El infinito matemático en Aristóteles y en su tiempo

*Vicenzo Vita**

A. El pensamiento de Aristóteles

1. Es comúnmente aceptada la tesis de que la matemática griega concebía al infinito *sólo* como lo potencial, refutando el aspecto actual por ser contrario a un ideal de armonía, proporción y perfección, conseguida mediante lo limitado y lo finito, que inspiraba al espíritu griego en sus múltiples expresiones.[1]

Esta tesis encuentra su fundamento en el pensamiento de Aristóteles —quien estableciendo inicialmente la distinción indicada, acepta solamente el infinito potencial— y halla su aprobación en la posición asumida por Euclides, el cual siempre consideró figuras geométricas limitadas, susceptibles de ser ampliadas. El hecho de que en el segundo postulado de *Los Elementos* de Euclides se afirme explícitamente la posibilidad de prolongar un segmento, indica que en el transcurso del siglo IV, el periodo de formación de la geometría y en el cual se resaltan y aglutinan sus conceptos fundamentales, también era discutido el problema del infinito y afrontada la legitimidad de su empleo en el campo matemático.

La ausencia total de fuentes matemáticas directas, todas eclipsadas por el tratado posterior de Euclides, impide, desafortunadamente, conocer los términos de esta discusión y reconstruir la evolución de nuestro concepto; para llevar a cabo una aproximación histórica —aunque ésta se mantiene

---

* "L'infinito matematico in Aristotele e nel suo tempo", *Bollettino di storia delle Scienze matematiche*, 1986, 6 (2) 109-132. Versión en español de Mirella Rigo Lemini.

a nivel de conjetura—, podemos referirnos, como se suele hacer en otras cuestiones, a los pasajes de Aristóteles sobre el tema, cuya lectura no sólo permite conocer su pensamiento, sino que además nos deja ver cuál podría ser la concepción y la postura de sus contemporáneos matemáticos.

Es así que nos proponemos releer y comentar las páginas del libro III de la *Física* (caps. 4-8) en las que el estagirita plantea sus ideas sobre el infinito, de las cuales reportaremos los pasajes de contenido físico-matemático y omitiremos, con el fin de no alargar la exposición y porque excede nuestra competencia, aquéllos de contenido filosófico. Para una interpretación lo más verosímil posible del pensamiento aristotélico, presentaremos estos pasajes en el orden que aparecen en las páginas por analizar: esto permitirá revelar de mejor manera luces y sombras, conexiones e incoherencias en la exposición y en el propio pensamiento del autor. Para completar nuestra tarea, y cuando sea necesario, reportaremos también las afirmaciones que Aristóteles plantea en referencia a nuestro problema y que están esparcidas en otras partes de su obra (sobre todo en el libro I *Del Cielo*, donde se consideran algunos aspectos particulares).[7]

2. Aristóteles inicia su tratamiento del infinito después del breve *excursus* histórico que de ordinario antepone a la exposición de su propia teoría, procediendo (cap. 4) al análisis de los ámbitos en los que interviene el concepto de infinito:

> El creer en la existencia del infinito proviene principalmente de cinco consideraciones: del tiempo, que de hecho es infinito, y de la divisibilidad de las magnitudes, porque los matemáticos también emplean el infinito. Por otra parte, sólo si es infinito aquello de lo cual proviene el devenir, se dará la generación y la corrupción. Además, dado que cada cantidad limitada siempre tiene un límite, es necesario que exista un límite particular si todo fin está limitado por algo diferente de sí mismo. Pero sin duda alguna, el motivo más importante, que representa una dificultad sentida por todo el mundo y que no puede eliminarse del pensamiento, es que tanto el número como las magnitudes matemáticas y lo que está más allá del cielo, parecen ser infinitos (203b 15-25).

En esta primera aproximación al problema, Aristóteles menciona dos veces el infinito matemático en relación con dos contextos matemáticos distintos: cuando menciona la *divisibilidad de las magnitudes* y hace una evidente referencia a la infinita divisibilidad del continuo geométrico — hallada y admitida por los matemáticos del siglo V como resultado del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables— y cuando sostiene la imposibilidad de eliminar el infinito del *número* y de las *magnitudes matemáticas*, con lo cual certifica implícitamente que el concepto de conjunto infinito de números naturales y el de infinito extensional —esto es, el relacionado con las figuras geométricas que pueden extenderse al infinito—, habían sido ya adquiridos en el campo matemático.

Sin embargo, estos dos últimos conceptos se aproximan a otro infinito, al infinito físico, a *aquello que está más allá del cielo*, y esta aproximación manifiesta los términos que caracterizan la exposición del estagirita, a saber, la cuestión de la vinculación geométrica con su conceptualización físico-cosmológica.

Lo anterior obedece a la particular concepción de la matemática sostenida por Aristóteles. Siendo el primero en distinguir nítidamente el ámbito de los estudios matemáticos de los de la física, afirma que los *atributos* de los entes matemáticos deben derivarse por abstracción de aquéllos que poseen los cuerpos físicos y que no puede enunciarse una propiedad de los primeros que no corresponda a las características concretas de los segundos. En otros términos, Aristóteles sostiene que las propiedades del espacio geométrico sólo deben investigarse en el espacio físico, el único espacio real desde su punto de vista.

Dice al inicio de la *Física*:

> De estas cosas se ocupa también el matemático, pero no de cada una de ellas como límite de un cuerpo finito, ni examina sus atributos en tanto atributos de tales sustancias; es por esto que él los separa, porque en pensamiento ellos son separables del movimiento y no hace diferencia, ni ningún resultado falso, si ellos son separados (193b 31-35).

En este orden de ideas, Aristóteles asocia el infinito geométrico con el infinito físico y así relaciona el problema de la caracterización del primero con el problema cosmológico de la existencia de un mundo infinito.[3] Para resolver el problema planteado, procede por eliminación y enfatiza que la hipótesis de la existencia de un mundo infinito implica la necesidad de admitir la existencia de un cuerpo material de dimensiones infinitas, lo cual resulta de estricta competencia del físico: "le corresponde al físico indagar si existe una magnitud sensiblemente infinita" (204*a* 1). Así pues, la caracterización del infinito geométrico está ligada a la existencia de un cuerpo material infinitamente extenso. Después de plantear el problema en estos términos, Aristóteles pasa a examinar los distintos significados que puede asumir el término infinito y concluye sus consideraciones preliminares al presentar su particular clasificación: "toda cosa es infinita o por adición (πρόσθεσιν), o por sustracción (ἀφαίρεσιν),[4] o de ambos modos" (204*a* 6-7), clasificación que estará en la base de su discusión sobre el infinito matemático.

3. En primera instancia, Aristóteles enfrenta el problema desde el punto de vista filosófico (cap. 5), mediante una serie de argumentos que tienden a demostrar que el infinito no puede existir en acto, ni como sustancia ni como atributo. (Dada la finalidad de nuestro trabajo, no consideramos esencial comentar estos argumentos y sólo nos detendremos en frases en las que se alude a las cuestiones matemáticas).

En contraste con una concepción que en otro lugar (203*a* 4) atribuye a los pitagóricos, afirma que el infinito no puede existir como cosa en sí:

> Si el infinito no es ni una magnitud ni un número, sino que es en sí mismo una sustancia y no es atributo, será indivisible, porque lo divisible es magnitud y número; pero si ésta es indivisible no es infinito [...]. No obstante, esto no es lo que dicen aquellos que sostienen la existencia del infinito, ni nosotros lo investigamos como tal, sino como lo que no alcanza su fin (204*a* 9-14).

Aunado a la imposibilidad de que el infinito sea asimilable a las magnitudes matemáticas, en el segundo fragmento de este pasaje notamos un primer bosquejo en torno a la presencia de una corriente de pensamiento que en aquel tiempo admitía la existencia del infinito. Para reforzar la afirmación precedente, poco después agrega: "¿Cómo es posible que el infinito sea una cosa en sí, si no lo son ni el número ni las magnitudes, de las que el infinito es una propiedad?" (204*a* 17-19).

Aquí volvemos a observar que él reconoce al infinito como propiedad del número y de las magnitudes, vinculando su existencia con la de un número infinito o de una figura geométrica infinita. Aristóteles prosigue su investigación sobre la naturaleza y las propiedades del infinito, pero sin conducirla a fondo, lamentando que eso podría distraerlo del estudio de las cuestiones físicas, a las que sí quiere permanecer ligado:

> Quizá es una investigación de carácter muy general aquella de saber si existe el infinito en la matemática, en los entes inteligibles y en las cosas que no tienen extensión; en lugar de esto, nosotros, que examinamos las cosas sensibles y sobre ellas conducimos nuestra investigación, nos preguntamos si existe o no entre ellas un cuerpo que sea infinito en la dirección del crecimiento. (204*a* 34)

De este modo establece una nítida diferencia entre el problema matemático y el problema físico, distinción que abandonará poco después para recaer en el estudio del primero a partir de la solución que dará al segundo, siendo fiel a su concepción de los entes matemáticos.

Para demostrar la no existencia de un cuerpo de dimensiones infinitas, Aristóteles recurre a varias argumentaciones, de las que nosotros sólo retomaremos dos. La primera es una definición, la cual es usada para conducir una argumentación de carácter lógico. "llámase cuerpo (σῶμα) a aquello que es limitado por una superficie". (204*b* 5-6)

De acuerdo con su interpretación de la matemática, Aristóteles mezcla en esta definición un concepto físico con uno geométrico (σῶμα) y retoma la definición de superficie dada por Platón, lo cual muestra que en aquel tiempo aún no era aceptado —o al menos no por Aristóteles— el concepto de un sólido extendiéndose al infinito, mientras ya había sido adquirido el concepto de recta ilimitada, como veremos. La segunda afirmación asocia esta definición de cuerpo al concepto de infinito:

> El cuerpo es limitado por todas partes, mientras el infinito se extiende ilimitadamente (ἀπεράντως διεστηκός), así que un cuerpo infinito debe tener una extensión infinita. (204*b* 20-22) [N.T. 4]

Desde nuestro punto de vista, aquí Aristóteles asume implícitamente el infinito como ente inteligible, como concepto abstracto y contrapuesto al cuerpo material; por primera vez vemos que en su pensamiento se refleja una concepción de espacio geométrico infinito aceptada por los matemáticos de su tiempo, conjetura que probaremos mediante otros indicios.

La contradicción que Aristóteles advierte en los términos de la expresión *cuerpo infinito* lo lleva a negar la existencia de un cuerpo material de extensión infinita y, por tanto, a rechazar el concepto mismo de espacio físico infinito. En consecuencia, el espacio geométrico tampoco puede *ser* infinito.

En este pasaje de la *Física*, Aristóteles no va más allá en su argumentación y retoma la discusión en su obra *Del Cielo*, donde concluye decididamente la limitación y la esfericidad del mundo, tras de haber demostrado que de la hipótesis geocéntrica, fundamental en su cosmología, se deriva el que los cuerpos a distancia infinita de la Tierra deberían rotar en torno a ella con velocidad infinita. Sus afirmaciones al respecto son suficientemente explícitas:

> El cuerpo del todo no es infinito (A 7, 276a 17). La forma del todo es esférica. (*Del Cielo*, 285a 31) La longitud del cielo es la distancia entre sus polos. (*Ibid.*, 285b 9-10) [N.T. a]

4. Sin embargo, la conclusión no puede satisfacer ni al propio Aristóteles, quien reconoce que:

> Si se niega en modo absoluto el infinito, derivamos muchas consecuencias absurdas; de hecho se dará un principio y un final al tiempo, las magnitudes no serán divisibles en magnitudes y el número no será infinito. (206a 9-12)

De las consideraciones sobre el espacio físico, pasa a examinar (cap. 6) la cuestión en el campo matemático y a buscar un compromiso entre su solución negativa del problema físico-geométrico y la presencia insoslayable del infinito en los entes matemáticos, presencia que reconoce, otra vez, en el agregado de los números naturales, aunque en las magnitudes geométricas la ve exclusivamente en lo relativo a su infinita divisibilidad.

Al afrontar la cuestión sobre el nuevo punto de vista, Aristóteles alude a su bien establecida distinción entre el ser en acto y el ser en potencia, y a la que hemos enunciado anteriormente entre el infinito por adición y el infinito por sustracción. Examina en primera instancia el problema en el campo geométrico y, en congruencia con lo dicho poco antes, considera la infinita divisibilidad de una magnitud:

> Se ha dicho que una magnitud no es infinita en acto, ella lo es por sustracción, no siendo difícil eliminar las líneas indivisibles; de ello se deriva que el infinito es en potencia.[6] (206a 18-19)

En realidad Aristóteles no ha demostrado precedentemente que una magnitud geométrica no pueda ser infinita en acto; sólo ha deducido, de su definición de cuerpo, la imposibilidad de que exista uno infinito y esto le ha bastado para asegurar que no existe una magnitud infinita en acto. Las afirmaciones subsecuentes de que las magnitudes geométricas pueden ser, en lugar de esto, infinitas por división, derivan de su adhesión a la teoría del continuo, con lo cual admite que cada magnitud geométrica puede ser dividida en dos partes cualesquiera, y que sustrayendo una es posible operar sobre la otra del mismo modo, con un procedimiento que continúa sin alcanzar su fin.

Haciendo propia esta teoría, se opone a la concepción de Demócrito y de los atomistas en general, quienes veían no sólo en la materia, sino también en los mismos entes matemáticos, un átomos (ἄτομος), un indivisible.[7] En el pasaje anterior, Aristóteles no desarrolla su polémica contra el atomismo y se limita a asegurar "que no es difícil eliminar las líneas indivisibles"; conduce esta polémica en una parte del Libro III de *La generación y la corrupción* y en parte del libro VI de la *Física*, donde hace ver las contradicciones que se encuentran al admitir el indivisible geométrico.

Aceptada la infinita divisibilidad de las magnitudes, Aristóteles sólo reconoce en ella la presencia del infinito geométrico. Eufórico por sostener la teoría del continuo, y condicionado por su propia posición físico-cosmológica, desvía su investigación empleando una acepción distinta del término 'infinito', la que dirige hacia el infinitamente pequeño y no hacia el infinitamente grande: esto es, considera el procedimiento dicotómico iterativamente infinito que puede realizarse solve las figuras geométricas, pero no las considera en el sentido de poseer una extensión infinita.

Por otra parte, en la frase analizada, mientras primero sostiene que una magnitud no puede ser infinita en acto, con lo cual intenta, evidentemente, referirse al infinito extensional, posteriormente afirma que las magnitudes pueden ser infinitas en potencia, pero esta vez en referencia al infinito por sustracción. Introducido así el concepto de infinito en geometría, se preocupa por aclarar su significado y da la siguiente definición: "En esto consiste en general el infinito, que de una cosa siempre es posible tomar otra cosa distinta, que aquélla que se toma siempre es limitada y siempre distinta una de la otra". (206a 27-29) la cual es quizá la más clásica definición de infinito potencial aplicada por Aristóteles a la divisibilidad infinita.

5. Aclarado este concepto, Aristóteles se preocupa por especificar un procedimiento infinito, también por adición, pero referido a las magnitudes geométricas; para tal fin, recurre a un procedimiento inverso al dicotómico:

> El infinito por adición es en algún modo lo mismo que aquél por sustracción, generándose en una cantidad finita por adición en modo inverso, como la sustracción se continúa hasta el infinito, del mismo modo se

> comporta la adición en una *cantidad finita*, dado que si se agrega a una parte cualquiera de una magnitud dada una cantidad finita en la misma razón, de modo que no se agote la magnitud, no se logra alcanzar la magnitud finita asignada. (206*b* 3-9)

De este modo, el infinito por adición representa para Aristóteles un procedimiento aditivo sin fin, en el que a una parte cualquiera de una magnitud dada se añade sucesivamente alguna cantidad, la que guarda con la precedente la misma razón que la primera tenía con la magnitud dada. Y Aristóteles insiste dos veces sobre el hecho de que su infinito por adición es definido en una *cantidad finita*, precisamente porque quiere excluir cualquier consideración sobre la infinidad espacial y en su lugar quiere acentuar la atención sobre el procedimiento inverso al dicotómico. En términos modernos, esta definición representa la circunstancia de que la serie infinita

$$\frac{1}{n}A + \frac{1}{n^2}A + \frac{1}{n^3}A + \ldots \qquad (n > 1)$$

tiene como suma la cantidad finita $1/(n-1)\,A \leq A$, siendo A la magnitud asignada. Aristóteles no precisa el valor de n, pero poco después, al referirse de nuevo a esta definición, se limita al caso particular $n = 2$, en el que el procedimiento consiste en añadir cada vez la mitad de la parte restante, es decir, la mitad de la diferencia entre la magnitud asignada A y la suma parcial obtenida en cada paso. Sin duda, el razonamiento de Aristóteles resume la respuesta que los matemáticos de su tiempo habían dado a las paralogias de Zenón; a la de la dicotomía: un cuerpo que debe recorrer un segmento deberá primero recorrer la mitad, después la mitad de la mitad y así sucesivamente, sin poder alcanzar el extremo; o a la de Aquiles y la tortuga: Aquiles el veloz no puede alcanzar a la lenta tortuga que lo precede porque primero debe recorrer el tramo que lo separa de ella, después el tramo que ésta ya habrá recorrido en el intertiempo, y así sucesivamente. En ambos casos se trata de la suma finita de términos infinitos no nulos que se siguen en progresión geométrica con razón inferior a la unidad.

Regresando a la condición que Aristóteles expresa en la definición de infinito por adición: *de modo que no se agote la magnitud entera*, observamos que, con prontitud, ésta se completa con la especificación de que si se aumenta una cantidad constante, se logra agotar la cantidad asignada:

> Pero si nosotros incrementamos la razón de la parte, de modo de tomarla siempre en la misma cantidad, recorreremos toda la magnitud, porque cualquier magnitud finita es agotada por medio de cualquier cantidad determinada aunque sea muy pequeña. (206*b* 9-12)

Aristóteles reconoce que la suma de un número adecuado de partes iguales, aunque sean muy pequeñas, logran agotar cualquier magnitud predeterminada; pero condicionado por su visión finitista del espacio, no dice que dicha suma pueda superar, para un número mayor de términos, la magnitud misma y a la propia *longitud del cielo*; de este modo, no logra ver aquella característica de las magnitudes geométricas, comúnmente conocida como 'postulado de Arquímedes', que confiere al infinito geométrico el carácter potencial.

Después de esta digresión sobre el infinito por adición, Aristóteles regresa a su tema precedente para reafirmar con decisión: "El infinito es en potencia y por sustracción y solamente es esto". (206*b* 12-13) Y poco después aclara que también el infinito por adición, como procedimiento inverso al dicotómico, es potencial y tiene con este último una propiedad en común:

> También el infinito por adición es potencial, del mismo modo que decimos que lo es por sustracción: siempre se podrá tomar cualquier cosa de lo que está fuera de él, que no superará cualquier magnitud finita, así como el infinito por sustracción siempre sobrepasa cada magnitud finita, permaneciendo inferior. (206*b* 16-20)

Con estas palabras, Aristóteles quiere decir sustancialmente (y en términos modernos) que, así como la sucesión decreciente de magnitudes obtenida del proceso dicotómico, infinito por sustracción, tiene por límite la magnitud nula, de igual forma, la sucesión creciente de magnitudes generada por el procedimiento inverso, infinito por adición, tiene como límite la magnitud inicial.

De hecho, la condición relacionada con el primer límite —*el infinito por sustracción sobrepasa cada magnitud finita, permaneciendo inferior*— se interpreta en el sentido de que, dada una magnitud y una parte suya pequeña, la operación de sustracción se termina al obtener una cantidad más pequeña que ella; del mismo modo, la condición relativa al segundo límite —*siempre se podrá tomar fuera de él cualquier cosa, que no superará cualquier magnitud finita*— se interpreta en el sentido de que, dada una magnitud y la suma de un número cualquiera de sus partes en progresión geométrica, se puede aún agregar cualquier otra parte sin que la suma total supere la magnitud asignada.

No obstante la tosquedad y la imprecisión del lenguaje, el razonamiento de Aristóteles parece constituir una primera aproximación al concepto de límite.

6. Luego de estas consideraciones de carácter estrictamente matemático, Aristóteles regresa a su problema cosmológico y a la solución que le había dado, para demostrar que existe pleno acuerdo entre el resultado físico y el matemático:

> De modo que sobrepasar el todo por adición tampoco es posible en potencia, salvo que el infinito sea considerado en acto, como dicen los físicos, quienes consideran como infinitos a los cuerpos que están más allá del cosmos y cuya sustancia es aire o cualquier otra cosa. Pero si no es posible que exista un cuerpo que sea infinito en acto, tampoco podrá existir uno en potencia por adición, habiendo definido el infinito por adición como el inverso del infinito por sustracción. (206b 20-27) [N.T. a]

De acuerdo con la definición aristotélica, el infinito por adición es el inverso del infinito por sustracción: en éste se opera indefinidamente a partir de una magnitud asignada; en aquél se opera también indefinidamente teniendo como límite a la misma magnitud; y dado que ha sido demostrado que la dimensión del universo es finita, se colige que éste no puede ser superado aditivamente tampoco en potencia; o sea, el infinito no puede existir ni siquiera en potencia.

Aristóteles mezcla dos significados o dos conceptos distintos del término infinito: el concepto de infinito extensional, físico o geométrico, que no existe bajo la forma actual ni bajo la forma potencial, y el concepto de infinito operativo, que por su naturaleza es sólo potencial. La inexistencia del infinito extensional, aun bajo la forma potencial, deriva de la forma en que Aristóteles define el infinito operativo por adición, donde sólo considera a las series convergentes y excluye la existencia de series divergentes.

La primera parte de este mismo pasaje también arroja luces sobre la existencia de una corriente de pensamiento con un enfoque más naturalista (οἱ φυσιολόγοι), que en aquel tiempo sostenía –en oposición al estagirita– la existencia de un infinito físico. Aristóteles no agrega más sobre estos físicos, pero en el *excursus* histórico que precede los capítulos analizados, afirma que los pitagóricos aceptaban el concepto de infinito; para ellos el *infinito es aquello que está fuera del cielo* . (203*a* 7)

Después de una digresión sobre el pensamiento de Platón,[3] Aristóteles retoma su discusión sobre el infinito físico, regresando de otra forma a la definición de infinito potencial: "Sucede que el infinito es lo contrario de aquello que se ha dicho que es. Infinito no es lo que no tiene nada fuera de él, sino aquello que fuera de él siempre hay algo". (206*b* 33 - 207*a* 1)

Una vez más hace referencia al hecho de que otros, probablemente los físicos mencionados antes, daban una definición del infinito presentándolo bajo el aspecto actual: *aquello que no hay nada fuera de él*, en contraposición a su definición: *aquello fuera de lo cual siempre existe algo*, en la que se considera el aspecto potencial. Aristóteles insiste sobre esta característica del infinito: "infinito es aquello fuera de lo cual siempre existe algo que se puede pensar como magnitud", (207*a* 7-8) [N.T. *iv*] *mientras que aquello que no tiene nada fuera de él*, Aristóteles lo identifica con lo que es completo y entero y, por tanto, no infinito, pues "nada es completo si no tiene un extremo y el final es un extremo". (207*a* 14)

Aristóteles muestra aquí dos opiniones encontradas sostenidas por dos filósofos presocráticos: Parménides, para quien *el todo está limitado y equidista del centro* . (207*a* 15) y Melisso, que considera que *el todo es infinito*. (207*a* 16) De estas dos opiniones, Aristóteles juzga equivocada la segunda porque, a su entender, confunde el infinito con el todo.

7. Aristóteles pasa a confrontar (cap. 7) el infinito que se encuentra en la serie de los números naturales con aquel tratado y que sólo concierne a las magnitudes geométricas. Después de repetir que: "Del razonamiento se deriva que el infinito por adición parece ser tal que no supera cada magnitud, mientras que aquél por sustracción sí lo hace". (207*a* 34-35) Aristóteles afronta la cuestión del infinito numérico:

> aún más, con base en el razonamiento se tiene que en la serie numérica existe un término más pequeño, mientras que un número suficientemente grande siempre puede superar cualquier pluralidad. (207*b* 1-3)

y lo compara con el infinito geométrico: "hacia lo más chico, en las magnitudes geométricas se puede superar cualquier magnitud, en tanto en la dirección de lo más grande no existe una magnitud infinita". (207*b* 3-5) El comportamiento distinto se debe a que:

> La unidad es indivisible cualquiera que ella sea (como el hombre es un solo hombre y no muchos), en lugar de esto, el número es el agregado de varias unidades y no es una cantidad cualquiera, así que sustrayendo es necesario detenerse (siendo el 2 y el 3 números establecidos y así también para los otros números), mientras hacia lo más grande siempre es pensable cualquier otro número. (207*b* 5-10)

Aristóteles encadena esta infinidad numérica a la infinita divisibilidad de las magnitudes, y así encuentra en ésta la explicación de la primera: "porque son infinitas las dicotomías de una magnitud". (207*b* 10-11)

A nuestro parecer, la génesis de su razonamiento reside precisamente en este encadenamiento. En el proceso dicotómico de una magnitud, él hace corresponder un número a cada operación de división (de sustracción), casi el número de orden de la operación misma, así que, admitida la infinita divisibilidad de las magnitudes, a ésta corresponde una serie numérica que adquiere el mismo carácter de potencialidad infinita encontrado en la primera.

Estas afirmaciones son corroboradas por las que Aristóteles establece inmediatamente después:

> Por lo tanto, el número es infinito en potencia y no en acto y siempre se puede tomar un número que supere cualquier pluralidad determinada. Pero este número de la dicotomía no es específico y la infinidad no permanece, sino que se genera como el tiempo y el número del tiempo. (207*b* 11-15)

Por otra parte, no lleva más adelante su encadenamiento, se limita a exponer una analogía entre el comportamiento de los números naturales y el de las magnitudes geométricas, y luego sostiene:

> Pero para las magnitudes sucede lo contrario; en efecto, el continuo es divisible al infinito, mientras hacia lo más grande no existe el infinito. Entre más grande se admita que sea una cosa en potencia, más grande se debe admitir que sea en acto. Y dado que no existe una magnitud sensible infinita, no se puede admitir que exista una magnitud que supere toda magnitud finita; existiría de hecho cualquier cosa más grande que el cielo. (207*b* 15-20)

Es así que el paralelismo entre los dos agregados es completo, pero se explica en dos direcciones opuestas: el conjunto de los números naturales tiene su extremo inferior en la unidad, aunque no tiene un extremo superior; el conjunto de las magnitudes geométricas tiene un extremo superior en la dimensión del cielo, pero carece de un extremo inferior.

8. Una vez expuesta en estos términos su concepción del espacio, Aristóteles se propone encontrar un punto de unión entre sus conclusiones y la *teoría del matemático*, para enmarcar la investigación dentro de su propia teoría. En esta tentativa, nosotros advertimos implícitamente que matemáticos contemporáneos a él admitían la existencia del infinito no sólo en la forma potencial, sino también en su forma actual, como veremos:

> En nuestro razonamiento, al negar la existencia actual del infinito por crecimiento,[9] por ser inagotable, no se elimina la teoría de los matemáticos. De hecho, por ahora ellos no tienen necesidad del infinito y no lo operan, sino que se sirven sólo de una magnitud finita escogida arbitrariamente y dividen otra magnitud en la misma razón en la que dividen la magnitud máxima. Así que, en sus demostraciones, para ellos no habrá ninguna diferencia, mientras que esta diferencia estará en la magnitud en cuanto tal. (207b 27-34) [N.T. v]

En la reafirmación explícita de que su teoría excluye la existencia del infinito actual, Aristóteles se preocupa de demostrar que en la investigación matemática de su tiempo no se planteaba la necesidad de recurrir a este concepto, pues bastaba con referirse a las magnitudes arbitrariamente grandes, pero siempre finitas.

Aquí Aristóteles cae en contradicciones con lo que ha sostenido precedentemente: al decir que siempre se puede asumir una magnitud escogida arbitrariamente, admite implícitamente que se puede escoger incluso una magnitud mayor que la dimensión del cielo. La contradicción sólo puede salvarse, desde nuestro punto de vista, conjeturando que Aristóteles supone que la magnitud por escoger debe ser en cada caso menor que la magnitud máxima porque, como diría poco después, el pensar un ente no le confiere de por sí existencia y, por tanto, no es lícito asumir una magnitud mayor que dicha magnitud extrema, simplemente por ser inexistente.

Ahora bien, ¿su omisión es una concesión implícita a los matemáticos de su tiempo, quienes admitiendo el infinito excluían la existencia de una magnitud máxima? También el 'ahora', dicho a propósito de una ausencia en el uso del infinito actual por parte de los matemáticos, ¿no pudiera indicar que no rechaza este concepto, sino que en ese momento no lo consideraba adecuadamente explotado, pero sí susceptible de posterior desarrollo aplicable? Una respuesta afirmativa a estas interrogantes lleva necesariamente a pensar que las ideas matemáticas sobre el infinito entonces dominantes, fueron generalmente aceptadas como válidas incluso por el propio Aristóteles.

Recordemos que, al inicio de la discusión (3), Aristóteles declara explícitamente querer conducir la investigación sólo desde el punto de vista físico y excluir como investigación de carácter demasiado general aquélla de saber si existe el infinito en las matemáticas. De hecho enfrenta el problema bajo el aspecto cosmológico, aunque después, estimulado por su propia concepción de los entes matemáticos como abstracciones de los cuerpos físicos, cree poder volcar sus resultados en el campo matemático, cayendo así en ambigüedades y contradicciones.

Observamos incidentalmente que, en la segunda parte del pasaje previamente analizado, Aristóteles alude al concepto de semejanza y a una geometría correspondiente desarrollada por matemáticos contemporáneos a él, geometría que, como se verá muchos siglos después, presupone precisamente el concepto de infinidad espacial.

9. Para concluir, Aristóteles afirma (cap. 8) que del pensar alguna cosa no se deriva su real existencia y, por tanto, es absurdo conferir existencia real a un ente por el sólo hecho de pensarlo:

> Es absurdo creer en el pensamiento: el exceso y el defecto no están en la cosa en sí, sino en el pensamiento. De hecho cada uno de nosotros podemos imaginar que nuestro tamaño ha crecido hasta el infinito como consecuencia de una multiplicación de nosotros mismos repetida muchas veces; pero incluso si afuera de la ciudad viésemos a alguien que tuviera un tamaño semejante, no va a existir sólo porque lo hemos pensado, sino porque realmente existe.[16] (208*a* 14-22) El tiempo y el movimiento son infinitos y la percepción de aquello que permanece no queda; la magnitud, por otra parte, no es infinita ni por disminución ni por acrecentamiento por sólo haberlo pensado (208*a* 14-22) [N.T. vi]

De esta forma, Aristóteles excluye que una magnitud geométrica pueda ser pensada infinita en extensión.

B. La tradición matemática

10. Del análisis del pensamiento de Aristóteles, resultado de la reflexión de los diversos pasajes de la *Física* que hemos comentado precedentemente, se advierte en aquellos tiempos, como ya lo hemos mencionado,

la presencia de estudiosos que se adherían a una conceptualización infinitista del espacio; recordemos por ejemplo a *los físicos*, quienes admitían un espacio físico infinito.

Estos estudiosos evidentemente se basaban en especulaciones precedentes, a las que todavía Aristóteles alude no sólo en el pasaje examinado, cuando retoma el pensamiento de Pitágoras y Melisso, sino también en otras partes, como en el siguiente pasaje de la obra *Del Cielo*, donde habla justamente de una conceptualización infinitista del espacio sostenida por algunos predecesores suyos: "En primer lugar debemos investigar si existe un cuerpo infinito, como creía la mayor parte de los antiguos filósofos". (A 5. 271*b* 1-3)

El pensamiento griego siempre se ha aproximado conscientemente a la conceptualización de un universo infinito y, por tanto, al concepto mismo de infinito actual, aun en el terreno geométrico. Desde Anaximandro, quien introduce por primera vez el término infinito (απειρον) como *principio del ser* y supone que de él se derivan *infinitos mundos*, hasta Anaxímenes, que afirmó que el *aire infinito es el principio de las cosas*; desde Meliso, quien pensó el mundo infinito, hasta Anaxágoras, quien sostiene que no hay en los principios ni el mínimo ni el máximo; desde Demócrito y su teoría atómica, hasta los físicos de los que habla Aristóteles, y desde los pitagóricos, hasta Arquitas y los matemáticos a los que se refiere Aristóteles.

Porque la geometría, la que se venía constituyendo en los siglos V y IV al admitir la hipótesis de que dos rectas que forman con una transversal ángulos correspondientes iguales no tienen puntos en común, además de los límites de la construcción gráfica o de la experiencia sensible, exigía la misma postura y la misma extrapolación lógica que se imponía al problema cosmológico.

A esta concepción se oponía otra corriente de pensamiento que, a partir de la dificultad para explicar la rotación del cielo estrellado sobre la hipótesis infinitista, se orientaba hacia una solución finitista del problema, enriqueciéndola con una interpretación de naturaleza metafísica: Empédocles, que suponía una sucesión indefinida de períodos de génesis y de disgregación; Parménides y Zenón, quienes añadían consideraciones vinculadas con la teoría del conocimiento,[13] y Platón y Aristóteles con sus especulaciones específicamente idealistas. De este modo, en la segunda mitad del siglo IV a. de C., convivieron en Grecia dos concepciones contrapuestas: una infinitista, de tendencia *materialista* y en la que sobresale Demócrito, quien ya en la antigüedad era considerado un clásico: la obra tenía una orientación finitista e *idealista*, encabezada por Platón y Aristóteles.[12] Y es precisamente debido a que nos han llegado las obras de estos dos últimos y no las de Demócrito y otros infinitistas, que se ha venido a crear la idea de que el espíritu griego se caracterizó por lo limitado y lo definido.

A fin de que nuestro trabajo no resulte más extenso, no nos referiremos a los varios testimonios que pudieran corroborar esta tesis; solamente deseamos reportar dos testimonios sobre Demócrito y Arquitas, quienes, sobre todo el segundo, dedicaron mucho tiempo a la investigación matemática. El primero es un fragmento de una obra perdida de Aristóteles titulada *Sobre Demócrito*, reportado por Simplicio en su comentario a *Del Cielo*, del mismo Aristóteles:

> Demócrito sostiene que la materia de lo que es eterno consiste en un número infinito de pequeñas sustancias y supone que éstas están contenidas en otro espacio de dimensiones infinitas.[13] (68 A 37)

En este fragmento encontramos que Demócrito admite una infinidad numérica de átomos como una infinidad actual, así como una infinidad, también actual, del espacio que los contiene. La concepción infinitista de Demócrito, por otra parte, se manifiesta en otros testimonios que no reportamos por falta de espacio.

El testimonio acerca de Arquitas se encuentra en el comentario a la *Física* aristotélica de Simplicio y se aborda en la *Física* de Eudemo, donde se presenta la cuestión del espacio en forma de pregunta:

> ¿Si yo me encontrara en el extremo del espacio, por ejemplo en el cielo de las estrellas fijas, podría tender la mano o un palillo fuera de aquél o no podría hacerlo? Decir que no se puede es absurdo, pero si se admite que se puede tender la mano fuera, aquello que está fuera será cuerpo o espacio (y no existe diferencia, como veremos). Se procederá del mismo modo del extremo alcanzado a otro extremo alcanzado, siempre repitiendo la pregunta. Y así, encontrándose que siempre existe alguna cosa donde puedo alcanzar el palillo, es evidente que esta cosa cualquiera es infinita. Ahora bien, si ésta es cuerpo, la cuestión está demostrada; si es espacio, dado que el espacio es aquello en lo cual está o puede estar un cuerpo, y que cuando se habla de la sustancia eterna se ha de decir sin más que es aquello que es en potencia, aun así se habrá demostrado que espacio y cuerpo son infinitos. (47 A 24)

Podemos ver que el pasaje citado revela que Arquitas reconoce el infinito actual del espacio, con un razonamiento análogo al que caracteriza al infinito potencial geométrico, pero sin la restricción de la magnitud limitada impuesta por Aristóteles; la posición de Arquitas se enmarca en el resto de las concepciones de los pitagóricos que Aristóteles reconoce como infinitistas.

11. El razonamiento de Arquitas se relaciona inmediatamente con Eudoxio, a quien se atribuye comúnmente el llamado postulado de Arquímedes. El nombre[14] de este postulado obedece a que Arquímedes lo enunció explícitamente por primera vez en su Obra *Sobre la esfera y el cilindro*:

> (Supongo) que para las líneas distintas, para las superficies distintas y para los sólidos distintos, una magnitud mayor que otra menor, la menor sumada a sí misma podrá superar cualquier magnitud dada, para aquéllas que son comparables entre sí.[15]

En términos casi análogos, Arquímedes lo enuncia también en el prefacio de la obra *Sobre espirales* y en el prefacio de la *Cuadratura de la parábola*; en esta última precisa que de él se han servido geómetras predecesores suyos para demostrar la proporcionalidad de círculos (esferas) a los cuadrados (cubos) de los respectivos diámetros y que la pirámide (cono) es la tercera parte de un prisma (cilindro), teniendo bases equivalentes y alturas iguales.

Esta última demostración, Arquímedes mismo la atribuye, en el prefacio a *El método de los teoremas mecánicos*, en primer lugar y en forma rigurosa a Eudoxio, por lo que resulta muy probable que el mismo postulado pueda ser atribuido a éste; sin embargo, no puede excluirse que Hipócrates de Quío lo haya usado antes para para demostrar la proporcionalidad de los círculos a los cuadrados de los respectivos diámetros.[16]

Es significativo el hecho de que el postulado en cuestión no se encuentre enunciado como tal en *Los Elementos* de Euclides, sino que figure sólo implícitamente en la cuarta definición del libro *V*: "Se dice que las magnitudes están en razón una de otra, las que al multiplicarse pueden exceder una a la otra".[17]

Enunciado el postulado en estos términos, más que delinear una propiedad del espacio geométrico, delimita el campo de las magnitudes a considerar, excluyendo las que ahora llamamos magnitudes no arquimedianas. Esta definición es empleada por Euclides para demostrar la proposición X.1,[18] la cual resulta esencial en las demostraciones, basadas en el método de exhaución ideado por el mismo Eudoxio, de los teoremas mencionados por Arquímedes, aunque en éstas se emplea de nuevo como propiedad de las magnitudes geométricas consideradas.

Desde nuestro punto de vista, no resulta absurdo suspechar ahora que el alcance de la definición euclidiana, como suposición indirecta de un infinito geométrico potencial, haya sido rehuido por Euclides y el mismo Eudoxio, a quien un escolio le atribuye la paternidad del libro V de *Los Elementos*, y esto explicaría el porqué Aristóteles —como habíamos conjeturado— no lo había considerado.[19]

12. Mientras que la definición de Eudoxio no parece haber contribuido, al menos en el período analizado, a la explicitación del concepto de infinito geométrico potencial, otros elementos nos llevan a conjeturar que el concepto de infinito actual estaba presente en las investigaciones matemáticas de aquel tiempo. En este sentido, para nosotros revisten particular importancia dos proposiciones de *Los Elementos* de Euclides, dado que el autor, quien a lo largo de su obra considera rectas limitadas (segmentos) aunque prolongables si es necesario, recurre al concepto de recta ilimitada, utilizando la expresión (εὐθεῖα ἄπειρος).

Se trata de las proposiciones siguientes:

I,12 *Dada una recta ilimitada y dado un punto exterior a ella, construir una línea recta perpendicular.*

I,22 *Con tres rectas iguales a tres rectas dadas, construir un triángulo, entonces resultará que la suma de dos de dichas rectas, cualesquiera que se tomen, será mayor que la que resta.*

En la primera proposición, nuestra expresión no sólo es empleada en el enunciado, sino también en el curso de la demostración; en la segunda, para efectuar la operación requerida. Euclides considera *una recta DE limitada en D e ilimitada en la parte de E* (ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ). Recién acabamos de mencionar que, a nuestro parecer, la expresión (εὐθεῖα ἄπειρος) es empleada aquí por Euclides en el sentido de una recta considerada globalmente —es decir, como infinita en acto y no en el sentido de una recta infinitamente prolongable, o sea como infinito potencial— pues cada vez que quiere recurrir a este último concepto lo declara explícitamente. En el lenguaje moderno se prefiere poner el acento sobre la infinita prolongabilidad y hablar, aun en este caso, de *recta ilimitada*, como en el pasaje citado. Esto se entenderá mejor con lo que estamos por comentar.

De hecho, la importancia para nosotros de las dos proposiciones anteriores radica en que ellas, o para ser más específicos, la I.12 y la I.23, consecuencia inmediata de la I.22,[20] son atribuidas por Proclo (en sus *Comentarios al primer libro de los Elementos de Euclides*) a Enópides de Quío, matemático y astrónomo del siglo V, coterráneo de Hipócrates y quizá también su maestro.[21]

Al comentar la primera de dichas proposiciones, Proclo, quien influido por Aristóteles hubiera querido evitar el recurso al infinito porque para la ciencia el infinito no es comprensible,[22] observa que Euclides se vale de la hipótesis de la recta infinita porque de otro modo podría suceder que el punto viniera a encontrarse en la dirección de la recta dada o que la perpendicular reducida a él no la encuentre. Pero agrega:

> Si se concede que el punto dado no sea colocado en dirección de la recta y que no esté tan lejano de la recta, de tal forma que ninguna parte de ella venga a encontrarse con el punto, no será necesario el infinito.

Para evitar la situación expuesta y poder realizar la construcción pedida, Euclides no recurre a esta condición restrictiva ni menciona la posibilidad de prolongar la recta dada tanto como sea necesario, condición que lo hubiera puesto en posición de congruencia con todo su tratado, sino que admite la existencia de una recta infinita, adhiriéndose así al concepto de infinidad actual que Enópides debió haber supuesto originalmente.[23]

Es justamente esta admisión tácita la que Proclo critica y busca enmendar. Si para él la expresión (εὐθεῖα ἄπειρος) hubiera tenido el significado de recta infinitamente prolongable, su crítica no hubiera tenido razón de ser; por otro lado, no es posible un malentendido de su parte.

Con mayor razón se pueden desprender las mismas consideraciones a propósito del segundo teorema, donde Euclides toma sobre una semirrecta, infinita sólo de una parte, los tres segmentos con los cuales se procederá a construir el triángulo. Para evitar el recurso al infinito hubiera bastado con asumir un segmento no menor que la suma de los tres segmentos dados. En lugar de esto, la tradición y la autoridad de Enópides han prevalecido sobre la crítica de Aristóteles y sobre la misma concepción de Euclides.

13. Pero quizá resulte oportuno regresar a Aristóteles para ver cómo se expresa, en diferentes pasajes, de aquello que hemos examinado. Hemos visto que Aristóteles (5) atribuye a los *físicos* de su tiempo una definición de infinito relacionado con el aspecto actual: *aquello fuera de lo cual no hay nada*; ésta la contrapone a la suya, donde el infinito se considera como lo potencial: *aquello fuera de lo cual siempre hay algo*. Incluso ocasionalmente, en pasajes que no tienen al infinito matemático como argumento central, pero el tipo de razonamiento planteado lo lleva a recurrir a él —Aristóteles mismo lo retoma con las características propias del infinito actual—, por ejemplo, en un pasaje del libro VIII de la *Física*, donde se refiere a la potencia infinita del primer motor: "Es infinita toda potencia, así como lo es el número y la magnitud que supera cada cantidad finita". (266*b* 19-20) [N.T. *vii*]

Asimismo, en el libro VI de la misma *Física*, donde presenta y resuelve las paradojas de Zenón sobre el movimiento:

> La extensión y el tiempo, en una palabra todo aquello que es continuo, se dicen infinitos en dos modos: o por sustracción o de acuerdo a los extremos; y ciertamente aquello que es infinito de acuerdo a la cantidad, no puede estar en contacto en un tiempo finito, mientras aquello que lo es por sustracción sí lo puede, porque el tiempo mismo es infinito en este modo. (233*a* 24-28)

En esta afirmación, Aristóteles no contrapone al infinito por sustracción el infinito por adición, sino un infinito por *los extremos o según la cantidad* (τοιξ εσχατοιξ o bien χατα ποσον), es decir, un infinito entendido en su globalidad extensional, un infinito actual. Para nuestros fines, resulta más significativa la siguiente definición contenida en el libro I *Del Cielo*: "Se puede definir el tiempo infinito como aquello de lo cual no existe alguno mayor", (283*a* 10) donde se hace explícita la alusión al concepto de la infinidad actual del tiempo.

La terminología empleada por Aristóteles al referirse a la naturaleza de las demostraciones geométricas también deja ver una actitud de aceptación inconsciente del infinito actual. Cuando habla de una recta, la entiende siempre ilimitada y, por tanto, infinita en acto; así, en el libro I *Del Cielo* afirma que:

> no se puede recorrer la línea infinita en un tiempo finito; (272*a* 28-29) es indiferente que la línea finita se mueva paralelamente a aquélla infinita o

la infinita a la finita. (272*a* 33) la línea infinita no puede describir un círculo. (272*b* 28)

Pero el hecho que más nos interesa revelar es la adhesión de Aristóteles a la naciente teoría de las paralelas, la que al definir como tales dos rectas infinitas sin puntos en común, resultaba incompatible con su concepción finitista.[24]

Con todo, el estagirita la acepta y en su crítica sólo considera el que no estuviera todavía constituida en un sistema deductivo; hablando de las peticiones de principio, en *Los Primeros Analíticos* escribe: "Sucede así para aquéllos que piensan trazar rectas paralelas: de hecho, ellos sin percatarse aceptan demostrar premisas que es imposible demostrar, a menos que las rectas no se supongan paralelas". (65*a* 7-8) [N.T. 102]

Su visión finitista del espacio hubiera podido conducir a Aristóteles, o a un contemporáneo particularmente versado en matemáticas, a elaborar una geometría de tipo riemanniano[25] veintitrés siglos antes de su llegada; en lugar de esto, y debido a que entonces prevalecía entre los matemáticos la concepción infinitista, se desarrolló la teoría de las paralelas sistematizada deductivamente en *Los Elementos* de Euclides.

Hemos hecho referencia a estas afirmaciones de Aristóteles no tanto para documentar una incoherencia en su pensamiento, o un contraste interior en sus ideas entre dos visiones contrapuestas del espacio, o entre dos concepciones opuestas del infinito,[26] sino más bien para arrojar luces —otra vez— sobre el reflejo más o menos consciente de aquella conceptualización infinitista del espacio que él condenaba y ahora debiera ser de patrimonio común y con una tradición consolidada.

14. Si Aristóteles ha acusado esta influencia, más grande y decisiva ha sido la que él ejerció sobre los matemáticos de periodos sucesivos. Aclarada la distinción fundamental entre el infinito en potencia y el infinito en acto, debida a su gran mérito, éstos últimos, al no saber afrontar y manejar las paradojas desarrolladas por el infinito actual,[27] se replegaron sobre el concepto del infinito potencial, pero liberándolo en el campo extensional de la limitación de la magnitud máxima impuesta por el estagirita.

De esta forma, el infinito en potencia, que para Aristóteles era solamente operativo, enviste también el estudio del espacio geométrico.

Para evitar alguna eventual objeción y crítica, los matemáticos también consideraron necesario corregir su propia terminología.

Y así Euclides, en *Los Elementos*, caracteriza la línea como limitada: "los extremos de una línea son puntos" (I, Def. 3) y también postula, junto a la existencia del segmento: "que una recta finita se pueda prolongar continuamente en una línea recta" (Postulado II).

Congruentemente con estos principios, define:

> Líneas paralelas son aquéllas que estando en el mismo plano y prolongándose ilimitadamente de una y otra parte, no se encontrarán entre ellas en ninguna de las dos partes. (I, Def. 23)

Y enuncia su famoso quinto postulado en la forma:

> Si una recta viene a caer sobre dos rectas y los ángulos internos de la misma parte son menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas ilimitadamente se encontrarán en la parte en la que los ángulos son menores que dos rectos.

Y es desde este momento que en la matemática griega prevalece el sentido de lo limitado y de lo definido.

Notas

1. Generalmente, esta misma tesis se sostiene con relación a otras manifestaciones del pensamiento griego. *Cfr.*, por ejemplo, P. Zellini, *Breve storia dell'infinito*, Milano, Adelphi, 1985 (2a. ed.). Una tesis opuesta, que ve en el pensamiento griego también la presencia del infinito actual es sostenida por R. Mondolfo en *L'infinito nel pensiero dell'antichità classica*, Firenze, La Nuova Italia, 1956.
2. No consideraré el cap. 10 del libro XI de la *Metafísica*, pues constituye un resumen de los capítulos de la Física por examinar.
3. Como veremos en la segunda parte de la presente nota, en la antigüedad clásica se contraponían dos conceptualizaciones cosmológicas distintas, una sostenía lo ilimitado y la multiplicidad del mundo, que en la geometría daba su aparición mediante el empleo de las rectas paralelas; la otra sostenía, incluso considerando aspectos de naturaleza metafísica, la limitación y unidad del mundo. En ambos casos, el espacio geométrico se confundía con el espacio físico. (*Cfr.*, C. Mugler, *Platon et la recherche mathématique de son époque*, Strasbourg-Zürich, Heitz, 1948, pp. 137-143)
4. El término (διαίρεσις) significa más propiamente "división"; prefiero traducirlo como "sustracción", ya para enfatizar en el hecho de que se trata de la antítesis de (πρόσθεσις), ya porque, como se verá en seguida, cuando Aristóteles recurre al procedimiento dicotómico, sustrae de un segmento dado una de las dos partes en que se divide y opera del mismo modo sobre la parte restante. Por otro lado, para indicar el mismo concepto, Aristóteles también emplea algunas veces el término (ἀφαίρεσις), que propiamente significa "sustracción"; ambos son usados en las siguientes dos tra-

ses (que repetaré más adelante) y son parte de la misma demostración: "el infinito por adición es de alguna manera el mismo que aquel por sustracción (διαίρεσις)" (206b 4), donde más exactamente debía haber traducido "por división", y "el infinito no es otra cosa que esto, en potencia y por sustracción (ἀφαίρεσιν)" (206b 13). El término (ἀφαίρεσις) es empleado por Euclides (V Def. 15), así como en la literatura matemática griega para indicar la propiedad de la descomposición de las proporciones y, por tanto, con el significado de sustracción (*Cfr.* Ch. Mugler, *Dictionnaire de la terminologie géométrique des Grecs*, Paris, Klincksieck, 1959, p. 131).

5. "Figura es el límite del sólido (στερεοῦ πέρας σχῆμα εἶναι)". (*Men.* 76 a) Se tiene que observar que el término empleado por Platón es (στερεός), que indica justamente sólido geométrico, mientras Aristóteles usa (σῶμα), que indica propiamente cuerpo material; asimismo, en la obra de Aristóteles y en la matemática griega, especialmente en la pre-euclideana, no es raro encontrar este último término para indicar sólido geométrico (*Cfr.*, Mugler, *Platon*, cit., p. 57 y *Dictionnaire*, cit., p. 280).
6. Aristóteles habla siempre de "magnitudes" en general, aunque frecuentemente se refiere, como se verá en seguida, a segmentos y a la infinita divisibilidad de un segmento. Evidentemente, mi traducción sigue este criterio.
7. V. Vita, "Democrito e gli indivisibili geometrici," en *Bollettino di Storia delle scienze matematiche* 4 (1984) 3-23.
8. Aristóteles le atribuye la conceptualización de dos infinitos, "por crecimiento y por disminución" con los cuales tender al infinito, pero al mismo tiempo le reprochará el no haberse servido de ellos:

   de hecho, en la numeración no existe el infinito por sustracción, donde la unidad es el número más pequeño y no existirá aquél por crecimiento, habiendo imaginado el número solamente hasta el diez (206b 27-33).

   Sin embargo, no desarrolla su crítica a partir de aspectos de naturaleza geométrica. En contraste con lo que dice en este pasaje, en otro lugar expresa que para Platón "no existe ningún cuerpo fuera del cielo" (203a 8) y que el inicio de una línea es una "línea indivisible" (*Metafísica* A 9, 992a 22), presentándolo así como sostenedor de la limitación del mundo y como opositor de la infinita divisibilidad.
9. Obsérvese que Aristóteles emplea en esta frase el término (αὔξη) ("crecimiento"), y no (πρόσθεσις), el cual ha usado primero para indicar el infinito "por adición". Es posible encontrar un matiz en el significado a partir de la diferencia en la terminología empleada, indicando en el caso del segundo término el procedimiento aditivo, inverso al διαίρεσις, mientras que el primero estaría más propiamente referido al infinito extensional. De hecho, la palabra (αὔξη) es empleada por Aristóteles en 204b 4, cuando se pregunta si existe un cuerpo infinito por crecimiento, y en 206a 28, cuando le atribuye a Platón la concepción de dos infinitos: "uno por crecimiento y otro por disminución".
10. También en este caso Aristóteles emplea el término (αὔξη) para indicar, sin duda, el infinito extensional.
11. Mugler, *Platon*, cit., p. 137. El mismo considera a Anaximandro y a Anaxímenes como seguidores de la conceptualización finitista. En realidad no hay testimonio alguno que autorice esta afirmación en el caso de Anaximandro, pero existe un testimonio de Aecio (13 A 13), quien afirma: "Anaxímenes y Parménides pensaban que el cielo era la circunferencia más externa de la Tierra".

12. E. Frank, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, Halle, Verlag von Max Niemeyer, 1923, p. 63.
13. La traducción de ésta y del fragmento que sigue es de V. E. Alfieri, en *I Presocratici, testimonianze e frammenti*, vol. 2, Bari, Laterza, 1969. Traducción italiana de AA. VV., con algunas variantes de la colección de Diels Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker*. También las citas precedentes sobre los presocráticos son tomadas en este texto.
14. La denominación es debida al matemático O. Stolz, de Innsbruck, quien la propuso en 1883. También a él se deben las consideraciones sucesivas sobre el empleo del postulado de Euclides (*Cfr. Opere di Archimede*, Torino, UTET, 1974, p. 62, prólogo por A. Frajese.).
15. La traducción es de A. Frajese en *Opere di Archimede*, cit., p. 79.
16. Esta tesis es la que se sostiene comúnmente (cfr., por ejemplo, F. Enriques y M. Mazziotti, *Le dottrine di Democrito di Abdera*, Bolonia, Zanichelli, 1948, p. 204). Basado en consideraciones que desarrollaré en breve, pienso que Hipócrates o el mismo Eudoxio lo habían empleado sin haber tomado conciencia de él.
17. La traducción es de L. Maccioni en *Gli Elementi di Euclide*, Torino, UTET, 1970, p. 298. También las citas sucesivas de Euclides son tomadas en este texto.
18. "Dadas dos magnitudes distintas, si de la mayor se sustrae una magnitud mayor que la mitad, de la parte restante una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente quedará una magnitud que será menor que la más pequeña de las magnitudes dadas". En términos científicos, esta proposición es el infinito por sustracción de Aristóteles.
19. T. L. Heath (*Mathematics in Aristotle*, Oxford, Clarendon Press, 1949, p. 110) al comentar el pasaje (207b 27-34), en el que Aristóteles dice que los matemáticos no emplean el infinito, sostiene que él anuncia el "postulado de Arquímedes", pero con esta hipótesis, la contradicción que he formulado no se puede eliminar.
20. A. Frajese, *Il cerchio nella geometria di Enopide de Chio*, en "Archimede", 1976, n. 6, p. 285.
21. P. H. Michel, *De Pythagore à Euclide*, Paris, Les Belles Lettres, 1950, p. 254.
22. Proclo, *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, trad. y pról. de M. Timpanaro Cardini, Pisa, Giardini, 1978, p. 233.
23. La conceptualización del infinito actual se reencuentra en Enópide de Maracchia (S. Maracchia, *La figura "dimenticata" di Enopide di Chio*, "Archimede", 1976, nn. 1-2, p. 76): donde se sostiene que la "fama" se debe "al hecho de que haya sido propiamente él quien consideró explícitamente la infinidad de la recta". Por mi parte, creo que Enópides había empleado este concepto sólo de manera inconsciente, en adhesión a la tradición infinitista.
24. En realidad, los matemáticos anteriores a Euclides no habían definido las rectas paralelas, más aún, si se considera la terminología de Aristóteles, usual en aquel tiempo, parece muy verosímil que tal definición pueda ser la indicada en el texto.
25. T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, The Clarendon Press, vol. 1, 1921, p. 343.
26. Mondolfo, op. cit., p. 456.
27. Una de estas paradojas debe ser la referida a la imposibilidad de establecer una relación entre dos infinitos, misma a la que Aristóteles hace referencia en el libro VIII de la *Física*: "el infinito no tiene ninguna relación con el finito". (252a 11)

Notas del traductor

A continuación presentamos una traducción, del inglés al español, de algunos pasajes de la *Física* de Aristóteles que aparecen en el presente artículo, por considerar que enriquecen su lectura. Las citas fueron tomadas de *The Works of Aristotle*, W. D. Ross (ed.) Great Books of the Western World, tomo 8, vol. I (22a. ed.), Chicago, Encyclopaedia Britannica, 1978.

i. Cuerpo es lo que tiene extensión en todas las direcciones y el infinito es lo que se extiende sin cesar, así el cuerpo infinito debería extenderse en todas las direcciones al infinito. (*Física*, 204b 20-22)

ii. El cuerpo del universo no es infinito (*Del Cielo*, 276a 17). El mundo tiene forma esférica (*Ibid.*, 285a 21).

iii. Con respecto a la adición, no puede existir un infinito que exceda potencialmente cualquier magnitud asignable, al menos que tenga el atributo de ser actualmente infinito, como sostienen los físicos de los cuerpos que están fuera del mundo, cuya naturaleza esencial es aire o algo de la misma especie. Pero si no existe un cuerpo que sea infinito en acto, evidentemente no puede existir un cuerpo que es potencialmente infinito con respecto a la adición, excepto que sea como el inverso del infinito por división. (*Física*, 206b 20-27)

iv. Una cantidad es infinita si es tal que siempre podemos tomar una parte fuera de la que ha sido tomada. (*Ibid.*, 207a 7-8)

v. Nuestra posición no perturba a los matemáticos de su ciencia, al desaprobar la existencia del infinito actual en la dirección del crecimiento, en el sentido de inexplorable. En realidad, ellos no necesitan del infinito y no lo usan. Solamente postulan que la línea recta finita puede ser prolongada tanto como se desee. (*Ibid.*, 207b 27-30)

vi. El tiempo y el movimiento son infinitos y también el pensamiento, en el sentido de que cada parte que se toma pasa en sucesión fuera de la existencia. La magnitud no es infinita ni en el sentido de la reducción ni en el de la magnificación en el pensamiento. (*Ibid.*, 208a 20-22)

vii. Hay dos sentidos de acuerdo con los cuales longitud y tiempo, y generalmente cualquier cosa continua, es llamada "infinita": con respecto a la divisibilidad y con respecto a los extremos. Así, mientras una cosa en un tiempo finito no puede estar en contacto con cosas cuantitativamente infinitas, puede estar en contacto con cosas infinitas con respecto a la divisibilidad: porque en este sentido el tiempo mismo también es infinito, y así nosotros encontramos que el tiempo ocupado en pasar sobre el infinito no es finito, sino un tiempo infinito, y el contacto con los infinitos es hecho por medio de momentos no finitos, sino infinitos en número. (*Ibid.*, 233a 24-32)

viii. Esto les pasa a quienes suponen que están construyendo líneas rectas paralelas: ellos no caen en la cuenta que están asumiendo hechos imposibles de demostrar, a menos que las paralelas existan. (*Primeros Analíticos*, 65a 4-6)