Aportaciones Matemáticas
Comunicaciones 4 (1987) 139-148

CANTOR Y LAS PARADOJAS

por

ALEJANDRO R. GARCIADIEGO
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 México, D.F.

RESUMEN

El objetivo de este ensayo es discutir nuestras objeciones a algunas de las interpretaciones históricas previas del cuándo, cómo y por qué Georg Cantor (1845-1918) descubrió algunas de las ahora famosas paradojas de la teoría de números cardinales y ordinales transfinitos. Finalmente, se bosquejan algunos de los elementos de una nueva interpretación alternativa, pero plausible, de los mismos eventos.[1]

§1 INTRODUCCION.- En este trabajo procuraremos esbozar una nueva interpretación histórica, alternativa a las ya existentes, de cómo, cuándo y por qué Cantor descubrió

[1] Desgraciadamente la limitación de espacio nos impide desarrollar con detalle los argumentos que a continuación se discuten. Estos, sin embargo, serán examinados con minuciosidad en otra publicación posterior.

las paradojas relacionadas con el mayor número cardinal y el mayor número ordinal.

Dentro de nuestro contexto histórico será necesario considerar las siguientes premisas, las cuales ya han sido discutidas con anterioridad en algunos otros ensayos,[1] como ciertas: Primero, que la finalidad, tanto del artículo de Césare Burali-Forti (1861-1931), como de la(s) carta(s) que enviara Cantor a Richard Dedekind (1831-1916) durante el verano de 1899, no era mostrar la existencia de contradicciones dentro del seno de la teoría de los números cardinales y ordinales transfinitos; por el contrario, se requiere observar que estos trabajos pretendían aportar nuevos resultados positivos a los ya existentes en la teoría de conjuntos de finales del siglo pasado. Segundo, que fue Bertrand Russell (1872-1970) quien, a través de su libro *The Principles of Mathematics* (publicado en Mayo de 1903), dio a conocer a las comunidades matemática y filosófica los argumentos ahora conocidos como la 'Paradoja de Cantor', así como su propia contradicción del conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos, y los argumentos que más tarde provocarían el nacimiento de la 'Paradoja de Burali-Forti'.[2] Tercero, a pesar de que nosotros mismos afirmamos que Cantor no trató de divulgar contradicción alguna en su correspondencia con Dedekind en 1899, no por esto pretendemos afirmar que las contradicciones le fueran extrañas. Su distinción entre *multiplicidades consistentes*

---

[1] Veáse: Gregory H. Moore, "The origins of Zermelo's axiomatization of set theory", *Journal of Philosophical Logic* 7 (1978) 307-329; Gregory H. Moore and Alejandro Garciadiego, "Burali-Forti's paradox: a reappraisal of its origins," *Historia Mathematica* 8 (1981) 319-350; Alejandro Garciadiego, **Betrand Russell and the origin of the set theoretic paradoxes.** Ph. D. Dissertation, University of Toronto, 1983; Alejandro Garciadiego, "The emergence of the non-logical set theoretic paradoxes," *Historia Mathematica* 12 (1985) 337-351; Alejandro Garciadiego, "On rewriting the history of the foundations of mathematics at the turn of the century", *Historia Mathematica* 13 (1986) 39-41; entre otros.

[2] Existen, al menos, dos traducciones castellanas de este libro: Bertrand Russell, *Los Principios de las Matemáticas*. Madrid: Espasa-Calpe, 1967. (2da. ed.); Bertrand Russell, *Obras Completas II. (Ciencia y Filosofía, 1897-1919)*. Madrid: Aguilar, 1973, p 379-800.

(conjuntos) y *multiplicidades absolutamente infinitas* o *inconsistentes* muestran, aparentemente, que tales argumentos no resultaban desconocidos para él.[1]

<u>§2 OTRAS INTERPRETACIONES.</u>- El hecho de que no existe suficiente evidencia escrita para poder concluir de una manera determinante y satisfactoria este episodio de la historia de las matemáticas ha dado pie al surgimiento de diversas reconstrucciones históricas, todas ellas con la pretensión de ser consistentes: tanto en la fase matemática, como filosófica, e histórica.

Existen en la literatura secundaria, al menos, tres distintas explicaciones históricas del cuándo y cómo descubrió Cantor las paradojas.[2] Usaremos la supuesta fecha del descubrimiento original para distinguir entre ellas, y las analizaremos en orden cronológico inverso. Uno se podría preguntar, pero, ¿qué tan importante es la diferencia entre haber descubierto algo en 1895, ó en 1896 ó en 1889? ¿Qué tan importante es la diferencia de un año? Bueno, si nuestro propósito es reconstruir el pasado lo más apegado posible a los eventos, ya de hecho es importante. Pero, tenemos que recordar al lector que no únicamente estamos interesados en reconstruir los hechos, sino nuestro motivo es aún más

---

[1] Se dice que Ernst Schröder (1841-1902) propuso una distinción análoga sin conocer las paradojas. Véase Jean van Heijenoort. *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic*. Camb. Mass: Harvard University Press, 1967. p 113.

[2] Desgraciadamente, como lo habíamos comentado con anterioridad, nuestro espacio está demasiado restringuido en esta ocasión lo que nos impide describir con detalle estas paradojas. Existen, sin embargo, numerosas fuentes secundarias al alcance del lector donde éste podrá encontrar estos argumentos discutidos con gran sencillez. Véase, entre otros: Eric T. Bell. *Historia de las Matemáticas*. México: F.C.E., 1985. (2da. ed.) p 292-294; Nicolás Bourbaki. *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Ed. (Col. Alianza Universidad # 18) 1972. p 61-62; Jean Paul Collete. *Historia de las Matemáticas*. México: Siglo XXI, 1985. Vol II. p 552-557; y, Morris Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Camb. Mass: Oxford University Press, 1972. p 1183-1185.

importante, significa la reconstrucción de la formación y metamorfosis de las ideas. Y, si, como algunos historiadores aseguran, Cantor usó estos argumentos en el desarrollo de ideas posteriores, entonces cobra fundamental importancia el intentar precisarlos al máximo para dilucidar la evolución de su pensamiento.

La primera de estas interpretaciones se trata de aquélla que defendió el recientemente fallecido matemático, Jean van Heijenoort (1912-1986), quien asegura—en sus disertos—que Cantor dio a conocer a Dedekind la paradoja del máximo número ordinal (y cardinal), a través de una carta del 28 de Julio de 1899.[1] En cuanto a esta interpretación hay que hacer algunas aclaraciones, tanto desde el punto de vista histórico (esencialmente de cronología), como desde el enfoque matemático.

En primer lugar, en torno al aspecto histórico, cuando van Heijenoort sugiere al año 1899 como fecha probable del descubrimiento, muestra ignorar la existencia de dos cartas, a partir de las cuales se podría deducir que dicho descubrimiento, de haber sucedido—como argumenta, debió haber ocurrido con anterioridad (posiblemente entre 1895 y 1896). Una de estas misivas se refiere a la que le dirigió Cantor a un joven matemático británico llamado Philip Jourdain (1879-1919).[2] En esta carta, Cantor describe un argumento similar al contenido en la(s) carta(s) de Julio de 1899 remitidas a Dedekind; ahí menciona que ya le había comentado a David Hilbert (1862-1943) un asunto esencialmente igual en otra comunicación epistolar algunos años antes. Existe una segunda fuente de evidencia, se trata de otra esquela que le enviara Hilbert a Gottlob Frege (1848-1925). Este segundo

---

[1] Jean van Heijenoort, *Op. cit.* p 113-117.

[2] Carta de Cantor a Jourdain, 4 Noviembre 1903; Impresa en: Ivor Grattan-Guinness, "The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain." *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* 73 (1971) p 116-117.

documento, también escrito en 1903, deja entrever que Hilbert y sus colegas tenían conocimiento—desde 1895 ó 1896—de estas paradojas y tal vez de otras.[1]

Ahora bien, desde el punto de vista matemático, es necesario recalcar que en dicha carta a Dedekind, Cantor pretendía mostrar que el sistema

ת de todos los «alephs» $(\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n, \ldots)$

no es sino el sistema de todos los números cardinales transfinitos. Es decir, que dado cualquier conjunto infinito debía corresponderle un 'aleph' como su número cardinal. Parte esencial de la demostración lo constituía el hecho de que los sistemas ת y Ω (el sistema de todos los tipos ordinales de conjuntos bien-ordenados) eran *multiplicidades absolutamente infinitas* o *multiplicidades inconsistentes*. Es decir, que si nosotros pensamos estas multiplicidades como si sus elementos 'estuvieran juntos' esto nos llevaría a contradicciones. ¿Qué contradicciones? La relacionada con Ω es un argumento muy similar al que supuestamente se encuentra en el artículo de Burali-Forti,[2] por lo que se afirma que Cantor predescubrió esta contradicción.

En cuanto a la contradicción del máximo número cardinal, Cantor no elabora, sino simplemente señala que el sistema de todas las cardinalidades es una *multiplicidad inconsistente*.[3] Esto es, que si la consideramos como un 'conjunto', nos llevaría a

---

[1] Carta: Hilbert a Frege, 7 Noviembre 1903. Impresa en: Gottlob Frege, *Philosophical and mathematical correspondence*. Chicago: The University of Chicago Press, 1980, p 51.

[2] Césare Burali-Forti "Una questione sui numeri transfiniti." *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 11 (1987) 154-164. Traducido al inglés en: Jean van Heijenoort, *Op. cit.* p 104-111.

[3] Carta: Cantor a Dedekind, 28 Julio 1899. Impresa en: Jean van Heijenoort, *Op. cit.* p 114.

contradicciones. La única pista, en cuanto a su origen y evolución, que tenemos en la(s) carta(s) de Cantor a Dedekind, es que el primero menciona como ejemplo de *multiplicidad inconsistente* la 'totalidad de todo lo pensable', la cual tal vez, en algún momento, la consideró como la mayor de todas las totalidades, es decir, con toda probabilidad la concibió como el conjunto universal.

Una segunda interpretación es la sostenida por el matemático e historiador británico Ivor Grattan-Guinness,[1] quien mantiene la conjetura respecto a que Cantor descubrió las paradojas en 1896 y sin lugar a dudas, en relación a la fase preparatoria final de sus ensayos de 1895 y 1897.[2] Un posible argumento para apoyar esta conjetura, radica en el hecho de que la segunda parte del artículo apareció en Marzo de 1897, cuando ésta ya se había concluido desde Septiembre de 1895, aproximadamente. ¿Por qué le tomó a Cantor tanto tiempo publicar la segunda parte? De acuerdo con los historiadores que apoyan esta interpretatión, Cantor se dedicó a buscar una solución a las paradojas, la cual mencionó a Dedekind algunos años más tarde. Pero si este realmente fuera el caso, ¿por qué no discutió Cantor algo en este sentido en la segunda parte del artículo? Es lógico suponer que si él había sido capaz de encontrar contradicciones en los fundamentos de su teoría, otros también podrían hacerlo. Entonces, ¿por qué no mencionar que se podrían encontrar contradicciones si uno no era cuidadoso y que debería existir una forma de 'limitación'—es

[1] Ivor Grattan-Guinness. "Georg Cantor's influence on Bertrand Russell." *History and Philosophy of Logic* 1 (1980) p 75.

[2] Estos artículos son los: "Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre". Véase: Georg Cantor. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: J. Springer. 1932. p 282-356. Existe, al menos, una traducción al inglés de las dos partes de este artículo: Georg Cantor. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. New York: Dover. 1955. Prefacio, introducción, notas y traducción de Philip Jourdain. Origalmente publicado en 1915 por Open Court Publishing Company.

decir, que no toda multiplicidad o colección de objetos podía ser concebida como un conjunto?

Algunos otros historiadores también se pronunciaban por la conjetura de que probablemente, durante este lapso 1895-1897, Cantor se encontraba intentando demostrar su *Teorema del Buen-Orden*, donde se afirmaba que, dado cualquier conjunto, ordenado o sin ordenar, éste se podría bien-ordenar; y que no deseaba publicar la segunda parte de su artículo, que tenía como eje central la discusión de los conjuntos bien-ordenados, sin incluir una demostración de su teorema más poderoso y fundamental.

Por último, Joseph W. Dauben, quien ha escrito recientemente un largo estudio histórico relacionado con la vida y obra de Cantor, ha asegurado que

> (e)n algún momento del año 1895 descubrió Cantor las primeras paradojas de la teoría de conjuntos, concretamente las que se refieren a los números ordinales y cardinales máximos. Probablemente se encontró con ellas mientras intentaba demostrar su teorema de comparabilidad para números cardinales transfinitos, o bien al tratar las cuestiones relacionadas con el de si toda potencia transfinita era necesariamente un aleph o de si todo conjunto se podría ordenar bien.[1]

Dauben señala el año 1895 como la fecha probable, pues toma en consideración la correspondencia entre Cantor y Jourdain y, por otro lado, la correspondencia entre Hilbert y Frege, y además la manera como Cantor definió el concepto de conjunto en 1895. Sin embargo, nuestra primera reclamación sería que esta definición de conjunto y la de 1883 son muy similares. Otra cuestión que es importante señalar es que el tema central de discusión en la correspondencia Cantor-Jourdain, que fue la que originalmente motivó el surgimiento de la explicación del surgir de las paradojas en 1895 (o 1896), no fue la paradoja

[1] Joseph Dauben. "El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana", contenido en: Ivor Grattan-Guinness. (Editor). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial. (Col. Alianza Universidad # 387). p 273-274.

o contradicción del mayor número ordinal, sino una posible demostración del *Teorema del Buen-Orden*.

Por otro lado, un detalle muy interesante de la interpretación de Dauben—y de suma importancia para la nuestra también— es que contrariamente a la suposición intuitiva de cualquier interesado en el asunto, Dauben asegura que Cantor no interpretó el surgimiento de las contradicciones como un elemento nocivo a su sistema, puesto que, usando estas proposiciones como herramientas, Cantor pensaba haber demostrado la aseveración de que toda potencia infinita necesariamente era un 'aleph', y tal vez pensó que, eventualmente, podría demostrar el *Teorema del Buen-Orden*. Nosotros, sin embargo, discrepamos en dos importantes detalles. Primero, que Cantor debió, en principio durante el momento de su descubrimiento, haber considerado dichas proposiciones (las contradicciones), como algo insano e indeseado; y que, tal vez más tarde, las considerara como elementos contribuyentes al desarrollo de la teoría de conjuntos. Existe, además, otro factor no matemático que Dauben no incluyó en su explicación. Tal factor es el apoyo que Cantor brindaba al Papa León XIII y a un grupo de teólogos. Cuando Cantor expuso sus ideas a uno de ellos, aseguró que su teoría no representaba amenaza alguna a la teología católica. Cantor argumentaba que él estaba estudiando las propiedades matemáticas de un «transfinito actual», pero que de ninguna manera le era posible explicar la naturaleza ('absolutamente infinita') de Dios o de sus atributos. Tal vez, cuando Cantor comprendió la necesidad de 'limitar' su teoría de números cardinales y ordinales transfinitos, también supo que estaba en lo cierto en cuanto a su distinción entre el 'infinito absoluto' y el 'transfinito actual' y, que ésta no era sino otra prueba de la solidez y consistencia de los fundamentos de sus ideas.

§3 BOSQUEJO DE UNA NUEVA INTERPRETACION.- Supongamos que Cantor no hubiera realmente distinguido entre *multiplicidades consistentes* y *multiplicidades* *inconsistentes* desde 1883, como se lo comunica a Grace Young en 1907.[1] Cantor argumenta que esta necesidad de distinguir entre diversos tipos de multiplicidades ya la había concebido él—al menos desde 1883—como lo señalan sus notas '1' y '2', donde llama a Ω una 'sucesión de números absolutamente infinita', *i.e.*, Ω es una *multiplicidad inconsistente*.

Un pequeño detalle que Cantor no aclara es si primero se dio cuenta de que el sistema de todos los números cardinales era una *multiplicidad inconsistente*, o, si, por el contrario, primero llegó a esta conclusión cuando examinó el sistema de todos los números ordinales. Esto es, no tenemos certeza alguna si Cantor encontró primero la contradicción del máximo número ordinal, o, por otro lado, si primero se percató de que el pensar en la totalidad absoluta del sistema de los números cardinales conducía a contradicciones. El saber cuál fue descubierta primero, nos podría indicar los posibles caminos intelectuales seguidos por Cantor y así también, podría sugerir las fechas probables de su descubrimiento.

En caso que Cantor hubiera descubierto primero la contradicción del máximo número cardinal, es plausible entonces suponer que al menos, este descubrimiento hubiese acontecido entre 1890 y 1892, aproximadamente, cuando Cantor logró encontrar la forma de generar nuevos números cardinales transfinitos a través de su demostración, de que la cardinalidad del conjunto potencia (*i.e.*, el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado) es siempre mayor que la cardinalidad del conjunto original. Es posible, que una vez demostrado este teorema, Cantor se preguntara qué pasaría con el conjunto potencia del

---

[1] Veáse la carta que le dirige Cantor a Grace Young (5 Marzo 1907) con motivo de la publicación de su libro *Theory of Sets of Points*. (New York: Chelsea Publishing Co. 1972. (Originalmente publicado en 1906)). Esta carta está citada en: Moore & Garciadiego, *Op.Cit.*, p 342.

conjunto "de todo lo pensable", o con el conjunto potencia del "conjunto universal".

También son probables otro tipo de explicaciones y versiones, algunas incluso fuera del ámbito de las matemáticas, como hemos señalado. Desgraciadamente—como ya mencionamos al inicio de este ensayo—no contamos con todos los elementos y pruebas para dar una respuesta definitiva a la interrogante que se genera al preguntarnos la posible trayectoria intelectual que siguiera Cantor en su descubrimiento. Por lo pronto, deseamos que este pequeño ensayo haya abierto las puertas hacia una nueva posibilidad de interpretación.■