MEMORIAS DEL

IV SIMPOSIO INTERNACIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

18, 19 y 20 de octubre de 1993

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIDAD ACADEMICA
DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSGRADO
DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EL USO DE LA HISTORIA EN LA PEDAGOGÍA: LA DEFINICIÓN DE CONJUNTO BIEN-ORDENADO

Alejandro Garciadiego Dantan
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Ciudad Universitaria, UNAM
04510 México, D.F.
Tel: 622 48 60; Fax: 622 48 59

EL USO DE LA HISTORIA EN LA PEDAGOGÍA: LA DEFINICIÓN DE CONJUNTO BIEN-ORDENADO

Introducción.-

Sabemos que los conceptos matemáticos no son inmutables. Tenemos ejemplos concretos de objetos matemáticos que han sido definidos originalmente de cierta forma y que más tarde ha sido necesario refinar sus primeras definiciones al encontrarse contraejemplos o casos patológicos. De esta manera, las definiciones originales de los conceptos de *número*, *función*, *integral* —entre otras— han sido modificadas en aras de generalizar estas nociones e incluir casos que no cabían dentro de la concepción original. A pesar de que algunos de estos cambios han sido explícitos y revolucionarios, otras modificaciones han llegado como eventos discretos y, por lo mismo, en algunos casos son muy difíciles de detectar. Como pedagógos de las matemáticas pensamos que el papel del historiador es encontrar a la persona adecuada, el lugar correcto y el tiempo preciso de esos 'eventos discretos'. Concebimos la historia como una simple colección de nombres, fechas y títulos. La historia nos debe proporcionar la cronología del orden secuencial en el que se dieron estas modificaciones. En otras palabras, la historia proporciona el orden y descripción de la metamorfosis. Influenciados por nuestra vida diaria, esta erudicción de nombres, fechas y títulos ofrece una falsa imagen cultural —de la misma manera que algunas personas presumen ser cultas por reconocer algunos vinos por su marca y cosecha— y, en ocasiones, resulta un recurso pedagógico superficial.

Antes de continuar con el tema que nos interesa el día de hoy es necesario hacer un paréntesis y reconocer que los historiadores profesionales perciben su disciplina desde otra perspectiva, mucho más rica y más compleja. Éstos se preocupan por estudiar y analizar las *razones y las causas* que explican por qué los eventos tomaron la forma que tienen. Los historiadores se proponen armar un rompecabezas, conscientes que el número de piezas que tienen a su disposición es incompleto, y además desconocen la imagen que tienen que reconstruir. El historiador se resigna a presentar una posible reconstrucción del cómo pudieron haber sucedido los hechos, consciente que lo que aporta no es una versión definitiva y, mucho menos, única. Su pretensión se limita a proporcionar una interpretación lógica y consistente de acuerdo a las evidencias con que contamos hasta el momento.

La concepción cantoriana.-

Cuando iniciamos un curso, debemos estar conscientes que, en la mayoría de los casos, los estudiantes de matemáticas —de cualquier nivel— ignoran el contenido, técnicas y finalidades que aprenderán a través de éste. Estos alumnos son presas inermes de lo que el maestro desee hacer con su curso. De hecho, un maestro puede acabar su curso cualquier día que así lo desee, y el alumno pensaría que se ha estudiado el contenido del curso que originalmente uno se había propuesto cubrir. El alumno entra a ciegas y, por supuesto, con temor.

Sostengo que lo mínimo que debemos hacer en las primeras sesiones de clase de un nuevo curso es explicar al estudiante, sin tecnicismos, cuál es el objetivo del curso y qué técnicas, métodos o conceptos aprenderá y cómo se aplicarán éstas dentro del mismo curso. No estoy sugiriendo que se le deba convencer al estudiante de la importancia del curso a través de la aplicación de los conceptos por aprender a ejemplos prácticos de la vida real. En la mayoría de los casos, los ejemplos parecen demasiado artificiales y, en última instancia, la gran mayoría de los problemas prácticos que nos rodean se resuelven con matemáticas elementales. El alumno debe comprender, desde sus primeros cursos, que las matemáticas se deben estudiar sin esperar una retribución práctica de ellas mismas, de la misma manera que estudiamos algunas disciplinas científicas y humanísticas. ¡En algún momento tendremos que superar la alegoría de Euclides y el esclavo y contemplarla como si únicamente tuviera valor histórico!

Pero, vayamos a un ejemplo concreto. Supongamos que se nos sugiere impartir un curso introductorio de teoría de conjuntos a nivel superior y, supongamos también, que se nos ha sugerido que el programa contempla la aritmética de los números cardinales y ordinales transfinitos. Implícitamente sabemos que la noción de *conjunto bien ordenado* y la demostración del *teorema del buen orden* juegan un papel fundamental en el desarrollo de este curso. El enfoque que le podemos dar a un curso de esta naturaleza puede variar enormemente. Alguien podría sugerir seguir un enfoque muy intuitivo e informal y finalizar con la presentación formal de los axiomas de la teoría; por otro lado, alguien podría sugerir iniciar con el conjunto de axiomas que propuso Zermelo en 1908 y de ahí deducir las propiedades de estos conceptos.

Es relativamente sencillo proporcionar a los estudiantes ejemplos concretos de conjuntos bien-ordenados, así como otros que no lo son. Desde la primera sesión, ellos deberán comprender cuál es el significado del *teorema del buen-orden* y qué significa su veracidad o falsedad dentro de la teoría; tal vez podrían, incluso, ser expuestos a algunas de las dificultades de la demostración del teorema. Pero, sobre todo, el estudiante debe comprender por qué este concepto es central dentro de la teoría. Empezemos nuestro curso con una definición convencional.

> **DEFINICIÓN.-** Se dice que un conjunto <...> M está bien-ordenado, si <...> todo subconjunto no vacío de M tiene un primer elemento <...> [Kamke 79].

Para este momento, ya les hemos explicado a los estudiantes con anterioridad el papel fundamental de este concepto dentro de la teoría general de conjuntos, así como el papel del *teorema del buen-orden* dentro de la aritmética de los números cardinales y ordinales transfinitos. Pero, se pueden preguntar: ¿a quién se le ocurrió pensar en cosa aparentemente tan absurda y alejada de la realidad?, ¿quién definió dicho concepto por primera vez? Otros estudios históricos han mostrado que fue Georg Cantor (1845-1918) quien desarrolló, casi de forma exclusiva, la teoría de conjuntos y fue el primero en establecer tal definición. Enseguida, se podría preguntar uno: pero, ¿fueron éstas sus palabras precisas? De acuerdo con Cantor, un conjunto ordenado está bien-ordenado si:

a) contiene un primer elemento;

b) cualquier elemento con un sucesor tiene un inmediato sucesor;

c) cualquier conjunto finito o infinito de elementos con un sucesor tiene un inmediato sucesor [Cantor 1883a, 548-549].

El hecho de que en los 1890 dos famosos matemáticos contemporáneos de Cantor confundieran y mal comprendieran la definición cantoriana es indicio de la complejidad de su enunciado. Si matemáticos profesionales tuvieron dificultades para entender el concepto de Cantor, es lógico suponer que muchos estudiantes se enfrentarán a problemas conceptuales mucho mayores. Pero es aún más importante mostrar a los estudiantes que, 'excepto por las palabras', ambas definiciones son matemáticamente equivalentes. En este caso en particular, el concepto definido originalmente en 1883 no ha sufrido metamorfosis alguna. La noción, en este caso, se mantiene inmutable a través del tiempo.

El propio Cantor tenía conocimiento que su definición había presentado dificultades para algunos de sus colegas [Moore y Garciadiego 342 y 345-346]. El propio Cantor proporcionó una segunda versión de la misma definición, contenida en la segunda parte de su artículo donde pretendía exponer una versión ordenada y clara de sus ideas sobre los cardinales y ordinales transfinitos. Esta segunda versión, de acuerdo con él, 'aparte de las palabras', era idéntica a la primera. Sin embargo, una vez más, requirió de más de diez líneas para proponer esta segunda versión.

¿Por qué Cantor no pudo simplificar su definición? ¿Por qué Cantor fue incapaz de incorporar la idea de subconjunto no vacío? ¿Cuándo surgió este último concepto? ¿Por qué es necesario este concepto en la teoría de conjuntos? Respondamos primero a esta última pregunta. Sabemos que la noción de conjunto vacío —sin lógica aparente para los estudiantes— es necesaria en el álgebra de conjuntos para la definición de la operación de intersección entre conjuntos cuando éstos no contienen elementos comunes. Pero Cantor no fue quien desarrolló el álgebra de conjuntos. En sus escritos, y principalmente en los artículos de 1883, 1895 y 1897 ya mencionados, Cantor no requiere de la operación de intersección entre conjuntos. Es mas, si uno examina con cuidado su definición de la noción de conjunto contenida en sus memorias de 1883 y 1895, es claro que la idea de 'conjunto vacío' no tiene sentido o cabida dentro de esta teoría. De acuerdo con Cantor, un conjunto está definido por "objetos *m* definidos y separados por nuestra intuición o nuestro pensamiento" [Cantor 1915,].

Obviamente, la definición cantoriana no es casual ni accidental. Paradójicamente, Cantor públicamente compartía con Frege los puntos de vista donde éste último criticaba estas definiciones por no ser objetivas y por estar sustentadas en un subjetivismo lógico. De la misma manera, la concepción matemática cantoriana está sustentada en una profunda y madura concepción filosófica. Contrariamente a la concepción formalista prevaleciente hoy en día, Cantor concebía que los objetos matemáticos podían ser considerados de dos formas diferentes: (i) los objetos matemáticos tienen un lugar definido en nuestro pensamiento, a esta realidad la llamó *intrasubjetiva* o *realidad inmanente*; y (ii) los objetos matemáticos también podían ser considerados como "una expresión o imagen de ocurrencias y relaciones en el mundo exterior confrontando el intelecto" [Cantor 1976, 79]. Llamó a este segundo estado ontológico *realidad transubjetiva* o *realidad transiente*. Todo objeto matemático compartía simultáneamente ambos tipos de realidad; y, a pesar de que uno no encuentra en la naturaleza entidades asociados con los números transfinitos, Cantor no tenía la menor duda que las encontrarían en un futuro cercano. Como mencioné con anterioridad, de acuerdo con Cantor, los conjuntos se definían a través de los elementos abstraídos por nuestro pensamiento o nuestra intuición. Por lo mismo, no existían elementos que pudieran definir al conjunto vacío. Además, Cantor no requirió de la intersección —como operación entre conjuntos— al definir las operaciones entre números cardinales y ordinales transfinitos. No hubo necesidad de definir el conjunto vacío, ya que tampoco se usaba la intersección entre conjuntos que no tenían elementos comunes.

Otras definiciones.-

Pero, ¿cuál era la posición de algunos de sus contemporáneos que no compartían el mismo trasfondo filosófico? Por ejemplo, Philip Jourdain (1879-1919), por aquel entonces un joven y prometedor matemático británico, intentaba demostrar el *teorema del buen-orden*. Jourdain había entendido claramente la definición cantoriana, pero también tenía la impresión que era demasiado larga y complicada. De hecho, Jourdain usó consistentemente el término *agregado* en sustitución del de *conjunto* o *clase* en su intento por mostrar públicamente su independencia conceptual, al menos, con las escuelas cantoriana y peaniana. La definición cantoriana demandaba que en el caso de que algún elemento tuviera un sucesor, éste tuviera un sucesor inmediato. Desde el punto de vista inverso, esto era equivalente a exigir que todos los elementos tuvieran un inmediato predecesor, excepto por el primer elemento del conjunto. En otras palabras, si nosotros deseáramos que un conjunto ordenado fuera bien-ordenado, sería necesario que dicho conjunto no contuviera colecciones sin un primer elemento. Para aquel entonces, Cantor ya había demostrado que *aleph-cero* ($\aleph_o$) era el más pequeño de todos los números cardinales transfinitos —es decir, el número cardinal de la sucesión de todos los números naturales—. De esta manera, para que un conjunto fuera bien ordenado era suficiente con que *no* contuviera sucesión alguna con tipo ordinal $^*\aleph$ —es decir, una sucesión de números naturales en el orden natural inverso de precedencia [Jourdain, 65-66]—. En símbolos

$$\{\ldots, n, \ldots, 3, 2, 1\} = {}^*\aleph.$$

Sin embargo, esta es una definición de carácter negativo y, por lo mismo, no se le considera la manera óptima de establecer las propiedades de un objeto matemático. Hilbert presentó, durante el *Segundo Congreso Internacional de Matemáticos* celebrado en Heidelberg en 1900, su famosa lista de veintitrés problemas. Ya para aquel entonces se le consideraba como una de las personalidades líderes dentro de la comunidad de matemáticos. El primer problema de la lista trata dos cuestiones fundamentales de la teoría general de conjuntos. La *hipótesis del continuo* y el *teorema del buen orden*. Aquí encontramos una tercera versión de la definición de este concepto. Hilbert la definió con las siguientes palabras:

> **DEFINICIÓN.-** Un conjunto está bien ordenado si no únicamente el propio [conjunto], sino cada [subconjunto contiene] un primer elemento [Hilbert 46].

Es sabido que esta versión tampoco se convirtió en la versión estándar contemporánea ya que adolece del mismo carácter negativo de la definición de Jourdain. Sin embargo, el lector no tendrá dificultad alguna para enunciar esta definición evitando su carácter negativo.

Sumario.-

Hacer conscientes a los estudiantes que las matemáticas conforman una disciplina perfeccionable —una que requiere revisión y análisis constante—, tal vez ayudará a convencerlos que es necesario estar alertas a la búsqueda de definiciones más breves, simples y objetivas. Al entender las razones objetivas y, en muchos casos subjetivas, del porqué algunos objetos son definidos de cierta forma, ampliará el espectro conceptual de los estudiantes y los motivará a cuestionar más objetivamente la información matemática que recibe.

Referencias.-

Cantor, Georg. "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, V." *Mathematische Annalen* 21 (1883a) 51-58 y 545-591. También publicado separadamente como: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen.* Leipzig: Teubner. 1883b. Contenido en Cantor 1932, 165-208. ["Foundations of a general theory of manifolds." *The Campaigner: Journal of the National Caucus of Labor Committees* 9 (1976) 89-96].

———. "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (Partes 1 y 2). *Mathematische Annalen* 46 (1895) 481-512 y 49 (1897) 207-246. Contenido en: Cantor 1932, 282-351. [*Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers.* Dover: New York. 1955].

———. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Berlín: J. Springer. (Editor E. Zermelo). 1932. (Reimpresa: Springer-Verlag. 1990).

Daubes Joseph W. *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite.* Camb, Mass: Harvard University Press. 1979.

Garciadiego, Alejandro. "The emergence of the non-logical paradoxes of the theory of sets. *Historia Mathematica* 12 (1985) 337-351.

———. "On rewriting the history of mathematics at the turn of the century." *Historia Mathematica* 13 (1986) 39-41.

———. *Bertrand Russell and the origins of the set theoretic paradoxes.* Basilea: Birkhäuser-Verlag. 1992 [*Bertrand Russell y los orígenes de las paradojas de la teoría de conjuntos.* Madrid: Alianza editorial. 1992].

Hilbert, David. "Mathematische Probleme". *Archiv der Mathematik und Physik III* 1 (1900) 44-63 y 213-237. ["Mathematical Problems." *American Mathematical Society Bulletin* 8 (1902) 437-479].

Kamke, E. *Theory of sets.* New York: Dover. 1950.

Jourdain, Philip. "On the transfinite numbers of well-ordered aggregates." *Philosophical Magazine* VII 7 (1904) 61-75.

Moore, Gregory H. y Garciadiego, Alejandro. "Burali-Forti's paradox: a reappraisal of its origins". *Historia Mathematica* 8 (1981) 319-350.