Glottlob Frege. Cálculo y características

Carlos Álvarez

A diferencia de lo que usualmente se cree, la obra de Frege no se estructura en torno a algunos textos de lógica matemática, sino en torno al proyecto de establecer una escritura que sea a la vez, un ensayo característico y un cálculo de la razón.

Los primeros intentos de una escritura característica pueden rastrearse en la obra de Leibniz, quien por este medio aspiraba llegar a un lenguaje en el cual la escritura fuese capaz de llevarnos de manera inmediata y completa a los referentes de que se hablaba. Esto es, el proyecto de Leibniz pretendía que este lenguaje, siendo en especial un lenguaje escrito, estuviese formado por unos cuantos signos o caracteres simples, cuyas combinaciones permitiesen el conocimiento directo de los objetos referidos. Junto con ello, se trataría también de que este lenguaje característico sirviera de mecanismo ideal para expresar los vínculos y relaciones que existen entre ellos.

Tal y como Frege pretende retomar esta idea de Leibniz, las tareas a realizar no consisten únicamente en la elaboración del lenguaje perfecto capaz de ser objeto y no simple vehículo de conocimiento, sino que, a la par, es necesario que el lenguaje buscado lleve consigo las leyes de su propia arquitectónica. El lenguaje característico proyectado debería ser la expresión de las leyes del pensamiento que necesariamente ordenan y rigen la estructura de las matemáticas.

A partir de estos elementos puede comprenderse la reacción de Frege ante las críticas a su primera obra: IDEOGRAFÍA (*Begriffsschrift*), notablemente la relación que de ella hizo E. Schroeder, afirmando que en ella no se había hecho otra cosa que complicar los trabajos esclarecedores del álgebra de la lógica llevados adelante a partir de G. Boole. En efecto, Frege no intentó jamás escribir un nuevo tratado de lógica, ni de álgebra de la lógica, sino una Ideografía, una escritura conceptual capaz de recoger el proyecto característico enunciado más arriba. El doble carácter de la escritura conceptual, del que hemos hablado, mostraba para Frege una superioridad absoluta de su sistema sobre la reducción de la silogística aristotélica al lenguaje algebraico propuesta por Boole. Las diferencias entre los dos proyectos son vislumbradas por el propio Frege en torno a dos puntos esenciales: 1) en primer lugar, su ideografía establece los elementos necesarios de una teoría de la cuantificación. Este hecho posibilita no sólo el trabajo sobre dos registros distintos (tipos u órdenes), sino que permite dar un lugar propio a los juicios de existencia; el álgebra de Boole tiene que conformarse con una expresión algebraica del tipo $A. B \neq O$, para expresar que "algunos A son B" al ser incapaz de expresar, sin más, que "existen A". 2) El álgebra de la lógica, carente de los recursos de una característica, tiene que servirse de los mismos signos para expresar tanto las relaciones entre los términos de una ecuación como las relaciones entre los enunciados proposicionales (confusión entre las proposiciones primarias y las proposiciones secundarias, tales y como éstas fueron definidas por el propio Boole).

Estos elementos muestran a los ojos de Frege cómo su Ideografía es la única apta para desarrollar el proyecto cuya meta es analizar las conexiones necesarias que deben tener entre sí todas las verdades científicas al momento de constituir una teoría: la serie de inferencias que pueden desprenderse de una verdad, las proposiciones que necesariamente se desprenden de ella, son sólo comprensibles, si se toma en cuenta la naturaleza de las verdades consideradas.

El proyecto así enunciado tiene como finalidad el poder mostrar la naturaleza puramente lógica de las proposiciones aritméticas. Para llevar adelante esta tarea, Frege plantea que el lenguaje característico deberá, expresar las leyes que rigen tanto la constitución de los números como los procesos mismos, gracias a los cuales es posible la estructura de sus leyes. De esta manera el proyecto se traduce en la expresión de todas las proposiciones de la aritmética como una sucesión de inferencias lógicas. El contenido conceptual de cada proposición debe ser tratado sin ningún impedimento gramatical o sintáctico que lo haga aparecer como una presuposición; este contenido conceptual ha de ser tomado de manera directa para analizar los encadenamientos demostrativos que de él se desprenden. En este sentido, el proyecto es, además de una *característica*, un *cálculo de la razón*. Para su realización las proposiciones gramaticales y sus elementos sujeto/predicado, serán remplazados por juicios constituidos por la pareja función/argumento. Cada juicio es considerado en su totalidad, es para ello precedido del símbolo de juicio ($\vdash$) y está formado por la combinación de ideas o pensamientos que expresan su contenido; para denotar a este contenido se utiliza el símbolo (—). Tomado únicamente como un contenido, como una mera combinación de ideas, nada puede seguirse de ésta en términos de inferencias lógicas, dada esta situación, para que una conclusión pueda extraerse de una tal combinación es necesario que ésta sea considerada como un hecho; es decir, que dicha combinación de ideas se afirme. Es esto lo que determina la transformación de un pensamiento —visto como combinación de ideas— en un juicio; concebido como la afirmación de dicho contenido, pues sólo a partir de ese momento la primera conclusión puede ser tomada aunque el juicio sea verdadero o falso, para iniciar una cadena de inferencias. Así, la idea o combinación de ideas que son afirmadas, serán consideradas en su contenido conceptual al margen de su presentación en una proposición. Dados dos contenidos de juicio *A* y *B*, puede pensarse en cuatro posibles combinaciones entre ellos, que dependan de su verdad o falsedad. Las combinaciones mencionadas son: 1) que tanto *A* como *B* sean verdaderos. 2) que *A* sea verdadero y *B* falso. 3) que *A* sea falso y *B* verdadero. 4) que tanto *A* como *B* sean falsos. En todas estas combinaciones se toma en cuenta que la veracidad o falsedad se concluye, en primera instancia de que un contenido conceptual sea afirmado, por vía de el símbolo mencionado o negado. A partir de este momento Frege propone el símbolo $\begin{array}{l}\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\, A\\ \quad\llcorner\!\!-\, B\end{array}$ para expresar la negación del tercer caso. La línea vertical expresa una condicional, ya que en el caso más general, ahí donde no se sabe si *A* y *B* deben ser afirmadas o negadas, ahí donde se ignoran los contenidos de *A* y de *B*, la situación expresada por el símbolo nos dice que hay que negar el caso en el que *B* es afirmado y *A* es negado. Ahora bien, como de antemano se desconocen las posibilidades de afirmación o de negación de cada juicio, la negación de 3) nos dice *que si B* es afirmado, *entonces A* también debe ser afirmado.

El símbolo condicional permite la combinación de más de dos contenidos conceptuales. Así el símbolo $\left(\begin{array}{l}\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\, A\\ \quad\llcorner\!\!-\, B\\ \quad\llcorner\!\!-\, P\end{array}\right)$ que pone en relación los contenidos *A*, *B* y *P*, niega el caso en que A es negado y B y P son afirmados. Además es posible afirmar que de ($\vdash B$) y de ($\vdash$ A B) se puede concluir ($\vdash A$). Un nuevo símbolo se introduce para establecer de manera explícita la negación de un contenido conceptual: ($\top$).

Las combinaciones para establecer la conjunción y la disyunción son posibles a partir de estos dos símbolos de negación y el condicional. Una dificultad de otro orden aparece en el momento en el que Frege trata de introducir un símbolo para expresar la igualdad. En primer término es necesario establecer a qué se referirá la igualdad. En todo lo que hasta ahora se ha dicho, Frege está interesado en la conexión de contenidos conceptuales y es entre ellos que deberá definirse también la igualdad. Se trata así de establecer que dos combinaciones de ideas pueden expresar el mismo contenido conceptual, de modo que a partir de ambos sea posible concluir los mismos juicios cuando son afirmados. Así, $\vdash (A \equiv B)$ expresa la identidad de los contenidos conceptuales de los símbolos A y B.

El concepto de función se utilizará, como ya se dijo, para sustituir la forma tradicional de las proposiciones y de los juicios; Frege considera expresiones cuyo contenido incluye signos que pueden ocurrir una o varias veces y ser sustituidos en cada caso por otros signos (las variables); la parte que queda fija es la función y la parte, variable es el argumento de ésta. La expresión de una función indeterminada es $F(A)$; A es el argumento, y por $\vdash F(A)$ se expresa lo siguiente: el argumetno A está sometido a la función F, o bien, A tiene la propiedad F. Esta afirmación se puede generalizar mediante el símbolo $\vdash x \text{-} F(x)$ que dice que cualquier argumento x tiene la propiedad F, o bien que $F(x)$ es el caso para cualquier argumento x.

La posibilidad de que esta escritura conceptual sea capaz de expresar a los juicios de la aritmética, exige que a través de ella sea viable establecer todos sus conceptos y operaciones fundamentales; éste es el medio adecuado para mostrar que estos conceptos y operaciones se derivan sólo de las leyes del pensamiento. Es este, en fin, el propósito de la escritura conceptual: hacer ver cómo lo que ella expresa se deriva de la lógica pura. La sucesión de los números naturales y la operación que la ordena (el paso de n a $n+1$), deben descansar sobre principios lógicos expresables en la *Ideografía*. Ésta será pues la siguiente tarea a realizar.

Para la definición de la sucesión, Frege toma en cuenta el hecho de que, a diferencia de los conceptos anteriormente introducidos a través de su *Ideografía*, en este caso no puede tratarse de un juicio, dado que de antemano es imposible afirmar o negar la propiedad de sucesión. Dicha propiedad es enunciada por Frege en los siguientes términos: "si de la proposición que x tiene la propiedad F puede inferirse generalmente, para cualquier x, que todo resultado de la aplicación del procedimiento f a x tiene la propiedad F, entonces se dice que la propiedad F es hereditaria en la f-sucesión" (en este caso es necesario señalar que Frege entiende que si $y = f(x)$, entonces y es el resultado de aplicar a x el procedimiento f). El procedimiento que se trata de explicar es el que una propiedad F, es hereditaria en la sucesión f si todo elemento que esté en relación con uno que ya tenga una propiedad F, también tendrá esta propiedad F.

Dos condiciones serán establecidas para poder construir con esta escritura conceptual el principio de inducción. Esto resulta como algo novedoso toda vez que para Frege el principio de inducción será una condición puramente lógica, y no únicamente, como en los análisis previos de Bernoulli o Dedekind, como una propiedad deducible de los números enteros. Las condiciones propuestas para ser combinadas son las siguientes: 1) F es hereditaria en la f-sucesión y 2) que todo resultado de aplicar a un elemento x la propiedad f tiene también la propiedad F. Si de estas dos condiciones se puede concluir que y tiene la propiedad F, entonces se dice que y sucede a x en la f-sucesión. Así, si x tiene la propiedad F, la cual es una propiedad hereditaria en la f-sucesión, y si y sucede a x en la f-sucesión (lo cual sucede, por ejemplo, si $y = f(x)$) entonces y tiene la propiedad F. Este enunciado es el correcto para expresar al principio de inducción. A partir de lo enunciado, sólo bastará mostrar que existe una operación, dada por una función f, capaz de definir una f-sucesión de la cual los números naturales son los elementos. Se ha establecido que el resultado de una aplicación f a un elemento x sucede a x en la f-sucesión, esta propiedad se puede generalizar partiendo de un elemento x y aplicando a cada resultado obtenido por el proceso f, nuevamente este proceso f. Así, se puede decir que un elemento z pertenece a la f-sucesión que comienza con x si z es idéntico a x o bien si z sucede a x en la f-sucesión. Esto último no quiere decir necesariamente que $z = f(x)$; además, Frege demuestra fácilmente que la propiedad de suceder a x en la f-sucesión es hereditaria en la f-sucesión.

En su obra más célebre, *Los fundamentos de la aritmética*, Frege intentará responder a la pregunta acerca de la naturaleza del concepto de número, recogiendo el rico material que pacientemente construyó en su obra precedente; en particular y como ya lo habíamos dicho, tanto las propiedades de sucesión como el principio de inducción, definido —de igual manera que se hizo ver— antes de conocer la naturaleza de los números, así como las reglas enunciadas para poder establecer conforme a la lógica las inferencias posibles a partir de un cierto contenido conceptual. Junto con el análisis de las determinaciones pertinentes al contenido de los juicios, se analizarán las modalidades de sus encadenamientos. A partir de este momento y en abierta contraposición a la doctrina de Kant acerca de la naturaleza de los juicios que componen a las matemáticas y en particular a la aritmética, Frege propone la caracterización de los juicios de la aritmética como *analíticos* de acuerdo a la siguientes clasificación:

Analíticos: obtenidos sólo a partir de las leyes de la lógica y de ciertas definiciones.

Sintéticos: obtenidos necesariamente con la intervención de proposiciones ajenas a la lógica.

A posteriori: obtenidos por una proposición de hecho.

A priori: obtenidos a través de leyes universales que no requieren demostración.

Desde un principio, *Los fundamentos de la aritmética* tratan de señalar las limitaciones de las distintas definiciones o construcciones que de los números naturales se han hecho. Frege acepta que la noción de número no es concebible sin la idea de conjunto o sistema; sin embargo, no es únicamente el resultado de un proceso de abstracción de la naturaleza de los objetos reunidos en el conjunto y a partir del cual se fije su potencia. Dar un número equivale a enunciar algo acerca de un concepto, pero lo que se enuncie no puede depender de nuestra capacidad subjetiva de "hacer abstracciones". No se trata pues de hacer abstracción de la naturaleza particular de los objetos reunidos en un conjunto, sino de encontrar el concepto que permita agruparlos y que los reúna de hecho al margen de la capacidad de la percepción sintética. Frege se encamina así al análisis de los conceptos y no hacia los objetos que son por él subsumidos. A partir de ello la naturaleza de los juicios aritméticos viene a reencontrar los postulados de la *Ideografía*.

Frege introducirá la noción de "extensión de conceptos" para esclarecer esta propiedad de los conceptos que permita extraer la idea de número. Para introducir esta noción se sigue el ejemplo de un concepto geométrico: "paralelo a la recta *b*". La extensión de ese concepto consistirá en la totalidad de los objetos, en este caso las rectas, que sean subsumidas por él; es decir, se constituye de la totalidad de rectas que son paralelas a la recta *b* (la totalidad de las rectas de las cuales se puede predicar: "...es paralela a la recta *b*"). Pero Frege no entiende únicamente a esta totalidad de rectas, él entiende, por extensión del concepto, a aquello que permita pensarlas a todas ellas, o sea a la *dirección* de la recta *b*. Si ya se había dicho que dar un número era enunciar algo acerca de un concepto, Frege aclara que "el número que pertenece al concepto *F* es la extensión del concepto *equinumérico al concepto F*". Para poder definir efectivamente el número cardinal que corresponde al concepto *F*, es necesario hacer ver que si dos conceptos *F* y *G* son equinuméricos, entonces las extensiones de los conceptos "equinumérico a *F*" y "equinumérico a *G*" son idénticas. Mostrar esto será posible, según Frege, siempre que las siguientes dos condiciones sean verdaderas:

1) Si el concepto *H* es equinumérico al concepto *F*, también lo es al concepto *G*.

2) Si el concepto *H* es equinumérico al concepto G, también lo es al concepto *F*.

Con todo lo que se ha dicho las definiciones particulares son posibles: 0 es el número cardinal que corresponde al concepto "no idéntico a sí mismo". Dados dos números *m* y *n*, es decir, dados dos conceptos *F* y *G* de los cuales *m* y *n* son sus respectivos cardinales, se define "*n* sigue inmediatamente a *m* en la sucesión natural de los números" bajo la propiedad siguiente: "existe un concepto *F* y un objeto *x* que cae bajo ese concepto tal que el número cardinal que pertenece a ese concepto es *n*, y el número cardinal que pertenece al concepto 'que cae bajo *F* pero que no es idéntico a *x*' es m". Si el paso de un número al siguiente (de n a $n+1$) puede reducirse a este proceso de sucesión y esta inferencia habrá encontrado en las leyes de la lógica la justificación que siempre se trató de encontrar por otros caminos (por ejemplo, la adición de la unidad). La *f*-sucesión que se propone es "sucesión natural de los números" de tal modo que la relación *f* que afecta a *m* y *n* establece "*n* sigue inmediatamente a *m* en la sucesión de los números naturales" (es decir, *n* sigue inmediatamente a *m* si $f(m) = n$). Para que la sucesión completa de los números naturales sea definida, es necesario probar que dados dos números de los cuales uno sucede inmediatamente al otro, existe también para éste un sucesor inmediato. Esta proposición se afirma para el 0 y para un número *n* y su sucesor inmediato. Además de esto, Frege señala que: 1 sigue inmediatamente al 0 en la *f*-sucesión;

la relación *f* es biunívoca: todo número, salvo el 0, sigue inmediatamente a otro número y ninguno se sucede inmediatamente a sí mismo.

Tal y como ha sido elaborada, la teoría de Frege parece unificar las dos teorías ordinal y cardinal de las que Cantor había siempre insistido en su especificidad propia. Pero lo que constituye la novedad de Frege en relación a los ensayos previos de Cantor y Dedekind, es la subordinación de los procesos lógicos de construcción de la sucesión de los números a la existencia —también de carácter lógica— de los números mismos. Nadie había intentado jamás una interpretación tan "objetiva", entendida como al margen de nuestras capacidades subjetivas de ordenación, de comprensión, de síntesis y de abstracción, de la existencia de los números. Pero así de alto como pretendió elevarse el proyecto, así de estruendosa fue la caída al recibir Frege una pequeña notificación firmada por B. Russell. Estos elementos forman parte ya de otra historia; dejemos por lo pronto así, previo a la caída, a este intento de probar la naturaleza puramente lógica del concepto de número y, junto con ello, el carácter analítico de la aritmética.