LA FILOSOFIA DEL INFINITO

Joseph W. Dauben *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the infinite.* Cambridge. Massachusetts: Harvard University Press. 1979. xiv + 404 pp. (No. Catálogo Biblioteca Instituto de Matemáticas: GA248.D27).

Joseph Warren Dauben, ex-editor de la revista *Historia Mathematica* y actual presidente de la Comisión Internacional de Historiadores de la Matemática, es un joven investigador norteamericano quien se ha dado a conocer a sus colegas como uno de los miembros más serios y profesionales de la comunidad. Las primeras muestras de sus investigaciones en torno al trabajo de Georg Cantor (1845-1918), se remontan al año de 1971 cuando publicó su artículo **The trigonometric background of Georg Cantor's Theory of Sets** (*Los antecedentes trigonométricos de la teoría de los conjuntos de Georg Cantor*) donde, como su título lo indica, analiza los antecedentes matemáticos de lo que sería posteriormente la teoría castoniana de conjuntos. Desde entonces, no han cesado de aparecer otros ensayos igualmente interesantes y valiosos, donde estudia diversos aspectos históricos que conforman la obra de Cantor. Este libro está compuesto por su obra previamente publicada hasta el año de 1979, revisada y actualizada.

Cantor es hoy en día una de esas figuras mitológicas que han creado los matemáticos para su propio beneplácito y satisfacción (no discutiremos por el momento las razones); y tal vez sea, junto con la imagen de Evariste Galois (1811-1832), la que conserva mayor arraigo y tradición. Uno de los objetivos de Dauben, al intentar reconstruir el pasado, es desmitificar la personalidad de Cantor, aunque no por ello evite crear nuevos mitos y leyendas, a pesar que lo haga de una manera totalmente involuntaria.

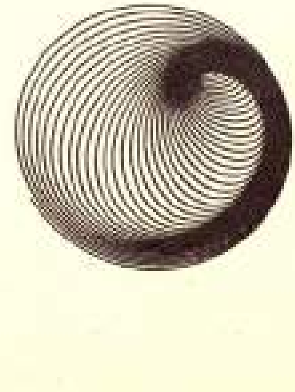
El libro de Dauben se encuentra dividido en doce capítulos centrales, junto con una introducción, apédices, notas, bibliografía e índice. Los capítulos siguen un orden estrictamente cronológico, iniciándose con un estudio sobre el estado del análisis matemático a mediados del siglo diecinueve. ¿Por qué es necesario este estudio? Porque como lo señala atinadamente Dauben a través de su libro, el trabajo de Cantor se origina en esa rama de las matemáticas, más precisamente, en el estudio de ciertas series trigonométricas relacionadas con la obra de Joseph Fourier (1768-1830). Este estudio de Cantor nos permite ver claramente como se van transformando los proyectos de investigación a consecuencia del surgimiento de nuevos problemas que requieren de una inmediata atención. En el caso particular de Cantor es fascinante observar como su interés original por dichas series trigonométricas lo condujo, primero, al estudio de ciertas discontinuidades de las funciones respectivas; segundo, al análisis de algunas de las propiedades de los conjuntos de puntos que formaban estas discontinuidades; y tercero, le hace advertir la forma en que a su vez, este último estudio fue relegado por otras cuestiones ya más identificables como elementos pertenecientes a la moderna teoría de conjuntos; tal es el caso de algunas propiedades relacionadas con conjuntos bien-ordenados.

Para la mayoría de nosotros, que estamos acostumbrados a aprender las matemáticas cuando éstas se encuentran ya en un punto acabado, pulido y perfeccionado, resulta muy interesante estudiar el contenido del artículo de Cantor titulado **Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre** [*Fundamentos de una teoría general de conjuntos (1883)*]. Este artículo claramente nos muestra su forcejeo por presentar sus ideas de una manera ordenada y coherente, a pesar de no tener todos los elementos necesarios para hacerlo. Por ejemplo, en este texto, Cantor discute en repetidas ocasiones el concepto de "potencia" o "número cardinal" pero hasta ese momento no pudo encontrar la forma que lo identificara con el concepto de "número", como más tarde lo hará en sus ensayos de 1895 y 1897. Tampoco se advierte que haya encontrado la simbología conveniente para las diferentes potencias; es decir, no utiliza en esa época sus famosos alephs (ℵ) para representarlas, ni una manera precisa de generarlas. Sin embargo, es posible hallar aquí formulaciones primitivas de la *Hipótesis del Continuo y del Teorema del Buen-Orden*, aunque por entonces él supone que este último principio es una "ley universal" que no tiene porqué ser cuestionada —no obstante, más adelante, en el mismo artículo, encontramos un intento de demostración. Por otro lado, en este ensayo de Cantor, y en el análisis que hace Dauben de él, nos percatamos de la justificación filosófica y matemática que Cantor propone para dar un paso más allá y discutir por primera vez el conjunto de todos los números naturales

$$\{1,2,3, \ldots, n, \ldots\}$$

como un infinito ya dado en su totalidad. Es decir, como un infinito actual, y no como un conjunto infinito potencialmente.

Más adelante, el análisis de Dauben nos conduce al estudio de dos de los artículos más famosos de Cantor titulados: **Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre** [*Contribuciones a los fundamentos de la teoría de los números transfinitos (1895 & 1897)*]. Durante su exposición, Dauben analiza históricamente cómo construyó Cantor los números cardinales finitos (que corresponden a los mismos números naturales) y cómo esta construcción le llevó a mostrar, de una manera positiva, la existencia de números cardinales transfinitos que debían estar asociados con conjuntos



Cantor in 1917

infinitos. Ha sido esta construcción de los números cardinales finitos, a partir de la definición de conjunto y potencia de un conjunto, lo que motivó en algunos sugerir que la teoría de conjuntos se haya convertido en piedra angular de las matemáticas; debido a esto que si el programa de "*aritmetización del análisis*" proponía reducir los fundamentos del análisis matemático al concepto de número natural, y Cantor había mostrado que este último podía ser construido a partir del concepto de conjunto, entonces era factible llevar esta aritmetización del análisis a un extremo más exagerado aún y hacer descansar los fundamentos del análisis sobre el concepto de conjunto.

La gran mayoría de nosotros conoce a grandes rasgos la evolución de la teoría de conjuntos. Se sabe que ésta es desarrollada —casi individualmente— por Cantor. Se sabe, así mismo, que la obra no fue bien recibida por sus contemporáneos (lo cual es más bien lo lógico y no lo excepcional) y que bajo el ojo crítico de algunos de ellos surgieron ciertas paradojas en las raíces de la teoría de conjuntos que pusieron en entredicho el sano fundamento de esta rama de las matemáticas y, consecuentemente, de las matemáticas mismas. Sin embargo, es de extrañar, que si éste realmente fuera el caso, ningún historiador previo a Dauben se hubiera tomado la molestia de tratar de explicar cómo concebía Cantor dichos argumentos y qué significaban para su teoría. A pesar que en lo personal no estoy de acuerdo con la interpretación de Dauben, no por eso dejo de reconocer que su hipótesis es muy interesante y consistente. Dauben sostiene que Cantor no únicamente conocía la existencia de las paradojas, sino que además las percibía como aportaciones *positivas* a su teoría. Dauben basa su argumento en la forma como Cantor relacionó sus números transfinitos y el Absoluto, afirmando que Cantor no concebía que la matemática tradicional fuese capaz de analizar dichos conceptos. Sólo Dios estaba capacitado para comprender el grado de perfección de sus ideas.

Como señalábamos con anterioridad, uno de los objetivos de Dauben es el de desmitificar la figura de Cantor. Esto no implica que la nueva imagen que de él obtengamos sea necesariamente aburrida o poco atractiva. Además, nuestro objetivo como historiadores no es el de presentar las matemáticas desde una perspectiva más folklórica, cautivante o llamativa, sino intentar reconstruirlas en un contexto más "real" —más apegado a los hechos. No quisiéramos extender innecesariamente esta reseña discutiendo algunos elementos periféricos al libro de Dauben, pero baste con recordar al lector que en innumerables ocasiones algunos matemáticos, en su afán por popularizar o divulgar las matemáticas, han distorsionado la precisión de algunos eventos, provocando se diseminen leyendas y mitos.

En el epílogo del libro titulado: **The significance of Cantor's personality**, (*La significancia de la personalidad de Cantor*), Dauben analiza el supuesto papel que jugó la figura dominante del padre, así como la evolución y consecuencia de los distintos desequilibrios mentales que sufrió, principalmente después de 1884 hasta su muerte en 1918. Aunque en estas dos cuestiones Dauben presenta su propia interpretación, en otras, (*e.g.* el surgimiento de las paradojas y el desarrollo de distintas escuelas filosóficas concernientes a los fundamentos de las matemáticas) se apega a comentarios más tradicionales y es ahí donde nuestras interpretaciones históricas difieren.

Obviamente, como toda fuente publicada, el libro contiene pequeños errores y defectos; algunos de éstos en los aspectos matemáticos, filosóficos e históricos ya han sido señalados con anterioridad. Existen escasos errores de impresión sobre los cuales el autor no tiene culpa alguna. Otros, son de contenido, como la selección de las cartas incluidas en los apéndices que le fueron impuestos por la propia casa editorial; sin embargo, hay dos errores del primer grupo que quisiera comentar en esta ocasión, y que nos conducen a la cuestión de crear nuevos mitos y leyendas.

En el primero de ellos, en la propia introducción de su libro (p 2) Dauben menciona algunas de las fuentes poco confiables en torno a la figura de Cantor (*e.g.* Eric. T. Bell, *Men of Mathematics*, New York: Simon & Schuster, 1937, 590 pp. Traducida al español como: *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires: Losada, 1945.) y la influencia que éstas ya han ejercido en la comunidad matemática. En particular, refiere que incluso Bell llegó a influenciar a Bertrand Russell (1872-1970), quien en su autobiografía se mofa del carácter lunático de Cantor. Desearía aclarar que la fuente de información de Russell no fue necesariamente el libro de Bell, que no dudo Russell haya leído en los 1930s. Russell tenía conocimiento desde principios de siglo, como lo atestigua un diario personal suyo donde aparece una nota alusiva a este evento en el año correspondiente a 1901, que Cantor se había visto forzado a pasar esporádicas temporadas en clínicas mentales. El dato tal vez no revista gran importancia a algunos lectores de hoy en día, pero tenemos que tomar en cuenta que los familiares cercanos a Russell acostumbraban asociar (e intentar influenciar en importantes decisiones) al filósofo británico con la posibilidad real de que éste último podía perder la razón. Y aunque la ciencia de la genética apenas se empezaba a desarrollar por aquellos días, no era difícil aceptar que los ejemplos de individuos insanos mentalmente se repetían con demasiada frecuencia dentro de su familia. El temor de Russell era tan real, que por aquellos días acostumbraba practicar métodos de control natal para evitar se continuara su estirpe. Aún más, también entonces la propia esposa de Russell se vio obligada a pasar una larga temporada en una "casa de descanso" a consecuencia del inesperado aviso de su marido de que había dejado de amarla. En contraposición a la forma tan ligera y superficial como Russell comenta en su autobiografía (publicada en 1967) la personalidad de Cantor, el hecho del efecto que debió haber causado la noticia (en 1901) de que éste había perdido la razón, debió haber sido devastador, o al menos impactante.

El segundo de estos errores está relacionado con nuestro afán por tratar de encasillar, bajo etiquetas pomposas, algunas de nuestras actividades intelectuales usualmente relacionadas con las concepciones filosóficas y políticas que nos son propias. Es muy común oír en los pasillos "fulano de tal es un positivista" o "mengano es un reformista", entre otras expresiones, generalmente manifestadas con el afán de ofender al susodicho. Es del mismo modo, práctica común, al realizar un trabajo de historia y/o filosofía de la ciencia, el clasificar individuos bajo los nombres de diversas escuelas filosóficas. En el caso particular de las matemáticas, no es difícil encontrar fuentes secundarias afirmando "el logismo" de Giuseppe Peano (1858-1932), o "el platonismo" de Euclides (*fl.* 300 A.C.) o Galileo Galilei (1564-1642), por mencionar sólo algunas de las aseveraciones en este sentido. Tampoco es raro ver notas alusivas a los famosos "pseudoprecursores". Dauben, en particular, discute "el intuicionismo" de Henri Poincaré (1854-1912) y de Emile Borel (1871-1956) (p. 266-267). No entraremos aquí en detalles por considerar que una discusión adecuada sería demasiado extensa, pero baste con reflexionar que no por el hecho de que ciertos intelectuales, especialmente filósofos, coincidan con algunos (tal vez varios) de los principios que "definen" o "determinan" una escuela filosófica, debemos clasificar a estos individuos como defensores de tales causas. De ninguna manera quisiéramos desprestigiar las formas de pensar de Poincaré y Borel, pero sí es importante señalar que sus posturas "filosóficas" distan mucho de la seriedad y profundidad de los principios de la escuela intuicionista fundada por L.E.J. Brouwer (1881-1966). Porque de la misma manera que es posible encontrar algunas semejanzas y coincidencias entre estos tres matemáticos, también es posible descubrir otras con otros matemáticos y filósofos, como por ejemplo, David Hilbert (1862-1943), el fundador de la escuela formalista y es entonces cuando podríamos clasificarlos o identificarlos con estas nuevas claves, lo cual provocaría un nuevo caos.

A pesar de éstas, y otras posibles objeciones y críticas, el libro no deja de ser una lectura obligatoria para todos aquellos interesados en la filosofía e historia de las matemáticas; y aquí sí tenemos, probablemente, en contraposición con el trabajo de Kennedy reseñado en alguna ocasión anterior, la biografía definitiva de Cantor.

Dr. Alejandro Garciadiego D.