulcro) en A, entonces los círculos C_1 y C_2 suspendidos en W podrán equilibrar al círculo de área $\pi(2r)^2$ suspendido en X.

Esta condición de equilibrio se satisface para cualquier posición de PQ entre HG y EF. Si consideramos que el cilindro, la esfera y el cono están formados por todos los círculos en que quedan divididos dichos sólidos al ser cortados por cada uno de los posibles planos en que puede rotar PQ, y si por cada una de las posibles posiciones de PQ suspendemos en W los correspondientes C_1 y C_2, entonces, todos los círculos C_1 y C_2, reunidos para formar el cono y la esfera, equilibrarán al cilindro. Como el centro de gravedad del cilindro coincide con el punto O, podemos expresar la deducción anterior como

$$\frac{\text{esfera} + \text{cono}}{\text{cilindro}} = \frac{AO}{AW} = \frac{1}{2},$$

$$2\,(\text{esfera} + \text{cono}) = \text{cilindro}.$$

Puesto que el volumen del cilindro es tres veces el del cono, será

$$2 \cdot \text{esfera} = \text{cono } EAF.$$

Ahora bien,

$$\text{cono } CAD = \tfrac{1}{8} \text{ cono } EAF,$$

ó

$$\text{cono } EAF = 8 \cdot \text{cono } CAD,$$

porque cuando la escala lineal de una figura se multiplica por $\frac{1}{2}$, su volumen resulta multiplicado por $(\frac{1}{2})^3$.

Así,

$$\text{esfera} = 4 \cdot \text{cono } CAD,$$

o sea, *el volumen de una esfera es igual a cuatro veces el volumen de un cono cuya base es un círculo máximo de la esfera, y cuya altura es igual al radio de la esfera.*

Resulta ahora muy sencillo demostrar que el volumen de una esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circunscrito.

Problemas

3.4 Demostrar que el volumen de la esfera es igual a las dos terceras partes del volumen del cilindro circunscrito.

Aquí nos ofrece nuevamente Arquímedes su argumento preferido. Dice, según la traducción de Heath:

> La demostración del teorema que establece que "el volumen de una esfera es cuatro veces el volumen del cono que tiene por base un círculo máximo de la esfera, y por altura el radio de la misma" me indujo a sospechar que la superficie de una esfera cualquiera es igual a cuatro círculos máximos. En efecto, como la superficie de un círculo es igual a la superficie del triángulo cuya base tiene la misma longitud que la circunferencia, y cuya altura es igual al radio del círculo, intuí que, de manera semejante, el volumen de cualquier esfera es igual al volumen del cono cuya base tiene igual área que la superficie de la esfera, y cuya altura es un radio de la misma.

Este es el primero y uno de los mejores y más atrevidos ejemplos de analogía que encontramos en la historia de las matemáticas; merece la pena examinar en detalle este argumento.

Empezaremos por observar que el área de un triángulo de base b y altura h puede expresarse como la suma de las áreas de los triángulos Δ_1, Δ_2, ..., Δ_k que tienen una altura común h y bases b_1, b_2, ..., b_k tales que $b_1 + b_2 + \ldots + b_k = b$. Análogamente, el volumen de una pirámide (o cono) puede expresarse como la suma de los volúmenes de las pirámides (o conos) cuya altura sea igual a la del sólido dado, y tales que la suma de las áreas de sus bases sea igual al área de la base de la pirámide (o cono) dada.

Creemos que Arquímedes consideraba que un círculo estaba formado por "muchos triángulos" cuyos vértices coincidían con el centro del círculo, y cuyas bases coincidían con arcos de la circunferencia; en este caso, las alturas son todas iguales al radio, y por consiguiente, la suma de las áreas de los triángulos se puede calcular mediante la suma de sus bases. Así, el área de un triángulo que tenga por altura el radio y por base la circunferencia es igual al área del círculo. Este es, de hecho, el teorema que Arquímedes cita anteriormente y que demuestra con todo rigor en *La Medición del Círculo.*

Aún más, creemos que esto fue lo que hizo pensar a Arquímedes que una esfera de radio r estaba formada por muchos "conos" o "pirámides" con sus vértices en el centro y sus bases en la superficie de la esfera. Todos estos "conos" tienen por altura r; por consiguiente, podemos encontrar la suma de sus volúmenes mediante la suma de sus bases. De este modo, es lógico suponer que el volumen de una esfera es igual al de un cono de altura r y cuya base tiene un área igual a la de la superficie de la esfera.

El razonamiento de la palanca nos prueba que el volumen de una esfera equivale a cuatro conos que tengan por altura r, y por base un círculo máximo; por lo tanto, el volumen de una esfera corresponde a la suma de los volúmenes de dichos cuatro conos, esto es, al volumen de un cono de altura r, y tal que el área de su base sea igual a cuatro círculos máximos. Por consiguiente, el volumen de la esfera es el de cualquiera de los dos conos de altura r citados; las áreas de las bases de estos conos tienen, en consecuencia, que ser necesariamente iguales. Concluimos, pues, que la superficie de la esfera (base de uno de los conos) es igual a cuatro círculos máximos (base del otro cono).

Lo que Arquímedes dijo al final de la Proposición 1 del *Método* tiene también aquí una buena aplicación. Escribió Arquímedes:

"En realidad, el razonamiento empleado no demuestra lo antes establecido; sin embargo, ese razonamiento nos ha dado bastantes indicios de que la conclusión a que hemos llegado es verdadera. Puesto que el teorema no está demostrado, aunque sospechamos que la consecuencia es verdadera, tendremos que recurrir a la demostración geométrica que yo mismo descubrí y que ya he publicado".

La parte del procedimiento mecánico que Arquímedes no admite como argumento aceptable en una demostración es aquella en la que los sólidos se han considerado como suma de secciones planas. Hoy día estamos familiarizados con tales procedimientos, a los que llamamos *integración*; Arquímedes, sin embargo, tuvo buen éxito al eludir la dificultad que le presentaba la integración en la determinación del centro de gravedad de un cilindro, que es un cálculo tan sencillo que basta una simple consideración de simetría.

Arquímedes señala en el prefacio del *Método* que su libro será de utilidad para las matemáticas, lo que fue verdaderamente profético. Al perderse este libro, los matemáticos del siglo diecisiete tuvieron que desarrollar, por sí mismos, la teoría de la integración; resulta vano, pero sin embargo nos sentimos tentados a reflexionar sobre la influencia que el *Método* pudo haber tenido en la marcha de los acontecimientos. No fue sino hasta fines del siglo diecinueve cuando la teoría de la integración alcanzó el nivel técnico que hubiera agradado a Arquímedes.

Estos breves ejemplos están muy lejos de hacer justicia a la obra de Arquímedes. Pueden sin embargo, brindar algunos detalles de su intrepidez, energía y habilidad al enfrentarse a un problema difícil. Para poder alcanzar una verdadera apreciación del dominio que tenía de su arte, debemos conocer íntimamente por lo menos una de sus elegantes series de teoremas que llevan por corona un difícil y hermoso resultado.