Greek mathematics and the Orient

Leonid Zhmud

Abstract

The fundamental difference between oriental and Greek mathematics is that in Greece appear for the first time the propounding of problems in general form and deductive demonstration. Although both the majority of Greek writers and many modern historians of science regarded the Orient as the home of Greek mathematics, the Greeks could not have adopted mathematical science 'ready-made', for the simple reason that it did not exist in the Orient in the sixth century BC. As for concrete oriental *borrowings* in geometry and arithmetic, they were extremely modest and not significant in any decisive way in the genesis of early Greek mathematics.

The history of mathematics traditionally started from the sixth to fifth centuries BC, *i.e.* from the beginnings in Greece of a new type of mathematical investigation which subsequently made the essence of mathematics as a theoretical science. Research in the past 100 years has shed light on the long prehistory of mathematics, represented amongst the cultures of the Ancient Orient, above all of Sumer, Egypt, and Babylon, and then of India and China. A multitude of discoveries was made in these cultures which allowed them to solve highly-complicated problems in the fields of construction, land-surveying, the formation of a calendar, the distribution and calculation of manpower and foodstuffs, etc. But comparison with Ancient Greek mathematics clearly shows the particularly empirical and computational character of Oriental mathematics. The most developed of its branches, the Babylonian —which arose, like all the others, from practical spheres — got as far in the course of its development as the solution of problems which by far exceeded the limits of the requirements of life. In the scribal schools of Babylon, quadratic equations were solved which —although they were formulated numerically and had the form of practical tasks — were obviously useless for practical needs.

Mathesis 12 (1996) 136-165

Matemáticas griegas y el oriente

Leonid Zhmud

Resumen

La diferencia fundamental entre las matemáticas orientales y las griegas es que fue en Grecia donde apareció por primera vez la proposición de problemas en una forma generalizada junto con su demostración deductiva. A pesar de que la mayoría de los autores griegos y varios historiadores modernos de la ciencia ven al oriente como la cuna de las matemáticas griegas, los griegos no pudieron aceptar una ciencia matemática 'ya hecha' por la simple razón de que ésta aún no existía en el siglo sexto a.C. En cuanto a lo *tomado* en geometría y aritmética de los orientales, esto fue mínimo y poco significativo en la génesis de las primeras matemáticas griegas.

Es usual considerar que la historia de las matemáticas comenzó en el siglo sexto o quinto a.C., *i.e.*, el nuevo tipo de investigación —matemática— que surgió en Grecia dio subsecuentemente a las matemáticas la esencia de una ciencia teórica. Las investigaciones en los últimos cien años han arrojado un camino acerca de la larga prehistoria de las matemáticas, desarrollada por las antiguas culturas orientales, especialmente la sumeria, la egipcia y la babilónica; y posteriormente la hindú y la china. Importantes descubrimientos fueron hechos por estas culturas, lo que les permitió resolver problemas altamente complicados en los campos de la construcción, la agrimensura, la formación del calendario, la distribución y el cálculo de recursos humanos y productos alimenticios, entre otros. Pero comparadas con las antiguas matemáticas griegas, éstas muestran su carácter particularmente empírico y numérico, propio de las matemáticas orientales. Las áreas más desarrolladas por los babilonios —que emergen como todas las demás, de necesidades prácticas— excedieron los requerimientos reales que les planteaba la vida cotidiana. En las escuelas de escribas en Babilonia fueron solucionadas ecuaciones de segundo grado que —aunque fueron formuladas numéricamente, tenían la forma de tareas prácticas— eran obviamente inútiles para las necesidades cotidianas.

But, all the same, Babylonian mathematics (like Babylonian astronomy) remained *computational* and not theoretical. As Vaiman, the Russian historian of oriental mathematics, put it out: "In the overwhelming majority of cases, the final goal of research was the composition of school problems and the indication of methods to solving them" [Vaiman 1961, 211]. Høyrup [1991, 44 *ff*], the author of a penetrating analysis of oriental mathematics, comes to a similar conclusion: what we find in Babylon is not *pure mathematics*, but *pure computation*.

The fundamental difference between Greek mathematics and the most complex of oriental mathematics is that there they appear for the first time as the form of the propounding of problems in general form and deductive demonstration, qualities which allow one to distinguish mathematical science form the study of numbers in general, starting with the first systems of verbal arithmetic, *i.e.* really from prehistory. We were not to appreciate this distinction, to which leading specialists have more than once pointed, we should indeed have to start mathematics with the history of mental arithmetic, for the criterion separating the science from that which came before would be lost. Although this criterion, like many others, is to some degree provisional, it seems to be important and fruitful. Turning to the problem of contacts with the East, we should remember that in Greek mathematics a complex of new qualities appeared which did not exist in the East. As a matter of fact, in naming Greek geometry and oriental calculation with the one word 'mathematics', we have different things in mind.

The history of this problem shows that the East was not infrequently regarded as practically the home of Greek mathematics. This can probably be explained not only by the testimonies of classical authors but also by the absence of written sources regarding Greek practical and computational mathematics of the eighth to sixth centuries, *i.e.* of the background against which arose the first theoretical investigations of Thales and Pythagoras. Neither economic texts of that period nor the school problems which one finds in such quantities on Egyptian papyri and Babylonian tablets have survived, and we can judge the level of the Greeks' practical mathematics only indirectly, from the remains of architectural monuments and engineering structures. The discoveries of Thales and Pythagoras seemed to many to have practically come from nothing; hence a natural striving to see in them the results of borrowing

Resumiendo, todas las matemáticas babilónicas (al igual que la astronomía) fueron *cálculos numéricos* y no desarrollos teóricos. Como Vaiman, el historiador ruso de matemáticas orientales, lo expresa: "En la abrumadora mayoría de los casos, la meta final de la investigación era la composición de problemas escolares y la indicación de métodos para resolverlos" [Vaiman 1961, 211]. Høyrup [1991, 44 *ff*], autor de un profundo análisis de las matemáticas orientales, llegó a una conclusión similar: "Lo que encontramos en Babilonia no es *matemática pura*, sino *cálculo puro*".

La diferencia fundamental entre las matemáticas griegas y la más compleja de las matemáticas orientales, es que las primeras aparecen por primera vez, y de una manera formal, cuando se intentó resolver problemas en forma general, así como hacer demostraciones deductivas. Estas cualidades permiten distinguir a la ciencia matemática del estudio de los números en general; por ejemplo, empezando realmente con el primer sistema de aritmética verbal de la prehistoria. No hemos notado esta distinción, la que los especialistas han señalado más de una vez, por lo que, necesitamos empezar la historia de las matemáticas con la historia de la aritmética mental, porque al usar el criterio de separar la ciencia de aquello por lo que surgió, se perdería ésta. Aunque este criterio, como muchos otros es en algún grado provisional, parece ser importante y fructífero. Regresando al problema de las relaciones con el oriente, debemos recordar que en las matemáticas griegas apareció un grupo de nuevas cualidades, las cuales no existían en el oriente. De hecho, en la llamada geometría griega y en los cálculos orientales la palabra 'matemáticas' sugiere cosas diferentes.

La historia muestra que el oriente no era vista con frecuencia como la cuna de las matemáticas griegas. Probablemente esto puede ser explicado no sólo por los testimonios de los autores clásicos, sino también por la ausencia de fuentes escritas griegas que contengan situaciones prácticas, así como de cálculos [numéricos] matemáticos de los siglos octavo al sexto a.C., es decir, se carece de los antecedentes de los cuales surgieron las primeras investigaciones teóricas de Tales y Pitágoras. Ni los textos que contabilizaban sus actividades de ese periodo, ni los problemas de escuela que se encontraban en grandes cantidades en los papiros egipcios, ni las tablas babilónicas han sobrevivido; y uno sólo puede juzgar el nivel de las matemáticas prácticas griegas indirectamente por los monumentos arquitectónicos y por las estructuras de ingeniería que subsisten. Los descubrimientos de Tales y Pitágoras parecerían haber surgido prácticamente de la nada, lo cual nos llevó de forma natural a pensar que se apropiaron de los resultados.

The vagueness surrounding the causes of the birth of theoretical mathematics and the extraordinary speed with which they were formulated forced people to turn to the ancient cultures of the Orient, able, as it seemed, to explain this remarkable phenomenon.

Notwithstanding the unconvincing quality of the overwhelming majority of hypotheses of this type, they cannot be disregarded, for there is a real problem in their favour: the uniquely-quick appearance in Greece of a huge number of very important cultural innovations. It is however, too simple and, obviously, unsatisfactory to solve this problem *genealogically*; besides, this way was already tried repeatedly in antiquity. So, for example, van der Waerden's position hardly differs from what Porphyry said: "that Pythagoras learnt geometry from the Egyptians, arithmetic from the Phoenicians, and astronomy from the Babylonians" (*Vit. Pyth.* 6) [van der Waerden 1979, 17 *ff*]. Kirk and Raven treat this tradition in full conformity with this, assigning the scientific knowledge known to Thales between these three peoples [Kirk 1960, 76 *ff*].

The Greeks could not have adopted philosophy and science 'ready-made' (as, for example, the Romans did), for the simple reason that neither one nor the other existed in the Orient in the sixth century. Greek mythology we believe, influenced the formation of philosophy only to a very insignificant extent —and even less of an influence should be ascribed to oriental mythology. As for concrete borrowings in certain spheres of knowledge, then, running ahead, we note that they were extremely modest (with the exception, I dare say, of in medicine) and were not significant in any decisive way in the genesis of early Greek science.

It must be stressed at this point that we are talking in the first place about the independence and uniqueness of *Greek philosophy and science*. It is not possible to overlook the *Oriental* style in ancient Greek painting, the obvious imitation by contemporary masters of models of Egyptian sculpture, the adoption of an alphabet from the Phoenicians and of the minting of coins from the Lydians, or the presence of Eastern motifs in Greek mythology. The Orient's role is also great in the transfer of technical skills [Burkert 1992].

But, in examining the spreading of cultural phenomena, both material and spiritual, we should take into account that their degrees of *social mobility* varied enormously. As a rule, things which yield immediate economic and social advantages (tools, means of conveyance, weapons, crop-growing, etc.), things which can be embodied in concrete objects which are not difficult to reproduce (everyday articles, clothes, shoes, etc.), and, finally, things which have the highest number

Las imprecisiones alrededor de las causas del nacimiento de las matemáticas teóricas, y la extraordinaria rapidez con que éstas fueron formuladas, forzó a la gente a buscar en las antiguas culturas del oriente, capaces, al parecer, de explicar este notable fenómeno.

A pesar de lo poco convincente de la mayoría de las hipótesis de este tipo, éstas no pueden ser despreciadas, ya que hay un problema real a su favor: el rápido e inigualable surgimiento en Grecia de un gran número de innovaciones culturales importantes. Es, sin embargo, muy simple y obviamente poco satisfactorio resolver este problema *genealógicamente*; además, este camino fue ya tratado repetidamente en la antigüedad. Así, por ejemplo, la posición de van der Waerden difiere fuertemente de lo que Porfirio dijo: "Pitágoras aprendió geometría de los egipcios, aritmética de los fenicios y astronomía de los babilonios" (*Vit. Pyth. 6*) [van der Waerden 1979, 37 *ff*]. Kirk y Raven están de acuerdo plenamente con esta tradición, asignando el conocimiento científico conocido por Tales a estas tres culturas [Kirk 1960, 76 *ff*].

Los griegos no pudieron adoptar filosofía o ciencia 'ya hecha' (por ejemplo, como lo hicieron los romanos), por la simple razón de que ninguna de ellas se encontraban en oriente en el siglo sexto. Creemos que la mitología griega influyó en la formación de la filosofía, pero sólo de una manera muy insignificante —y menos aún debe de ser considerada la influencia atribuida a la mitología oriental—. En cuanto a la adjudicación concreta en algunos campos en los que —los orientales— eran más adelantados para su tiempo, notamos que fueron modestas (con excepción, me atrevo a decir, de la medicina), y no fueron significativas en el camino decisivo de la génesis de la antigua ciencia griega.

Debe hacerse énfasis en este punto de que estamos hablando, en primer lugar, acerca de la independencia y singularidad de la *ciencia y la filosofía griegas*. Pero no es posible pasar por alto la influencia *oriental* en la antigua pintura griega, la clara imitación por los maestros contemporáneos de los modelos de la escultura egipcia, la adopción del alfabeto de los fenicios y la acuñación de monedas de los lidios, o la presencia de los motivos del oriente en la mitología griega. El papel del oriente es también importante en la transferencia de habilidades técnicas [Burkert 1992].

Pero, al examinar la dispersión del fenómeno de la cultura, tanto material como espiritual, deberíamos de tomar en cuenta que sus grados de *movilidad social* varían enormemente. Tenemos las cosas que proporcionan ventajas económicas y sociales en forma inmediata (herramientas, medios de transporte, armas, cosechas, y demás), las cosas que pueden ser incluidas en objetos específicos que no son difíciles de reproducir (artículos cotidianos: ropa, zapatos, etcétera), y finalmente, las cosas que tienen el más alto número of exponents and can be comparatively easily passed on (myths, rites, folklore, etc.) are those which spread easiest of all [Sorokin 1959, 459 *ff*].

From this point of view, it is understandable why the Babylonian names for the planets appear in Greece in the fourth century, but information about their movements starts to be used only 200 years later (and 500 years after the beginning of cultural contacts!). There were far fewer people in Greece who wanted —and, what is more, who were able— to apply the Babylonian calculations than there were admirers of astrology or simply those interested in *τὰ μετέωρα*. Just as evident is the huge difference between the imitation of Egyptian sculptures and the study of Babylonian mathematics: it is incomparably easier to put the former into practice than it is the latter. The history of countries which were gradually drawn into the orbit of the classical and, later, Western civilizations repeatedly demonstrates that their readiness to receive philosophical and scientific ideas was much less than their readiness toward other cultural phenomena —when this reception took place at all.

Contemporary adherents to the thesis ex *Oriente lux*, as a matter of fact, continue the tradition which had already appeared amongst the Greeks in the fifth century. The *Egyptian mirage*, representing this country as the progenitor of a large part of Greek culture, owes much of its origin to Herodotus [Froidefond 1971]. Fifty years later, Isocrates would assert that Pythagoras learnt his philosophy in Egypt (*Bus.* 28), and Aristotle calls this country the home of theoretical mathematics (*Met.* 981b23).

But what made the Greeks look for oriental roots for their own achievements? There are several reasons here. The Greeks' contacts with their Eastern neighbours, especially with the Egyptians, showed them the great antiquity of this culture. It is perfectly natural that the resemblance —real or imagined— which they found between the two cultures could be explained by the Greeks' borrowings from the Egyptians and not the other way round. Such explanations were accepted by the Greek public all the more willingly because they were in keeping with the then-dominant aristocratic ideas: the more ancient some establishment was considered, the more esteem surrounded it. To find Egyptian sources for a local cult meant the same as to discover an ancestor amongst the Homeric heroes for a recently raised family.

People faced the same problem in the fifth century which in our own era has already been occupying learned minds for several centuries: how to explain the sudden appearance of such a quantity of cultural de exponentes y que comparativamente pueden ser fáciles de transmitir (mitos, rituales, folklore, entre otros), aquellas que se dispersan con más facilidad que todas las demás [Sorokin 1959, 459 *ff*].

Desde este punto de vista, es comprensible porque los nombres babilónicos de los planetas aparecieron en Grecia en el siglo cuarto, pero la información acerca de sus movimientos empezó a ser usada sólo 200 años más tarde (¡y 300 años después del inicio de los contactos culturales!). Había poca gente en Grecia que quisiera, y lo que es más, quienes fueran capaces de aplicar los cálculos babilónicos, más allá de los admiradores de la astrología o simplemente aquellos interesados en τὰ μετέωρα. Es evidente la enorme diferencia entre la imitación de las esculturas egipcias y el estudio de las matemáticas babilónicas: Es incomparablemente más fácil poner lo formal en práctica que esto último. La historia de los países que fueron gradualmente llevados a la órbita de lo clásico y, después, a las civilizaciones de occidente, demuestra repetidamente que su disposición para recibir ideas filosóficas y científicas era mucho menor que la receptividad acerca de otros fenómenos culturales —cuando esta acogida se llevaba a cabo del todo—.

Los que concuerdan con la tesis *ex oriente lux*, de hecho, continúan con la tradición que ha aparecido ya entre los griegos en el siglo quinto. *Los espejismos egipcios* representan a este país como el progenitor de una gran parte de la cultura griega, que debe mucho de su origen a Herodoto [Froidefond 1971]. Cincuenta años más tarde, Isócrates afirmaría que Pitágoras aprendió su teoría en Egipto (*Bus.* 28) y Aristóteles llama a este país la casa de las matemáticas teóricas [*Met.* 981b23].

Pero, ¿qué motivó a los griegos a escudriñar en las raíces orientales? Hay muchas razones. Los contactos griegos con sus vecinos del este, especialmente con los egipcios, les mostró la gran antigüedad de esta cultura. Es perfectamente natural que la semejanza, real o imaginaria, que ellos encontraron entre las dos culturas pueda ser explicada por la apropiación griega de los egipcios y no al contrario. Tales explicaciones fueron aceptadas de muy buena gana por el público griego porque eran parte de las ideas aristocráticas de aquellos tiempos: entre más antiguo era considerado algún establecimiento, se le apreciaba más. Para una familia recientemente formada, encontrar fuentes egipcias de un culto local significaba lo mismo que descubrir un ancestro entre los héroes homéricos.

El problema al que se enfrentaba la gente en el siglo quinto, fue el mismo que ocupó la mente de los eruditos durante varios siglos: ¿Cómo explicar la repentina aparición de gran cantidad de innovaciones innovations in such a short time. If many researchers, who have the information of dozens of scientific disciplines at their service, are even now trying to reduce this problem to a simple genealogical outline, then what can we say about the Greeks, amongst whom descriptive history had only recently appeared? Such a train of thought was for them practically the only possible one. A sweep of the real and extremely-complex reasons for this or that innovation was quietly substituted by narration about the cultural hero-discoverer. The Greeks named many of their own names amongst their number, but they by no means avoided the opportunity to mention Egyptians or Phoenicians.

This tendency appears even more clearly in the period of Hellenism, all the more so that the religious and cultural syncretism of the period really gave grounds for such a train of thought. Later, the logic of the narrative genre was already in force: those who really journeyed to Egypt (Democritus) were sent also to India [D. L. IX, 35], and those who had not travelled *anywhere* at all (Anaxagoras, Empedocles) were endowed with some voyage anyway [Plinio. *Hist. Nat.* 30, 9; Philostr. *Vit. Apol.* I, 2.1].

Last, but not least. The Greeks, then one of the most creative peoples in the world, rated as very low and badly understood the potential (and, moreover, the mechanisms) of their own creative activity. They lent much more significance to instruction in ideas and the transfer of knowledge and skills, which led to a clear predisposition of Greek thinking toward *diffusionistic* explanations. A search for lines of continuity, for sources of dependence and influence (one of which were journeys), was at the centre of their attention, even if it was a question of things which had arisen before their own eyes, within several generations.

The Greeks themselves, as has already been noted, were inclined to ascribe Eastern origins to many spheres of their culture, including to mathematics. The authors of the fifth to fourth centuries unanimously name Egypt as the home of geometry. Thus Herodotus says that the Egyptians invented geometry, moved by the practical requirements of land-surveying and administration [II, 109]. Eudemus of Rhodes, the author of the first history of geometry, also considered that precisely practical demands let to the beginnings of geometry amongst the Egyptians and of arithmetic amongst the Phoenicians [*fr.*133 Wehrli]. According to him, Thales, having been in Egypt, was the first to bring geometry to Greece, but Pythagoras first turned it into a theoretical science. Aristotle, on the other hand, asserted that theoretical mathematics also arose in Egypt, amongst the priests, who had enough time culturales en tan poco tiempo? Si los investigadores, que tienen la información de docenas de disciplinas científicas a su servicio, aún están tratando de reducir este problema a un bosquejo genealógico simple, entonces, ¿qué podemos decir de los griegos, entre los que la historia descriptiva había aparecido sólo recientemente? Tal vía de pensamiento fue para ellos prácticamente la única posible. Las razones reales y extremadamente complejas de esta innovación fueron silenciosamente sustituidas por una narración acerca del descubrimiento de la cultura de los héroes. Los griegos llamaban a los números con sus propios nombres, pero por ningún motivo evadían la oportunidad de mencionarlos en egipcio o fenicio.

Esta tendencia aparece más claramente en el periodo helénico, mas aún, que en el periodo del sincretismo religioso y cultural, realmente se sentaron las bases de tal forma de pensamiento. Más tarde, la lógica del género narrativo estaba ya en vigor: entonces quienes realmente viajaban a Egipto (Demócrito) eran enviados también a la India [D. L. IX. 35], y aquellos que no habían viajado a ningún lado (Anaxágoras y Empédocles) eran de todas formas dotados con algunos viajes [Plinio *Hist. Nat.* 30, 9; Philostr. *Vit. Apol.* 1, 2 1].

Por último, pero no menos importante. Los griegos fueron de las personas más creativas en el mundo, subestimaron y consideraron como inferior su capacidad en las actividades creativas (y, más aun, el mecanismo). Ellos prestaban mucha más importancia a la enseñanza de las ideas y la transferencia de conocimiento y habilidades, lo que condujo a una clara predisposición del pensamiento griego para explicaciones *difusionistas*. La búsqueda de las fuentes de dependencia e influencia (uno de los cuales fueron los viajes), era parte central de su interés, aun si era una cuestión de cosas que habían surgido ante sus propios ojos, o a través de varias generaciones.

Los griegos, como se ha notado ya, estaban inclinados a atribuir a los orientales los orígenes de muchas disciplinas que forman su cultura, incluyendo a las matemáticas. Unánimemente los autores del siglo quinto al cuarto, nombraron a Egipto como el hogar de la geometría. Herodoto [II. 109] dijo que los egipcios inventaron la geometría movidos por las necesidades prácticas de agrimensura y administración. Eudemo de Rodas, el autor de la primera historia de la geometría, también consideró que precisamente las demandas prácticas condujeron a los principios de la geometría entre los egipcios y de la aritmética entre los fenicios [*fr.* 133 Wehrli]. De acuerdo con él, Tales, habiendo estado en Egipto, fue el primero en traer la geometría a Grecia, pero Pitágoras fue el primero que la convirtió en una ciencia teórica. Aristóteles [*Met.* 981b23], por otro lado, asegura que las matemáticas teóricas también surgieron en Egipto, entre los sacerdotes, que tenían suficiente to study problems which were not linked with the requirements of life [*Met.* 981b23]. Especially interesting is a fragment of Democritus [*fr.* 14 Luria] in which he contends that no-one excelled him in the construction of lines with proof, even the Egyptian *harpedonaptai* ("drawers of lines", *i.e.* surveyors of land). Egyptian geometry was apparently sufficiently prestigious if a gifted mathematician like Democritus saw it as a victory to surpass Egyptian surveyors.

It is perfectly natural that even in the nineteenth century the home of nearly all Greek mathematical achievements before Euclid was still considered to be Egypt, a country whose cultural legacy attracted ever-burgeoning interest. The German school of the history of mathematics mainly followed these principles, which were decisively formulated in Cantor's capital work: the Egyptians knew nearly all the theorems traditionally ascribed to Thales and Pythagoras; the distinction between Egyptian and Greek mathematics lies only in the method —inductive in the former and deductive in the latter [Cantor 1880, 109, 112 *ff.* 140]. The publishing in the 1870s of the Rhind mathematical papyrus, which demonstrated the very primitive character of Egyptian geometry, and criticism of the excessive infatuation for the Orient from such an authority as Zeller led to a much more restrained appraisal of the Egyptians' successed and the degree of their influence on the Greeks. As Luria [1933, 54-70] aptly phrase it,

> All researches agreed on the main points: 1) that the very fact of influence on early Greek geometry must be recognized as indisputable; 2) that this was not a vital importance, because, even if the Greeks borrowed some numerical data from the Egyptians, then the logically-clear consistent system of demonstrations was independent of this and thanks to Greek genius.

This problem acquires a new ring in the 1930s, in connection with the deciphering of the Babylonians' mathematical texts. The level of Babylonian mathematics turned out to be much higher than that Egyptian mathematics, and a number of its problems resembled ones in Greek mathematics. This inclined many scholars to the belief that this was precisely where they should look for the roots of Greek science. This particularly concerns so-called *geometric algebra*, expounded in Euclid's Book II, in which many people have seen a geometrical reformulation of the Babylonian methods for solving quadratic equations in numerical form.

Returning to ancient testimonies, we note that one of the main lessons which Egyptology and Assyriology have taught us is the following:

tiempo para estudiar problemas que no estaban ligados sólo a los requerimientos de la vida cotidiana. Especialmente, es interesante un fragmento de Demócrito [fr. 14 Luria] en el que dice que nadie lo supera en las pruebas con construcción de líneas, aún los egipcios *harpedonaptai* ("dibujantes de líneas"), es decir, agrimensores. La geometría egipcia era, en apariencia, lo suficientemente prestigiada como para que un matemático sobresaliente como Demócrito la viera como una victoria que sobrepasa a los agrimensores egipcios.

Es natural que aún en el siglo diecinueve el origen de casi todos los logros matemáticos griegos, anteriores a Euclides, siguieran siendo considerados egipcios, un país cuyo legado cultural atrajo constantemente a buscar en él dichos orígenes. La escuela alemana de la historia de las matemáticas siguió estos principios, los cuales fueron formulados en el trabajo de Moritz Cantor [1880, 109, 112 ff, 140]: los egipcios conocían casi todos los teoremas tradicionalmente atribuidos a Tales y Pitágoras. La distinción entre matemáticos egipcios y griegos recae sólo en los métodos empleados —inductivo en el primero y deductivo en el segundo. La publicación del papiro matemático de Rhind alrededor de 1870, demostró el carácter primitivo de la geometría egipcia, y la crítica del excesivo envanecimiento de las aportaciones de oriente, por una autoridad como Zeller, condujo a una apreciación más modesta de los éxitos egipcios y del grado de influencia en los griegos. Como Luria [1933, 54-70] adecuadamente lo parafrasea:

> todos los investigadores están de acuerdo en los puntos principales: 1) que el hecho de que hubo influencias en la geometría antigua griega debe ser reconocido como algo indiscutible, 2) esto no fue de vital importancia porque aún reconociendo que los griegos se apropiaron de algunos datos numéricos de los egipcios, lo importante es que el sistema lógico y consistente para desarrollar demostraciones fue independiente de esto y se debe al genio griego.

Este problema adquiere una nueva forma alrededor de 1930, motivado con el desciframiento de los textos matemáticos babilonios. El nivel de las matemáticas babilonias resultó ser más alto que el de las matemáticas egipcias, y un gran número de sus problemas se parecen a algunos de las matemáticas griegas. Esto inclinó a muchos estudiosos a creer que aquí era precisamente donde ellos tenían que buscar las raíces de las ciencias griegas. Esta preocupación, particularmente llamada *álgebra geométrica*, es expuesta en el libro II de Euclides, en el que mucha gente ha visto la reformulación geométrica de los métodos babilónicos para resolver ecuaciones de segundo grado en forma numérica.

Regresando a testimonios antiguos, notamos que una de las principales lecciones que la egiptología y la asiriología que nos han enseñado es la siguiente:

the Greeks' assertions about oriental mathematics and astronomy can be believed only if they are supported by information from the oriental texts themselves. From these it may be drawn that the thesis about the *direct continuity* of Greek mathematics from oriental computations should finally be abandoned. One can argue only about to what degree various information which by one route or another came from the Orient was used and about its role in the formation of early Greek science. Individual pieces of information were indeed used in this science, but the scale of these borrowings should not in any way be exaggerated, and their influence on the development of mathematical investigations proper is hardly discernible at all.

In pointing out the practical character of Egyptian geometry, Herodotus and Eudemus were undoubtedly closer to the truth than Aristotle. Contrary to his opinion, geometry by no means developed here amongst the priests and was never their prerogative. In addition, Aristotle is not right according to the facts either: after over a century's study of Egyptian mathematics, there are no grounds to assume the existence in it of anything similar to theory or proof. The Greeks could not have borrowed scientific ideas in Egypt which did not exist there, and their high regard for Egyptian geometry merely demonstrates that they were acquainted with it only by hearsay. Nearly all reliable information about Egyptian borrowings is related to practical mathematics, and what is more to arithmetic, and not to geometry.[1] It is evident that these arithmetical methods were, as a rule, highly primitive, adopted and used by no means by scholars, but by merchants or navigators, who were much more closely linked with the Orient than were Greek thinkers. Although there are extremely few examples of similar borrowings, this side of cultural contacts presents more-fertile ground for their search than scholars' journeys to the East. Even in those cases when they are reliably known, the possibility of direct *scientific contacts* seems highly unlikely.

The language-barrier was practically the main obstacle here

1 In the late scholia on Plato's *Charmides* [165e], probably going back to Geminus, Egyptian methods of multiplication and division are mentioned, along with operations with fractions (*cf.* [Heath 1921, 14, 4, 7, 52 *ff.*]). Tannery, drawing on this text, noted that the Greek methods were more perfected [Tannery 1887, 46 *f.*]. Inasmuch as our knowledge is based chiefly on papyri of the Hellenistic and Roman times or on the works of Heron and Diophantus, a question-mark still hangs over when exactly the Egyptian methods penetrated into Greece (*cf.* [Høyrup 1990]). The earliest case known to me of the presentation of fractions 'in Egyptian manner' is noted in a Greek papyrus from Egypt date the beginning of the third century BC (*cf.* [Fowler 1987]).

tiempo para estudiar problemas que no estaban ligados sólo a los requerimientos de la vida cotidiana. Especialmente, es interesante un fragmento de Demócrito [*fr.* 14 Luria] en el que dice que nadie lo supera en las pruebas con construcción de líneas, aún los egipcios *harpedonaptai* ("dibujantes de líneas"), es decir, agrimensores. La geometría egipcia era, en apariencia, lo suficientemente prestigiada como para que un matemático sobresaliente como Demócrito la viera como una victoria que sobrepasa a los agrimensores egipcios.

Es natural que aún en el siglo diecinueve el origen de casi todos los logros matemáticos griegos, anteriores a Euclides, siguieran siendo considerados egipcios, un país cuyo legado cultural atraje constantemente a buscar en él dichos orígenes. La escuela alemana de la historia de las matemáticas siguió estos principios, los cuales fueron formulados en el trabajo de Moritz Cantor [1880, 109, 112 *f*, 140]: los egipcios conocían casi todos los teoremas tradicionalmente atribuidos a Tales y Pitágoras. La distinción entre matemáticos egipcios y griegos recae sólo en los métodos empleados —inductivo en el primero y deductivo en el segundo. La publicación del papiro matemático de Rhind alrededor de 1870, demostró el carácter primitivo de la geometría egipcia, y la crítica del excesivo envanecimiento de las aportaciones de oriente, por una autoridad como Zeller, condujo a una apreciación más modesta de los éxitos egipcios y del grado de influencia en los griegos. Como Luria [1933, 54-70] adecuadamente lo parafrasea:

> todos los investigadores están de acuerdo en los puntos principales: 1) que el hecho de que hubo influencia en la geometría antigua griega debe ser reconocido como algo indiscutible. 2) esto no fue de vital importancia porque aún reconociendo que los griegos se apropiaron de algunos datos numéricos de los egipcios, lo importante es que el sistema lógico y consistente para desarrollar demostraciones fue independiente de esto y, se debe al genio griego.

Este problema adquiere una nueva forma alrededor de 1930, motivado con el desciframiento de los textos matemáticos babilonios. El nivel de las matemáticas babilonias resultó ser más alto que el de las matemáticas egipcias, y un gran número de sus problemas se parecen a algunos de las matemáticas griegas. Esto inclinó a muchos estudiosos a creer que aquí era precisamente donde ellos tenían que buscar las raíces de las ciencias griegas. Esta preocupación, particularmente llamada *álgebra geométrica*, es expuesta en el libro II de Euclides, en el que mucha gente ha visto la reformulación geométrica de los métodos babilónicos para resolver ecuaciones de segundo grado en forma numérica.

Regresando a testimonios antiguos, notamos que una de las principales lecciones que la egiptología y la asiriología que nos han enseñado es la siguiente:

the Greeks' assertions about oriental mathematics and astronomy can be believed only if they are supported by information from the oriental texts themselves. From these it may be drawn that the thesis about the *direct continuity* of Greek mathematics from oriental computations should finally be abandoned. One can argue only about to what degree various information which by one route or another came from the Orient was used and about its role in the formation of early Greek science. Individual pieces of information were indeed used in this science, but the scale of these borrowings should not in any way be exaggerated, and their influence on the development of mathematical investigations proper is hardly discernible at all.

In pointing out the practical character of Egyptian geometry, Herodotus and Eudemus were undoubtedly closer to the truth than Aristotle. Contrary to his opinion, geometry by no means developed here amongst the priests and was never their prerogative. In addition, Aristotle is not right according to the facts either: after over a century's study of Egyptian mathematics, there are no grounds to assume the existence in it of anything similar to theory or proof. The Greeks could not have borrowed scientific ideas in Egypt which did not exist there, and their high regard for Egyptian geometry merely demonstrates that they were acquainted with it only by hearsay. Nearly all reliable information about Egyptian borrowings is related to practical mathematics, and what is more to arithmetic, and not to geometry.[1] It is evident that these arithmetical methods were, as a rule, highly primitive, adopted and used by no means by scholars, but by merchants or navigators, who were much more closely linked with the Orient than were Greek thinkers. Although there are extremely few examples of similar borrowings, this side of cultural contacts presents more fertile ground for their search than scholars' journeys to the East. Even in those cases when they are reliably known, the possibility of direct *scientific contacts* seems highly unlikely.

The language-barrier was practically the main obstacle here:

1. In the late scholia on Plato's *Charmides* [165e], probably going back to Geminus, Egyptian methods of multiplication and division are mentioned along with operations with fractions (*cf.* [Heath 1921, 14, 41 f., 52 f.]). Tannery, drawing on this text noted that the Greek methods were more perfected [Tannery 1887, 48 f.]. Inasmuch as our knowledge is based chiefly on papyri of the Hellenistic and Roman times or on the works of Hero and Diophantus, a question-mark still hangs over when exactly the Egyptian methods penetrated into Greece (*cf.* [Høyrup 1990]). The earliest case known to me of the presentation of fractions 'à l'égyptienne' is noted on a Greek papyrus from Egypt dating the beginning of the third century BC (*cf.* [Fowler 1987]).

las afirmaciones griegas acerca de las matemáticas y astronomía orientales pueden ser creídas *sólo* si éstas están apoyadas por información de los propios textos orientales. De esto podemos deducir que la tesis sobre la *continuidad directa* de las matemáticas griegas con los cálculos orientales debería finalmente ser abandonada. Uno sólo podría argumentar hasta qué grado fue usada la información diversa que vino por una ruta u otra de oriente y sobre su papel en la formación de la ciencia antigua griega. En efecto, piezas únicas de información eran usadas en esta ciencia, pero la escala de esta adopción no debería ser en ninguna forma exagerada, y su influencia en el desarrollo de la propia investigación matemática es difícilmente discernible del todo.

Al señalar el carácter práctico de la geometría egipcia, Herodoto y Eudemo estaban indudablemente más cerca de la verdad que Aristóteles. Contrariamente a su opinión, la geometría de ninguna manera se desarrolló entre los sacerdotes y nunca fue de ellos su prerrogativa. Además, Aristóteles tampoco está en lo correcto de acuerdo con los hechos; después de más de un siglo de estudio de las matemáticas egipcias, no hay bases para asumir la existencia en ellas de algo similar a una matemática teórica o donde existiera la teoría de la demostración. Los griegos no pudieron haberse apropiado de ideas científicas de Egipto que ni siquiera existieron ahí; su alta estima por la geometría egipcia demuestra que ellos estaban familiarizados con ésta solamente de oídas. Casi toda la información confiable acerca de las aportaciones egipcias está relacionada con las matemáticas prácticas, tendientes más a la aritmética, que a la geometría.[1] Es evidente que estos métodos aritméticos eran por regla muy primitivos, de ninguna manera adoptados y usados por los estudiosos, pero sí por mercaderes o navegantes que estaban más vinculados con el oriente, de lo que estaban los pensadores griegos. Aunque hay pocos ejemplos de apropiación similares, este lado de los contactos culturales presentan más bases fértiles para su investigación que los viajes de estudiosos al este. Aún en los casos donde hay conocimiento confiable, la posibilidad de *contactos científicos* directos parece ser improbable.

La barrera del lenguaje fue el principal obstáculo para tener un

1 En el último escolio del Charmides de Platón [165e] probablemente regresando a Geminus, los métodos egipcios de multiplicación y división son mencionados junto con las operaciones con fracciones (*cf.* [Heath 1921, 14, 41, 52]). Tannery, basado en este texto, notó que los métodos griegos eran más perfectos [Tannery 1887, 48]. Mucho de nuestro conocimiento está basado principalmente en los papiros de la época helénica y romana o en los trabajos de Herón y Diofanto. Una pregunta sigue en el aire acerca de cuándo exactamente los métodos egipcios penetraron en Grecia [*cf.* [Høyrup 1990]]. El caso más antiguo, conocido para mí, de la presentación de fracciones "à l'égyptienne" es notado en un papiro griego de Egipto, fechado a principios del siglo tercero a.C. (*cf.* [Fowler 1987]).

to gain an undestanding of Babylonian or Egyptian mathematics, it was necessary to study a foreing language and a highly-complicated script. In the Orient, scribes involved in calculations were educated for many years, could a Greek learn what was necessary in the time of a short trip? We well knew the Greeks' stubborn reluctance to learn foreing languages and get to the heart of alien theories [Momigliano 1972, 7 f.] and [Werner 1993, 1-20].[2] This clearly manifested itself in the era of Hellenism also, when the Greeks' contacts with the Orient became much more intensive than they had been earlier, anyone who wished to be intelligible to the Greek public had to write in Greek. A person to whom it was necessary for his professional activity could learn a foreing language: a doctor or a mercenary serving in the court of an Eastern king, for example, or a merchant who was often in oriental countries, or a Greek settler living in Egypt.[3] But even in later times we do not know of *one single* Greek author who knew the Egyptian language and alphabet, even amongst those who indeed were in this country and left works about it. With the best will in the world, we cannot detect anything Egyptian in the thirteen books of Euclid, and he lived the greater part of his life in Alexandria. The same is true with regard to other mathematicians of the third century —Archimedes, Eratosthenes, Apollonius of Perga—, each of whom in principle could have familiarized themselves with oriental mathematics.

There is no information about any Greek scholar knowing the Akkadian language. Schmitt, having analysed all the mentions of Ἀσσύρια / Περσικὰ / Χαλδαϊκὰ γράμματα, comes to the conclusion that, although the Greeks knew of the existence of cuneiform characters, they made no distinction between their forms (Babylonian, Ancient Persian, Aramaic), perceiving them simply as some *oriental script* [Schmitt, 21-35]. Clear traces of the adoption of Babylonian astronomical data and computational methods are visible only from the middle of the second century BC, after the appearence of the works of some Babylonian astronomers which were written in *Greek*. The figure of the Greek scholar studing Egyptian hieroglyphs

2 Werner quotes Galenus, noting that in ancient times there were such remarkable people who spoke two languages (with this he had legendary Scythic king Anacharsis in mind)! The first translation into Greek known to us, the periple of the Carthaginian Hanno, was done only in the fourth century BC, but we do not know whether the translator was a Greek.

3 Incidentally, Greek soldiers in Egypt used local inhabitants as translators [Hdt. II, 154]. Xenofontes mentions non-Greek slave-translators in *Anabasis* (IV, 8.4; I, 47) [Werner, *op.cit.*, 12 f].

entendamiento de las matemáticas babilónicas o egipcias, era necesario estudiar la lengua foránea y una escritura altamente complicada. En el oriente, los escribanos involucrados en los cálculos eran educados durante muchos años. ¿podría un griego aprender lo necesario durante un viaje corto? Conocemos bien la obstinación y renuencia de los griegos para aprender lenguas foráneas y llegar a conocer el corazón de las teorías del extranjero [Momigliano 1972, 7] y [Werner 1992, 1-20].[2] Esto también se manifiesta claramente en la época del helenismo, cuando los contactos de los griegos con el oriente se hicieron más intensos de lo que habían sido antes: cualquier persona que quería ser entendida por el público griego tenía que escribir en griego. Una persona podía aprender una lengua foránea si le era necesario por su actividad profesional; por ejemplo, un doctor o un mercenario sirviendo en la corte de un rey del este, un mercader que estaba con frecuencia en los países orientales, o un griego establecido en Egipto.[3] Pero aún en tiempos posteriores nosotros no sabemos de *un sólo* autor griego que conociera la lengua egipcia y el alfabeto, aún entre aquellos que en efecto estaban en ese país y dejaron trabajos sobre esto. Aún con los mejores deseos, no podemos detectar nada egipcio en los trece libros de Euclides, a pesar de que él vivió la mayor parte de su vida en Alejandría. Lo mismo es verdad con respecto a otros matemáticos del siglo tercero —Arquímides, Eratóstenes y Apolonio de Perga—, los que en principio pudieron haber estado familiarizados con las matemáticas orientales.

No hay información acerca de algún estudioso griego conocedor de la lengua arcadiana. Schmitt, habiendo analizado todo lo mencionado de *Ἀσσύρια / Περσικὰ / Χαλδαϊκὰ γράμματα*, llega a la conclusión de que, aunque los griegos conocieran de la existencia de los caracteres cuneiformes, no hacían una distinción entre sus formas (babilónicas, persas antiguas o arameas), percibiéndolos simplemente como ciertos *escritos orientales* [Schmitt, 21-35]. Una clara huella de la adopción de datos astronómicos y métodos de cálculo babilónicos son observados sólo a mediados del siglo segundo a.C., después de la aparición de los trabajos de algunos astrónomos babilónicos que estaban escritos *en griego*. La figura de un sabio griego estudiando jeroglíficos egipcios

2 Werner [1992] cita a Galeno, haciendo notar que en los tiempos antiguos había gente tan sobresaliente que hablaba dos idiomas; con esto él tenía al legendario rey escita Anacharsis en mente. La primera traducción en griego conocida por nosotros es el periplo del cartaginense Hanno, que fue hecha en el siglo quinto a.C., pero no sabemos si el traductor fue griego.

3 Los soldados griegos en Egipto usaban incidentalmente a los habitantes locales como traductores [Hdt. II 154]. Jenofonte menciona en *Anabasis* [IV. 8.4] que no hay esclavos griegos que fueran traductores [*cf.* Werner *Op. Cit.*, 12].

or Akkadian cuneiform characters in the fifth to fourth centuries in the hope of penetrating the secrets of foreign knowledge remains merely the fruit of scientific imagination and has no relation to real contacts between the Orient and the Occident in this era.

It is difficult to dispute the fact of Thales' journey to Egypt,[4] but from what is known about Thales' mathematics, there is no way we can come to a conclusion about his borrowings in this field. Eudemus [*fr.* 134-135 Wehrli] reports about two theorems which Thales studied. Proclus [*In Eucl.*, 157, 250], mentions two others, drawing his information from that same Eudemus, albeit, probably, using intermediary sourcers. Pamphila, the first-century authoress, describes yet another [D. L. I, 24]. This information have more than once been rejected as unreliable, but this is contradicted by the detail and precision of the information of Eudemus, who clearly leant on dependable tradition for support. We can suppose that he found out about Thales' theorems from some early doxographical works, most likely from the book of the sophist Hippias of Elis, whom he himself quoted [*fr.* 133 Wehrli]. Aristophanes' comedies tell of the existence of this tradition before Eudemus: he would not have called Thales a great geometrician [*Nub.* 180, *Av.* 1009] if this reputation had not been firmly established amongst the fifth-century Athenians.

According to Eudemus, Thales proved that the diameter divides a circle in half and that the angle against the diameter is a right angle; he established that the angles at the base of an isosceles triangle are equal; he discovered the equality of the opposite angles of a cross; and, finally, he proved the theorem of the equality of triangles with two common angles and one common side. What can be correlated with Greek mathematics from this? Nothing whatever! Did Thales need to travel to Egypt to satisfy himself that the diameter divides a circle in half? This elementary fact is empirically accessible to any child who cuts a scone or a round cheese into two parts. It is easy to satisfy oneself of the equality of crosswise angles by superposition, as is the case with the equality of the angles in an isosceles triangle. As von Fritz [1945] noted, the theorems ascribed to Thales are

4 Diodorus [I, 38] calls him the author of one of the theories explaining the flooding of the Nile, which Herodotus [II, 20] ascribes to his predecessors. The peripatetic Hieronymus of Rhodes (third century) asserts that Thales measured the height of a pyramid by the length of its shadow [fr. 40 Wehrli].

o caracteres cuneiformes arcadianos entre el siglo quinto y cuarto, con la esperanza de penetrar los secretos del conocimiento foráneo, permanece solamente como el fruto de la imaginación científica y no tiene relación con un contacto real entre el oriente y el occidente en esta época.

Es difícil poner en duda la veracidad de los viajes de Tales a Egipto,[4] pero de lo que se sabe acerca de sus matemáticas tampoco no se puede concluir que haya adoptado algo de allí. Eudemo [*fr.* 134-135 Wehrli] reporta dos teoremas que Tales estudió, Proclo [*en Euclides* 157, 250] menciona otros dos, obteniendo su información de la misma fuente de Eudemo aunque, probablemente, usando fuentes intermedias. Pamfila, una de las autoras del siglo primero, describe otro teorema [D. L. I, 24]. Esta información ha sido rechazada más de una vez como incierta, pero esto es contradictorio por la información detallada y precisa de Eudemo, que claramente se apoya en una tradición confiable. Podemos suponer que encontró los teoremas de Tales en algunos trabajos doxográficos antiguos, probablemente del libro del sofista Hippias de Elis, a quien el mismo cita [*fr.* 133 Wehrli]. Las comedias de Aristófanes hablan de la existencia de esta tradición antes de Eudemo, él no podría haber llamado a Tales un gran geómetra [*Nub.* 180; *Av.* 1009] si esta reputación no hubiera sido firmemente establecida entre los atenienses del siglo quinto.

De acuerdo con Eudemo, Tales probó que el diámetro divide a un círculo en dos y que el ángulo opuesto al diámetro es un ángulo recto. Estableció que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales; descubrió la igualdad de los ángulos opuestos de una cruz; y finalmente, probó el teorema de la igualdad de los triángulos con dos ángulos y un lado común. ¿Qué se puede correlacionar de esto con las matemáticas griegas? ¡Absolutamente nada! ¿Tales necesita viajar a Egipto para asegurarse que el diámetro divide a un círculo a la mitad? Este hecho elemental es empíricamente accesible a cualquier niño que corta una galleta o un queso redondo en dos partes. Es fácil asegurarse de la igualdad de los ángulos transversales por medio de una superposición, como es el caso de la igualdad de los ángulos en un triángulo isósceles. Como von Fritz [1945] notó, los teoremas adscritos a Tales están

4 Diodoro [I. 38] lo llama el autor de uno de los teorías que explican el desbordamiento del Nilo, que Heródoto [II. 20] adscribe a sus predecesores. El peripatético Jerónimo de Rodas (siglo tercero) afirma que Tales medía la altura de una pirámide por el largo de su sombra [*fr.* 40 Wehrli].

> either directly linked with the problem of symmetry or of a sort where the first step of any demonstration is based on the consideration of symmetry and the second, which leads the demonstration to a conclusion, is a simple addition or subtraction.

Thus we see that the Greeks by no means troubled themselves with searching for material for proof, moreover, they started with the demonstration of things which before them no-one had taken it into his head to prove. After all, the Egyptian geometricians also knew in practice the fact that the diameter divides a circle in half, but they did not feel the slightest need of its strict demonstration. The desire to find proof of *obvious* mathematical facts was a truly original and revolutionary idea in Greek geometry [Stenius 1978]. In this, actually, lay the transition from practical and computational mathematics to theoretical science.

Thales' four theorems concerned with angles and triangles can in no way be correlated with Egyptian mathematics for the additional reason that the Egyptians never compared the dimensions of angles or studied the similarity of triangles. There was no conception at all of the angles as a measured quantity in either Egyptian or Babylonian mathematics.[5] Using Gands' definition, the Egyptians' geometry was *linear*, unlike the *angular* geometry of the Greeks, in which angles first became objects of measurement [Gands 1929]. Gands believed that Thales and his school deserved the merit for the introduction of *angular* geometry and fairly saw in this the beginning of mathematical theory.

Apart from the extreme unreliability of information about Pythagoras' voyage to Egypt, the character of his mathematical studies also does not give any grounds to see in them the result of borrowings. I dare say the only thing which could at least to some degree correlate with Egyptian mathematics is Pythagoras' theorem. At any rate, the opinion has been stated more than once that the Egyptians —even if they did not know the theorem itself— at least knew the fact that a triangle with sides 3,4,5, is right angled. The properties of this triangle

5 Vogel K. *Vorgriechische Mathematik*. Hannover 1958-1959. Teil I, 72; Teil II, 23 n. 2, 39 n. 4. The well-known division of the circle into 360 degrees appeared in Babylonian mathematics no earlier than in the third century [Neugebauer 1957, 25]. Also [cf. Szabó and Maula 1982, 189 ff].

> o directamente vinculados con el problema de simetría o son de una clase donde el primer paso de cualquier demostración está basada en la consideración de simetría y el segundo, el cual guía la demostración a una conclusión, es una simple suma o resta.

Por consiguiente, vemos que los griegos, sin la intención de crearse problemas al intentar probar algunos resultados, empezaron con las demostraciones matemáticas antes que otros. Después de todo, los geómetras egipcios también conocieron en la práctica el hecho de que el diámetro divide a un círculo por la mitad, pero ellos no sintieron la más mínima necesidad de su estricta demostración. El deseo de encontrar pruebas de hechos matemáticos *obvios* fue una idea verdaderamente original y revolucionaria en la geometría griega [Stenius 1978]. Esto realmente traza la transición de las matemáticas prácticas y numéricas a una ciencia teórica.

Los cuatro teoremas de Tales concernientes a ángulos y triángulos no pueden ser en ninguna forma correlacionados con las matemáticas egipcias, por la razón de que los egipcios nunca compararon las dimensiones de ángulos y no estudiaron la similitud de los triángulos. No había ninguna concepción del ángulo como una medida cuantitativa en ningún matemático egipcio o babilónico.[5] La definición de Gandz [1929] afirma que la geometría egipcia era *lineal* y no como la geometría *angular* de los griegos, en la que los ángulos primero son objetos de medida. Gandz creyó que Tales y su escuela merecían el mérito de la introducción de la geometría *angular* y vagamente vio en esto el principio de la teoría matemática.

Junto a lo poco confiable de la información de los viajes de Pitágoras a Egipto, el carácter de sus estudios matemáticos no da pie para pensar que sus resultados fueron producto de la adopción. Me atrevo a decir que el único resultado que podría, al menos en algún grado, correlacionarse con las matemáticas egipcias es el teorema de Pitágoras. De cualquier modo, la opinión de que los egipcios —aún si ellos no conocieran el propio teorema— al menos conocieron el hecho de que un triángulo con lados de longitud 3, 4 y 5, es un triángulo rectángulo, ha sido afirmado

5. Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Hannover 1958-1959, Teil I, 32; Teil II, 23 num. 2, 79 num. 4. La bien conocida división del círculo en 360 grados aparece en las matemáticas babilonias no antes del siglo tercero [Neugebauer 1957, 25]. También [cf. Szabo y Maula 1982, 189 ff.].

were known not only in Babylon but also in India and in China, *i.e.* everywhere where there was some sort of developed mathematical culture. Yet in Egypt nothing points to knowledge of this or of any other individual case in Pythagoras' theorem [Heath 1922, 352; Gillings 1972, 238, 247].

With regard to Democritus' reports, we can suppose that at the time of his trip to Egypt he really did try to prove some theorems to the *harpedonaptai*, acting through local interpreters who knew Greek. Does this mean that they, in turn, *proved* theorems to him? The very term *harpedonaptai* (land-surveyors) indicates the peculiarly practical character of their studies, for which the proving of theorems was clearly useless. One can hardly doubt that this attempt to establish direct *scientific contacts* ended in failure for both parties.

If we can cite ancient tradition as well as the facts of real contacts, even highly insignificant ones, in corroboration of the thesis on Egyptian influence, then in the case of Babylon we do not even dispose of this. In Greek literature of the sixth to fourth centuries, *there is not a single reference* to Babylonian mathematics; it is difficult even to say whether they knew about it at all. In the field of elementary mathematics and calculation-techniques of the time, we cannot cite *one single* reliable case of Babylonian influence. Finally, *not one* of the authors of this era mentions any trip by Thales or Pythagoras to Babylon.[6] To talk in this situation of *oriental background* of Greek mathematics, as Neugebauer do it, we need to have weighty arguments at our disposal; at the same time, Neugebauer recognizes that his point of view is only a hypothesis unconfirmed by any documentary evidence. The fairness of this appraisal is clearly visible in the example of *geometric algebra*.

In studying Euclid's Book II, which discusses the so called application of areas, mathematicians discovered back in the eighteenth century that its propositions could be reformulated algebraically, in the form of identities and quadratic equations. As an example, proposition II, 2, can be considered as the identity $(a + b)c = ac + bc$, and the application of areas with a deficiency means the construction on a given line a of the rectangle ax, which, when the square x^2 is removed from it, gives the given square b^2 (in algebraic notation $ax - x^2 = b^2$). Since Zeuten's time, it

6 The first reference to Pythagoras' borrowing from Babylonian mathematics is from Iamblichus [*In Nicom.* p. 118.23 f.], who wrote that the philosopher took his 'musical proportion' from there. Cf. n. 12 and 86. The Babylonians, though, did not even have the notion of proportion [Becker 1957, 126, 164].

más de una vez. Las propiedades de este triángulo fueron conocidas no sólo en Babilonia sino también en la India y China, es decir, en cualquier lado en donde había algún tipo de desarrollo matemático cultural. Aun en Egipto, nada apunta al conocimiento de esto o de algún otro caso individual en el teorema de Pitágoras [Heath 1922, 352; Gillings 1972, 238, 242].

Respecto a los escritos de Demócrito, podemos suponer que en la época de su viaje a Egipto realmente trató de probar algunos teoremas del *harpedonaptai*, a través de intérpretes locales que sabían griego. ¿Esto significa que ellos, a su vez, *probaron* teoremas para él? El verdadero término *harpedonaptai* (estudiosos de la tierra) indica el carácter particularmente práctico de sus estudios, para el cual la prueba de teoremas era claramente inútil. Uno difícilmente duda en que este intento por establecer *contacto científico* directo terminara en fracaso para ambas partes.

Sí podemos citar la tradición antigua, así como los contactos reales, aun aquellos insignificantes en el intento por corroborar la tesis de la influencia egipcia, pero en el caso de Babilonia ni siquiera disponemos de esto. En la literatura griega de los siglos sexto al cuarto, *no hay una sola referencia* a las matemáticas babilónicas. Pero se tiene que tomar en cuenta lo difícil que es saber si hubo o no influencia. En el campo de las matemáticas elementales y de los cálculos técnicos para medir el tiempo, nosotros no podemos citar *un solo* caso confiable de la influencia babilónica. Finalmente, *ningún* autor de esta época menciona algún viaje hecho por Tales o Pitágoras a Babilonia.[6] Para hablar en esta forma del *antecedente oriental* de las matemáticas griegas como lo hace Neugebauer, necesitamos tener argumentos fuertes a nuestra disposición; al mismo tiempo, Neugebauer reconoce que su punto de vista es sólo una hipótesis, sin confirmar por ninguna evidencia documental. La imparcialidad de esta apreciación se ve claramente en el ejemplo del *álgebra geométrica*.

En el estudio del libro II de Euclides se discute la llamada aplicación de áreas, los matemáticos descubrieron en el siglo diecinueve que las proposiciones podían ser reformuladas algebraicamente, en la forma de identidades y ecuaciones de segundo grado. Como un ejemplo, la proposición II, 2 puede ser considerada como la identidad $(a + b)c = ac + bc$ y la aplicación de áreas con una deficiencia significa la construcción de una línea dada a del rectángulo ax, el cual, cuando el cuadrado de x es removido de éste, da el cuadrado dado b^2 (en notación algebraica $ax - x^2 = b^2$). Desde los tiempos de Zeuten, ha sido

6 La primera referencia a Pitágoras procedente de las matemáticas babilonias es de Jámblico [*In Nicom.* 118.23 ff.] quien escribió que él (Pitágoras) tomó su "proporción musical" de ellos, es decir, 12:9 = 8:6. Aunque los babilonios no tenían aún la noción de proporción [Becker 1957, 156-164].

has been customary to call the theorems of Book II and the similar propositions of Book VI *geometric algebra* and to see in this geometrical reformulation of algebraic problems.

The substance of the theory on the application of areas indeed concurs with the fundamental types of quadratic equation, which the Babylonians could already solve in the second millennium BC. The mathematical proximity of the two methods can be explained, however, as being due to genetic affinity and typological similarity. In the first case, it is essential to prove that: 1) the theorems of Book II *were* translated from algebraic to geometrical language, and not that it is *possible* to reformulate them; 2) Pythagoras or some other mathematician of the sixth to fifth centuries really did go to Babylon and was educated in local mathematics; and 3) at this time there really was a possibility of translating the Babylonian methods into the language of geometry.

The proving of each of these points comes up against very serious difficulties. More and more historians of mathematics are inclined to the view that the application of areas was not a reformulation of algebraic methods at all, but arose on Greek soil during the course of solving purely geometrical problems. Babylonian solutions are complicated and require special interest and schooling, so they could, therefore, hardly have spread to Greece, being passed on from hand to hand (as was probably the case with the data allowing Thales to *predict* the date of a solar eclipse). We should not speak in earnest about Greek mathematicians establishing himself in instruction to a Babylonian colleague. Apart from everything else, there is no information that a similar type of mathematics was practised in Babylon in the sixth century: all of the available texts relate to the Old Babylon period. Finally, can we propose that, over two thousand years before Descartes created analytical geometry, someone was alive who could translate Babylonian problems into the language of geometrical theorems?

There is hardly any necessity in the very hypothesis on the adoption of the numerical solution of quadratic equations: in Ancient Chinese mathematics, for example, there are problems very similar to the theorems of Euclid's Book II; but they very probably came about without any outside influence. Meanwhile, the method of the solution of these problems that Pythagoras founds intimately linked with his investigations of even and odd numbers. We can see this because it is true only for odd numbers. We know of a Babylonian tablet with a whole number of such triplets, but it remains unclear whether the Babylonians knew a general method for their una costumbre llamar a los teoremas del libro II y a las proposiciones similares del libro VI *álgebra geométrica*, y a ver en estos una reformulación geométrica de problemas algebraicos.

Lo importante de la teoría sobre la aplicación de áreas se vincula con los tipos fundamentales de la ecuación de segundo grado, los cuales ya podían resolver los babilonios en el segundo milenio a.C. La proximidad matemática de los dos métodos puede ser explicada a través de una afinidad genética así como de una similitud tipológica. En el primer caso, es esencial probar que: 1) los teoremas del libro II *fueron* traducidos del lenguaje algebraico al geométrico, y que no es *posible* reformularlos; 2) Pitágoras o algún otro matemático entre los siglos sexto y quinto, realmente fueron a Babilonia y fueron educados en las matemáticas locales, y 3) en esta época hubo realmente oportunidad de traducir los métodos babilónicos al lenguaje de la geometría.

Demostrar cada uno de esos puntos presenta dificultades serias. Más y más historiadores y matemáticos se inclinan a reconocer que la aplicación de las áreas no fue del todo una reformulación de los métodos algebraicos, sino que se presentó entre los griegos en sus intentos por resolver problemas puramente geométricos. Las soluciones babilónicas son complicadas y requieren de una instrucción e interés especial, así que difícilmente pudieron, por consiguiente, haberse extendido a Grecia pasando de mano en mano (como fue probablemente el caso de los datos dados por Tales para *predecir* la fecha de un eclipse solar). No debemos hablar con certeza del establecimiento de las matemáticas griegas en la instrucción de un colegio babilónico. Aparte de cualquier otra cosa, no hay información de que un tipo similar de matemáticas fuera practicado en Babilonia en el siglo sexto: todos los textos disponibles están relacionados con el periodo babilónico antiguo. Finalmente, ¿podemos proponer que —a más de dos mil años antes de la creación de la geometría analítica de Descartes— pudo haber alguien que tradujera los problemas babilónicos al lenguaje de los teoremas geométricos?

Es difícil pensar que se dio una necesidad de adoptar las soluciones numéricas en las ecuaciones de segundo grado, en las matemáticas antiguas chinas, por ejemplo, hay problemas muy similares a los teoremas del libro II de Euclides, pero muy probablemente surgieron sin ninguna influencia externa. Mientras tanto, el método que Pitágoras encontró está íntimamente ligado con sus investigaciones sobre números pares e impares: podemos verlo porque esto es verdadero sólo para números impares. Conocemos una tabla babilónica con un gran número de aquellas ternas, pero es confuso saber si los babilonios conocían un método general para sus calculation and how to fill the gap between the sixth century and the era of Hammurapi, to which the Babylonian text relate.

The very posing of the problem in such a way evokes objections. Is it reasonable to automatically see evidence of borrowing in the resemblance of individual mathematical principles, rather than the result of independent development? The fundamentals of mathematics have a universal character and are rooted in the human mind's capacity to logically comprehend the objective structure of the world. If mathematicians of different cultures, starting from these universal principles, come to a similar result, *this in itself* cannot be an argument in favour of borrowing. Having discovered two vessels of the same shape, colouring, and design, it is natural to suggest some link between them, for this similarity might not have exite, and it requires some sort of explanation. If we find one and the same formula in Egypt and China for the volume of truncated pyramid with square foundation, then it is not at all essential to suggest that there was a common source here, as there exists *only one true formula* for the given volume, and anyone who wants to find it can in theory do so. Either facts showing that this formula could not have been deduced in a given tradition or a coincidence in particular details which it is difficult to explain by independent development can lead us to the idea of a outside influences.

In recognizing oriental calculations as the first stage in the development of mathematics and Greek deductive geometry as the second, we see between them a logical connection, but should we see historical continuity in this? If we do, then we lose sight of *early Greek* practical geometry, which, although it was not so developed as Babylonian geometry, undoubtedly included many facts which served as material for the first mathematicians' demonstrations. It is characteristic that all Greek mathematical terminology is of native origin (except for the word *pyramid*); moreover, many terms came from practical spheres. This once again casts doubt on the reality of borrowings: as a rule, they leave their mark in a language also.

It is by no means obligatory for theory to appear after a certain stage of the development of empirical mathematics. The lack of theory in all ancient mathematics except the Greek shows that the causes leading to the conception and development of practical or computational mathematics cannot stimulate a desire for deductive demonstration. If the Greeks began with proving things which were usecálculos, así cómo llenar la laguna entre el siglo sexto y la época de Hammurabi, al que los textos babilónicos se refieren.

Proponer el problema de esta forma provoca objeciones. ¿Es razonable ver automáticamente las evidencias de una apropiación de la semejanza de los principios matemáticos individuales, en lugar de que sea el resultado de un desarrollo independiente? Los fundamentos de las matemáticas tienen un carácter universal y están arraigados en la capacidad de la mente humana para comprender lógicamente la estructura de los objetos del mundo. Si matemáticos de diferentes culturas parten de estos principios universales y llegan a un resultado similar, *esto en sí mismo* no puede ser un argumento en favor del plagio. De haber descubierto dos vasijas de la misma forma, coloración y diseño es natural sugerir algún vínculo entre ellas, esta similitud puede no existir, y requiere de algún tipo de explicación. Si encontramos una fórmula en Egipto y la misma en China para el volumen de las pirámides truncadas con una base cuadrada, entonces no es del todo razonable sugerir que tenían una fuente común, como si existiera *sólo una verdadera fórmula* para el volumen dado, y olvidar que cualquiera que pretenda encontrar esto, en teoría puede hacerlo. Cualesquiera de los hechos muestran que esta fórmula no pudo ser deducida de una tradición dada o una coincidencia en detalles particulares, la cual es difícil de explicar mediante un desarrollo independiente que puede llevarnos a la idea de influencias externas.

Si se reconocen los cálculos orientales como el primer paso en el desarrollo de las matemáticas y la geometría deductiva griega como el segundo, entonces, vemos entre ellos una conexión lógica, pero ¿deberíamos ver una continuación histórica en esto? Si lo hacemos así, entonces perdemos la visión de la geometría práctica en la *antigua Grecia*, la cual, sin ser tan desarrollada como la geometría babilónica, indudablemente incluyó varios hechos que sirvieron de material para las primeras demostraciones matemáticas. Es característico que toda la terminología matemática griega es de origen nativo (excepto por la palabra *pirámide*); más aún, muchos términos salieron de sucesos prácticos. Esto, una vez más, siembra dudas sobre la realidad de lo que se pudieron haber apropiado, como una regla, también éstos dejan una marca en el lenguaje.

El desarrollo de la matemática empírica no tiene —necesariamente— que desembocar en una matemática teórica. La falta de esa estructura teórica en todas las matemáticas antiguas, excepto la griega, muestran que las causas que guían a la concepción y desarrollo de las matemáticas prácticas no pueden estimular un deseo para la demostración de-less for practical life and too simple to demonstrate technical virtuosity, it means that the impulses which led to this came from different spheres of public life.

References

BECKER, O. 1957. "Frühgriechische Mathematik und Musiklehre". *Archiv für Musikwissenschaft* 14:156-164.

BEREZKINA, E. 1980. *Matematika drevnego Kitaja*. Moscow.

BURKERT, W. 1992. *The Orientalizing Revolution*. Cambridge (Mass.).

CANTOR, M. 1880. *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*. 4. Aufl. Bd. I. Leipzig.

FRITZ, K. von. 1945. "The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum". *Annals of Mathematics* 46: 242-264.

FOWLER, D. H. and TURNER, E. G. 1983. "Hibeh Papyrus I 27: An Early Example of Greek Arithmetical Notation". *Historia Mathematica* 10: 344-359.

FROIDEFOND, CH. 1971. *Le mirage égyptien dans la littérature grecque d'Homère à Aristote*. Paris.

GANDZ, S. 1929. "The Origin of Angle-Geometry". *Isis* 12: 452-481.

GILLINGS, R.J. 1972. *Mathematics in the Time of Pharaohs*. Cambridge.

HØYRUP, J. 1990. *Sub-scientific Mathematics. Undercurrents and Missing Links in the Mathematical Technology of the Hellenistic and Roman Worlds*. Roskilde University Centre.

——— 1991. *Mathematics and Early State Formation*. Roskilde University Centre.

HEATH, T.L. 1921. *History of Greek Mathematics*. Oxford. Vol. I.

——— 1926. Euclid. *The thirteen Books of the Elements*. Oxford. Vol. I.

KIRK, G. and RAVEN, J. 1960. *The Presocratic Philosophers*. Cambridge.

LURIA, S. 1933. "K voprosu o egipetskich vlijanijach na grečeskuju". *IMI* 1: 54-70.

MAULA, E. and SZABÓ, A. 1982. ENKLIMA. *Untersuchungen zur Frühgeschichte der antiken griechischen Astronomie, Geographie und Sehnentafeln*. Athens.

MOMIGLIANO, A. 1975. *Alien Wisdom. The limits of Hellenization*. Cambridge.

MUELLER, I. 1981. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Cambridge.

NEUGEBAUER, O. 1957. *Exact Sciences in Antiquity*. Dover: New York.

SCHMITT, R. "Assuria grammata und ähnliche: Was wußten die Griechen von Keilschrift und Keilinschriften?". *Zum Umgang mit fremden Sprachen*, 21-35.

SOROKIN, P. 1959. *Social and Cultural Mobility*. London.

STENIUS, E. 1978. "Foundations of Mathematics. Ancient Greek and Modern". *Dialectica* 32: 258.

SZABÓ. 1968. *The beginnings of Greek Mathematics*. Dordrecht.

SZABÓ, A. and MAULA, E. 1982. ENKLIMA. *Untersuchungen zur Frühgeschichte der antiken griechischen Astronomie, Geographie und Sehnentafeln*. Athens.

TANNERY, P. 1887. *Géométrie grecque*. Paris.

UNGURU, S. 1975. "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics". *Arch. Hist. Ex. Sc.* 15: 67-114.

VAIMAN, A.A. 1961. *Šumero-vavilonskaja matematika*. Moscow.

VAN DER WAERDEN, B.L. 1979. *Die Pythagoreer: Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*. Zürich.

ZEUTHEN, H.G. 1886. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Kopenhagen.

ZUR, Werner J. 1992. *Fremdsprachenpolitik in der griechisch-römischen Antike*. C.W. Müller e.a., Hrsg., *Zum Umgang mit fremden Sprachen in der griechisch-römischen Antike*. Stuttgart.

ductiva. Si los griegos empezaron probando cosas que eran inútiles para la vida práctica y muy simples para demostrar la virtuosidad técnica, significa que el impulso que llevó a esto vino de esferas diferentes a las de la vida práctica.

Referencias

BECKER, O. 1957. "Frühgriechische Mathematik und Musiklehre". *Archiv für Musikwissenschaft* 14:156-164.

BEREZKINA, E. 1980. *Matematika drevnego Kitaja*. Moscow.

BURKERT, W. 1992. *The Orientalizing Revolution*. Cambridge (Mass.).

CANTOR, M. 1880. *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*. 4. Aufl. Bd.I. Leipzig.

FRITZ, K. von. 1945. "The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum". *Annals of Mathematics* 46: 242-264.

FOWLER, D. H. y TURNER, E. G. 1983. "Hibeh Papyrus I 27: An Early Example of Greek Arithmetical Notation". *Historia Mathematica* 10: 344-359.

FROIDEFOND, Ch. 1971. *Le mirage égyptien dans la littérature grecque d'Homère à Aristote*. Paris.

GANDZ, S. 1929. "The Origin of Angle-Geometry". *Isis* 12: 452-481.

GILLINGS, R.J. 1972. *Mathematics in the Time of Pharaohs*. Cambridge.

HØYRUP, J. 1990. *Sub-scientific Mathematics: Undercurrents and Missing Links in the Mathematical Technology of the Hellenistic and Roman World*. Roskilde University Centre.

________. 1991. *Mathematics and Early State Formation*. Roskilde University Centre.

HEATH, T.L. 1921. *History of Greek Mathematics*. Oxford. Vol. I.

________. 1922. Euclid. *The Thirteen Books of the Elements*. Oxford. Vol. I.

KIRK, G. y RAVEN J. 1990. *The Presocratic Philosophers*. Cambridge.

LURIA, S. 1933. "K voprosu o egipetskich vlijanijach na grečeskuju". *AINT* 1: 54-70.

MAULA, E. y SZABÓ, A. 1982. ENKAIMA. *Untersuchungen zur Frühgeschichte der antiken griechischen Astronomie, Geographie und Sehnentafeln*. Athens.

MOMIGLIANO, A. 1972. *Alien Wisdom: The Limits of Hellenization*. Cambridge.

MUELLER, I. 1981. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Cambridge.

NEUGEBAUER, O. 1957. *Exact Sciences in Antiquity*. Dover. New York.

SCHMITT, R. "Assyria grammata und ähnliche: Was wussten die Griechen von Keilschrift und Keilinschriften?". *Zum Umgang mit fremden Sprachen*, 21-35.

SOROKIN, P. 1959. *Social and Cultural Mobility*. London.

STENIUS, E. 1978. "Foundations of Mathematics, Ancient Greek and Modern". *Dialectica* 32. 254.

SZABÓ, A. 1968. *The Beginnings of Greek Mathematics*. Dordrecht.

SZABÓ, A. y MAULA, E. 1982. ENKAIMA. *Untersuchungen zur Frühgeschichte der antiken griechischen Astronomie, Geographie und Sehnentafeln*. Athens.

TANNERY, P. 1887. *Géométrie grecque*. Paris.

UNGURU, S. 1975. "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics". *Arch. Hist. Ex. Sc.* 15: 67-114.

VAIMAN, A. A. 1961. *Šumero-vavilonskaja matematika*. Moscow.

VAN DER WAERDEN, B.L. 1979. *Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*. Zürich.

WERNER, Jür. 1992. *Fremdsprachenkenntnis in der griechisch-römischen Antike*. C.W. Müller e.a., Hrsg., *Zum Umgang mit fremden Sprachen in der griechisch-römischen Antike*. Stuttgart.

ZEUTHEN, H.G. 1886. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Kopenhagen.

Leonid Zhmud is a senior scientific researcher at the *Institute for the History of Science and Technology*, St. Petersburg. His publications include three monographs and 21 articles, devoted to ancient Greek science, philosophy and religion. His book on ancient Pythagoreanism will be published next year by Akademie Verlag (Berlin).

Leonid Zhmud es investigador decano del *Instituto de Historia de la Ciencia y la Tecnología de* San Petersburgo. Entre sus publicaciones dedicadas a la ciencia griega se incluyen tres monografías y 21 artículos de investigación relacionados con ciencia griega, filosofía y religión. Su libro basado en el Pitagoreanismo antiguo será publicado el año próximo por la Akademie Verlag de Berlín.