Grundlagen der Matematik

Rudolf Carnap

David Hilbert - Paul Bernays. *Grundlagen der Matematik*. Berlín: Springer. 1934, Vol. I, xii-471 pp.

En las discusiones habidas en los tres últimos decenios sobre los fundamentos de las matemáticas, han surgido tres concepciones principales: la propugnada por Frege y Russell llamada *logicismo*, el *intuicionismo* representado por Brouwer y Weyl, y el *formalismo* desarrollado por Hilbert y sus colaboradores, ante todo Bernays. La presente obra, en tanto exposición detallada y sistemática del formalismo, poseerá la máxima importancia para todos los interesados en los problemas fundamentales. El primer tomo se publicó en 1934; la publicación del segundo estaba prevista para poco después, pero se postergó debido al torbellino desatado por las conclusiones obtenidas por Goedel. La meta de los esfuerzos de Hilbert era demostrar, en el marco de una meta-matemática formal, la no-contradictoriedad de la matemática clásica. Esta meta-matemática pretende limitarse a determinados métodos de demostración, los cuales considera especialmente dignos de confianza: los llamados métodos finitos. Hilbert desea renunciar a cualquier método de demostración proveniente de la matemática clásica. Por otra parte implica el resultado de Goedel que, cuando un sistema matemático "S" sea libre de contradicciones, no es posible demostrar esta no-contradictoriedad de S en el marco de ninguna meta-teoría que utilice solamente los recursos lógicos que existan en S. De ello se desprende un nuevo obstáculo en el camino a la meta de Hilbert. Algunos matemáticos, pero no el mismo Goedel, han llegado a opinar que ésta ya se ha vuelto inalcanzable. En este primer volumen, el problema no se discute todavía. Sólo en el prefacio Hilbert comenta "que la opinión que surgió momentáneamente, según la cual ciertos recientes resultados de Goedel implican que mi teoría de la demostración no es realizable, se ha demostrado que es falsa. Aquel resultado demuestra en realidad solamente que en las ulteriores demostraciones de no-contradictoriedad, es menester aplicar el método finito de demostración con más persistencia de la requerida para el tratamiento de los formalismos elementales". La realización de esta tarea está prevista para el segundo tomo.

Si bien el primer tomo no trata los temas candentes de actualidad, sin embargo reviste gran importancia en tanto exposición detallada de la concepción formalista. En primer lugar se explican y discuten los problemas de la no-contradictoriedad y la decisión. A continuación se explica la "deducción finita" y sus límites. Éste es un punto central de toda la doctrina, acerca del cual he de referir algo más adelante. Entonces se empieza con la construcción del sistema formal: cálculo de proposiciones, inclusión del signo de identidad y del signo de función. Agregando los axiomas de Peano se construye en diversas variantes un sistema de la teoría de números que incluye el principio de la inducción completa. Se discute en detalle la utilización de definiciones recursivas —recursiones sencillas y cruzadas, especialmente en conexión con la conservación de la no-contrariedad a la hora de incluir definiciones recursivas. En el capítulo final se discuten las diferentes caracterizaciones, es decir expresiones de las formas "todo número x para el cual se cumpla que A(x)". Se determinó que tal expresión debe ser permisible a condición de que se demuestre que existe exactamente un número dotado del atributo característico. (A este propósito he de notar que esta determinación no es inmune a las críticas, ya que mediante ella se vuelven indefinidas las determinaciones de forma del sistema; es decir que no existe ningún procedimiento por el cual sea posible decidir, para cada hilera de signos que se presente, si se trata de una fórmula perteneciente al sistema o no). Como caracterización especial se introduce "el menor número x para el cual se cumpla que A(x) (o cero, si no existe tal número)". Se demuestra que, caso de que los axiomas de un sistema no incluyan variables de formula (variables de predicado), las caracterizaciones, expresiones de la forma: "aquel que cumpla la condición siguiente...") se vuelven susceptibles de ser eliminadas, que por lo tanto, la no-contradictoriedad del sistema se conserva cuando se incluyen estas expresiones. De esto se deriva otro importante resultado: que cuando se introducen la suma y la multiplicación, todas las demás definiciones recursivas pueden ser reemplazadas por definiciones explícitas. Finalmente se demuestra que los predicados pueden reemplazar los signos de función. El problema que plantea la no-contrariedad para el sistema construido de la teoría de números sigue actualmente sin resolver. (Entretanto *Gentzen* adujo en 1937 una demostración de esta no-contradictoriedad. Pero, puesto que en la meta-teoría utiliza números ordinales transfinitos, y aplica el principio de la inducción transfinita, es necesario indagar a fondo si sus medios de prueba se encuentran aún en el ámbito de la "deducción finita".)

Quisiera agregar un comentario sobre la exposición de las cuestiones fundamentales en los capítulos introductorios de este volumen. Aquí hallamos dos tipos de pregunta y de construcción de conceptos, o al menos dos tipos de formulaciones. En primer lugar están las formulaciones formales, es decir aquéllas que se refieren tanto al tipo de signos utilizados en las expresiones del sistema tratado, como en qué sucesión se presenten éstos, todo ello sin mencionar lo designado, por ejemplo, se puede tratar formalmente preguntas del tipo siguiente: "La serie de fórmulas que se nos propone, ¿es una demostración?", "¿Existe una demostración para la fórmula propuesta?", "¿El sistema propuesto está libre de contradicciones?", etcétera. Después de que el mismo Hilbert hubiera tantas veces recalcado el carácter formal de su meta-matemática o su teoría de la demostración, parece verosímil la concepción según la cual todos los problemas referentes a las bases lógicas de la matemática y especialmente todas las cuestiones referentes a la no-contradictoriedad tienen este carácter. Yo comparto esta opinión, y creía coincidir en ella con Hilbert. Pero ahora en los capítulos mencionados hallo muchas definiciones y cuestiones no formales, precisamente en conexión con uno de los puntos centrales de toda la concepción, es decir en la caracterización de lo que Hilbert llama *punto de vista finito o método finito*. A esta caracterización se le dedican amplias exposiciones. Muchas determinaciones son negativas: se nombran supuestos que no se admiten en tanto finitos (p. ej.: "El presupuesto según el cual los números enteros constituyen un dominio de individuos, es decir una totalidad terminada" (p. 15); Frege utiliza la "totalidad, cuya existencia presuponemos, todos los predicados (siquiera) imaginables que consistan de una sola cifra" (p. 15); "El supuesto [de Frege] de la totalidad de la serie numérica" (p. 15). Al supuesto de tal totalidad del "dominio del individuo" subyace... un supuesto idealizante que se suma a los supuestos formulados en los axiomas" (p. 2). Por otra parte se dan también determinaciones positivas (p. ej. "que extraigamos conclusiones libremente, directamente, refiriéndonos al contenido, lo cual realizamos mediante experimentos mentales, valiéndonos de objetos representados intuitiva y plásticamente, y sin hacer uso de supuestos axiomáticos" (p. 32): "Expresando tajantemente con la palabra 'finito' que la consideración, afirmación o definición referida se encuentran en el límite teórico de la imaginabilidad de los objetos, así como de la viabilidad de los procesos, y por lo tanto se realiza en el marco de la contemplación concreta" (p. 32). Estas descripciones de los métodos finitos no son formales; aquellas formulaciones no hablan de signos, sino de lo designado; éstas en cambio hablan de los procesos de la imaginación; ambas rebasan el ámbito de la lógica. (En la terminología más reciente: ninguno de los dos tipos de determinación es sintáctico; las primeras determinaciones son semánticas, las últimas pragmáticas.) De por sí no hay objeciones a ello, puesto que las matemáticas sin duda alguna pueden, y deben, considerarse desde diversos puntos de vista. Pero aquí la confusión de cuestiones lógicas con las no lógicas empañan la claridad de la tesis central de Hilbert. La pregunta de si sólo existen números individuales, o en cambio existe la serie numérica completa como totalidad, se acerca peligrosamente a las formulaciones de los metafísicos. Y las mencionadas determinaciones positivas dan una descripción más psicológica que lógica del método, y son por consiguiente demasiado vagas para permitirnos decidir en un caso dado si una conclusión propuesta puede ser considerada finita. Parece deseable que el conjunto de los medios designados como finitos y cuya utilización es permisible para fines de la prueba de la no-contrariedad, sea delimitado por determinaciones formales. Cuando, como parece, los adherentes a la opinión de Hilbert consideran teóricamente imposible una delimitación precisa, se debería intentar sin embargo una aproximación formal superior y una inferior susceptibles de ser mejoradas gradualmente, mediante su localización entre cotas cada vez más estrechas. (Así se podría, por ejemplo, en lugar de la determinación no formal "En la deducción finita se rechaza el supuesto de la totalidad de la serie numérica", postular por ejemplo la siguiente determinación formal: "En la deducción finita son rechazadas las variables numéricas vinculadas", o quizá: "En la deducción finita se rechaza la negación de una proposición universal (*Allsatz*) con una variable numérica", o cualquier otra cosa que se quiera decir con aquella determinación no formal.) Esta afirmación no la hago con ánimo de criticar el libro; por fortuna las discusiones referidas no afectan los valiosos aportes contenidos en la parte principal del libro, ya que éstos resultan de un razonamiento estrictamente formal. El comentario tiene solamente la finalidad de expresar el deseo, que ojalá se cumpla en el segundo tomo, de que se nos proporcione una caracterización del punto de vista finito, la cual en lugar de (o además de) las formulaciones del tipo aludido, nos ofrezca determinaciones formales, permitiéndonos así una comprensión más clara de la tesis de Hilbert.