De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones

Wilbur R. Knorr

RESUMEN

La definición de proporción que Euclides propuso en el libro v de sus *Elementos* desconcertó a los investigadores de la Edad Media; pero ha merecido el respeto de investigadores contemporáneos, quienes han reconocido en ella a una precursora del enfoque moderno de los números reales à la Dedekind. Esta concepción antigua de proporción se supone que proviene de Eudoxo (s. IV a.C.), alrededor de medio siglo antes de Euclides. Pero es extraño que Euclides no utilice esta teoría en el Libro XII, cuando demuestra teoremas sobre las medidas de figuras curvas por medio del método de *exhaución* de Eudoxio. Al examinar otros usos de las proporciones, en particular en Arquímedes y Pappo, he encontrado vestigios de una técnica diferente asociada estrechamente a las características de la *exhaución* eudoxiana. Esto me lleva a proponer este método alternativo de proporciones como el que Eudoxio que de hecho introdujo, el cual fue posteriormente revisado en la forma en la que ahora lo encontramos en el Libro v de Euclides.

ABSTRACT

The definition of proportion that Euclid proposes in Book v of the *Elements* baffled scholars in the Middle Ages, but has provoked respect among modern scholars, who recognize in it a precursor of the modern approach to the real numbers, à la Dedekind. This ancient conception of proportion is suppposed to come from Eudoxus (4th century B.C.), about a half century before Euclid. But it is odd that Euclid does not use this theory in Book XII, when he proves theorems on the measures of curved figures via the *exhaustion* method of Eudoxus. Examining other uses of proportions, particularly in Archimedes and Pappus, I have found traces of a different technique closely connected with the features of the Eudoxean *exhaustion*. This leads me to propose this alternative method

of proportions as the one that Eudoxus actually introduced, which was then later revised into the form we now encounter in Euclid's Book V.

Introducción: antecedentes de la teoría euclidiana de la proporción

La opinión tradicional de que la teoría de Eudoxo sobre la proporción es la misma que la que se halla en el libro V de Euclides plantea varias dificultades. En primer lugar, la atribución a Eudoxo está atestiguada en una sola glosa o anotación. Más aún, es poco probable que Euclides simplemente transcribiera, sin cambio alguno, una teoría formulada dos generaciones antes. Pero lo más importante es que, en el libro de Euclides, la teoría de la proporción expuesta en el libro V no se aprovecha en los teoremas del límite (o "método de exhaución") que se explican en el libro XII. Sin embargo, la "teoría de exhaución" es obra de Eudoxo, según señala Arquímedes, una fuente muy fidedigna en esto. Si Eudoxo fue el creador de la teoría del libro V, entonces sin duda la habría empleado en su técnica de los límites.

Trataremos aquí de descifrar este enigma y, a tal efecto, ofreceremos otra versión de la teoría eudoxiana de la proporción. Y esto lo haremos describiéndola como una precursora de la teoría en Euclides. La exposición se centrará, pues, en dos cuestiones:

a) ¿Cuáles son las diferencias que distinguieron la teoría de Eudoxo de su presentación euclidiana?
b) ¿Cómo se desarrolló la forma euclidiana de la teoría a partir de su forma eudoxiana anterior?

Documentación de Arquímedes, Pappo y otras fuentes nos permiten contestar ambas preguntas.

1 La teoría euclidiana de la proporción (*Elementos*, libro V).

El principio básico de la teoría euclidiana es la siguiente definición que de *proporción*, que se da en el libro V:

Def. 5: Se dice que las magnitudes "están en la misma razón"... siempre que los equimúltiplos de la primera y de la tercera sean al mismo tiempo mayores, iguales o menores que los equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente, de acuerdo con cualquier multiplicación.

Es decir, para todos los enteros positivos m, n y para determinadas magnitudes A, B, C, D, entonces $A:B = C:D$ si y sólo si $mA > nB$ como $mC > nD$ y, de manera similar, con $=$ y $<$.

Una contraparte de esta definición afirma la condición para que las magnitudes *no* se encuentren en proporción:

> Def. 7: Se dice que la primera (magnitud) tiene la segunda "mayor razón" que la tercera con la cuarta, siempre que el múltiplo de la primera exceda al de la segunda, pero que el mismo múltiplo de la tercera no sea mayor que el mismo múltiplo de la cuarta.

Esto es, si en *algunos* enteros m, n, sucede que $mA > nB$, pero $mC \leq nD$, entonces $A:B > C:D$.

Como es bien sabido, las definiciones euclidianas son un equivalente de la técnica de Dedekind (a través de "cortes" en los racionales) para investigar la propiedad de los números reales. En efecto, la condición de proporcionalidad en la definición 5 puede reescribirse para afirmar que:

$$\left.\begin{array}{l} A/B > n/m \\ A/B = n/m \\ A/B < n/m \end{array}\right\} \quad \textit{precisamente cuando} \quad \left\{\begin{array}{l} C/D > n/m \\ C/D = n/m \\ C/D < n/m \end{array}\right.$$

es decir, A/B y C/D forman "cortes" idénticos en el conjunto de racionales n/m. De manera análoga, la condición de mayor desigualdad de las razones en la definición 7 equivale a afirmar que:

$$\text{existe } n/m \text{ tal que } A/B > n/m > C/D,$$

o sea que no forman "cortes" idénticos entre los racionales.

Nótese que la virtud compartida por la definición euclidiana y la dedekindiana es que, al determinar si las razones A/B y C/D son iguales, no se necesita hacer una distinción entre racionales e irracionales.

II La técnica euclidiana de los límites (libro XII)

El libro XII de los *Elementos* se ocupa de la medición de las figuras curvilíneas; por ejemplo, que el cono es un tercio del cilindro correspondiente y que las esferas tienen entre sí la razón de los cubos de su diámetro. Estos teoremas requieren un equivalente de una técnica de los límites, por el cual pueden ampliarse de alguna manera las relaciones de los límites para abarcar las figuras curvilíneas por medio de secuencias del primer tipo, las cuales pueden hacerse arbitrariamente cercanas a las del segundo tipo. Casi siempre, para establecer una igualdad que relacione las figuras curvas, se supone una desigualdad y luego se deduce una contracción. Un paradigma del método se advierte en el teorema referente a las razones de círculos:

XII Proposición 2: si A y B son círculos de diámetro a y b, respectivamente, entonces $A:B = a^2:b^2$.

Prueba: [1] Pues de no ser así, sea $A:X = a^2 : b^2$, donde $X \neq B$. Es decir, primero, sea $X < B$. [2]. Después inscriba en B un polígono regular P tal que $X < P < B$.

> Para hacer esto, primero inscriba el cuadrado P_4, que es más de la mitad del círculo, luego forme el octágono P_8 y observe que el octágono agrega al cuadrado más de la mitad de la diferencia entre el círculo y el cuadrado; etc.; la diferencia entre el círculo y el polígono puede hacerse arbitrariamente pequeña por esta bisección sucesiva (para obtener una prueba, consúltese *Elementos* X, 1). Después tome como polígono otro para el cual $B - P < B - X$; es decir, $X < P$.

[3] Ahora inscriba en A el polígono Q semejante a P. Después, $a^2 : b^2 = Q : P = A : X$. [4] Puesto que $A > Q$, $X > P$. Pero esto es imposible puesto que tomamos $P > X$. *Así pues*, X no puede ser menor que B. De manera análoga, es posible demostrar que X no puede ser mayor que B. Por tanto, $X = B$.

Resumen: Este teorema ejemplifica cuatro elementos básicos representativos de todos los argumentos de proceso de límites en el método de "exhaución" eudoxiana:

a) razonamiento indirecto;

b) una hipótesis de proporción desigual que supone la existencia de la cuarta proporcional de tres magnitudes determinadas, como en el paso [1]

c) construcción de una magnitud intermedia a través del procedimiento de bisección de *Elementos* X, 1, como en el paso [2]

d) manipulación de las desigualdades de las razones para deducir la contradicción, como en el paso [4].

III Prueba de Pappo sobre la proporcionalidad de arcos y sectores

Pappo de Alejandría (principios del siglo IV d. de C.) prueba totalmente un teorema sobre sectores (esto es, que los sectores de un círculo son proporcionales a sus arcos). En realidad, lo prueba dos veces en términos idénticos: en *Colección*, libro V, proposición 12, y de nuevo en su Comentario sobre el libro VI de Ptolomeo, capítulo 7. La técnica de la prueba es muy distinta a la euclidiana. Para captar el contraste presentaré primero una forma conforme a la teoría euclidiana. Teón de Alejandría (siglo IV d. de C.) formuló un argumento de este tipo y lo introdujo en su edición revisada de los *Elementos* a manera de corolario del libro VI, proposición 33.

> Prueba al estilo euclidiano: si en un círculo C de circunferencia c se toma cualquier sector A subtendido por el arco a, entonces $A:C = a:c$.
>
> Tomemos los múltiplos ma y nc y los equimúltiplos mA y nC. Entonces, si $ma > nc$, también $mA > nC$ (con base en las configuraciones geométricas de los arcos y sectores). De manera análoga, si $ma = nc$, también $mA = nC$; y si $ma < nc$, también $mA < nC$. Así pues, por definición de la proporción, $A:C = a:c$.

Por el contrario, la prueba de Pappo divide el teorema en dos casos: primero cuando el arco es conmensurable con la circunferencia y segundo cuando no lo es:

> Prueba de Pappo: primero, si a es *conmensurable* con c, entonces ambos se dividen en partes de acuerdo con su medida común e; es decir, $a = me$, $c = ne$. Formamos los sectores E correspondientes a cada parte e y luego obtenemos $A = mE$, $C = nE$. Así pues, $a:c = A:C$ (a saber, $m:n$).
>
> Pero si a *no es conmensurable* con c, entonces [1] sea $C:A = c:x$, donde primero $x < a$. [2] Tómese un arco x' tal que $x < x' < a$ y x' es *conmensurable* con c, "de acuerdo con un lema de la geometría esférica". [3] Fórmese el correspondiente sector X', de donde a partir de lo anterior se deduce que $C:X' = c:x'$. [4] Puesto que $c:x' < c:x = C:A$, entonces $C:X' < C:A$, "lo cual es absurdo" (porque entonces el sector $X' > A$, es contrario a la construcción, donde son $x' < a$).
>
> Una vez más, si $x > a$, el razonamiento semejante conduce a una contradicción. (Pappo ofrece el argumento completo.) Así pues, $x = a$, o sea $c:a$.

El caso commensurable asume efectivamente la definición de proporción, como sucede con la teoría euclidiana de los números: esto es, $a:b = c:d$ si a es "el mismo múltiplo, parte de partes" de b, que c es de d (cf. libro VII, definición 20 y libro X, proposición 5-8).

El caso inconmensurable comparte sus características principales con la técnica eudoxiana del límite, según lo he indicado con los esquemas paralelos de numeración: ambos presentan una forma indirecta. En (1) determinan la condición suponiendo la cuarta proporcional. En (2) se sirven de la bisección (como en X, proposición 1 o en el "lema de la geometría esférica") para obtener un término auxiliar (es decir, el polígono o arco intermedio) que satisfaga las desigualdades enunciadas. En (3) introducen un término correspondiente al término auxiliar, tal que se deduce una proporcionalidad (a través de figuras semejantes o mediante el caso commensurable). En (4) obtienen la contradicción manipulando las desigualdades.

El "lema de la geometría esférica" es en realidad una glosa a la *Geometría esférica* de Teodosio, libro III, proposición 9. Se enuncia en los siguientes términos:

> Si se tienen las magnitudes desiguales A y B para $A > B$ y una tercera magnitud C del mismo tipo, encuéntrese una magnitud X tal que $A > X > B$ y X sea commensurable con C.
>
> Construcción: Supongamos que C se biseca continuamente hasta que la parte resultante $(1/p)\ C$ sea menor que $A - B$. Ahora tómese el primer múltiplo k de esta parte que sea mayor que B; es decir, $(k)\ C/p > B$, pero $B > (k-1)\ C/p$. Puesto que $A - B > C/p$, al agregar esto último tenemos $A > (k)\ C/p$, pero también $[(k)(C/p)] > B$. Así pues, la magnitud $(k/p)C$ cumple las condiciones requeridas.

En la glosa esta construcción se da para el caso de las "magnitudes" generales y no específicamente para los arcos circulares, como en el teorema de la *Geometría esférica* al que va unida. Así pues, el lema seguramente nació dentro del contexto de una teoría general, como supone Pappo cuando lo cita en su propio teorema que no guarda relación alguna con la *Geometría esférica* de Teodosio.

A pesar de que tomé mi ejemplo –el teorema sobre el sector del arco– de lo que parecería ser una fuente tardía, –Pappo–, la técnica que utiliza es por lo menos tan vieja como la de Arquímedes, por ser el fundamento de su prueba del principio de equilibrio en su obra *Equilibrios* *planos* I, 6-7. El lema de Pappo también puede demostrarse dentro del contexto de los resultados de Arquímedes. En efecto, constituye un paso esencial del argumento referente a la medición del círculo, pero no se halla en el texto de *Medida del círculo*, de Arquímedes.

Tenemos, pues, una respuesta a nuestra primera pregunta: la teoría alternativa de la proporción se originó cuando Eudoxo se dio cuenta de que la teoría de la proporción limitada a los números y a las magnitudes conmensurables podía ampliarse para abarcar el caso inconmensurable mediante la aplicación del razonamiento que ya estaba usando él en sus proposiciones sobre los límites. Veamos ahora cómo esta teoría eudoxiana de la proporción podía dar origen a la forma conservada en el libro V de Euclides.

IV Transición a la teoría euclidiana de la proporción

A partir del método "eudoxiano" que acabamos de describir, podemos deducir las definiciones euclidianas de "igual razón" y de "mayor razón" (V, definiciones 5 y 7). En el caso de la "mayor razón" procedamos de la siguiente manera:

Si $A:B \neq C:D$, sea $A:B = C:X$ para $X \neq D$. Supóngase primero que $X < D$. Construya después (de acuerdo con el lema de *bisección*) X' tal que $X < X' < D$ y X' es conmensurable con C. Por tanto

$$C:X > C:X' > C:D.$$

Por conmensurabilidad hay enteros positivos m y n tales que $C:X' = m:n$. Al sustituir los iguales nos queda

$$A:B > m:n > C:D$$

es decir, $nA > mB$, mientras que $nC < mD$.

La última es la condición euclidiana según la cual "A tiene con B una razón mayor que C con D" (como en la definición 7). Al negarla se obtiene la condición para la "misma razón", es decir,

$$A:B = C:D, \text{ si } nA >=< mB \text{ precisamente cuando } nC >=< mD$$

(relaciones que se toman en el orden correspondiente).

Uno de los defectos conocidos de la teoría euclidiana en el libro V es que no prueba que "no tener la misma razón" sea equivalente a "tener una mayor o menor razón". Pero, de hecho, algunas veces supone esta afirmación (por ejemplo, en el libro V, proposiciones 9 y 10), por lo cual es preciso pensar que lo entendían tanto él como los geómetras que le precedieron.

De este modo vemos que las formas eudoxiana y euclidiana de la teoría son equivalente desde el punto de vista técnico. En mi opinión, habría sido fácil para un discípulo de Eudoxo, o tal vez de Euclides, encontrar el formato que ahora aparece en el libro V como modificación de la técnica original de Eudoxo.

Esta equivalencia contesta la segunda pregunta referente a la relación específica entre las formas euclidiana y eudoxiana de la teoría. Pero, ¿por qué habría alguien querido modificar de este modo la técnica de Eudoxo?

Un motivo podría haber sido la *simplificación*. En efecto, la forma euclidiana, pese a ser conceptualmente oscura (recuérdese que desconcertó totalmente a los comentaristas medievales), resulta con todo mucho más fácil de aplicar que la técnica eudoxiana en las pruebas de la proporción. Y esto puede palparse al comparar las pruebas típicas del teorema del arco-sector que hemos expuesto en páginas anteriores: uno que se demuestra a la manera euclidiana y otro al estilo eudoxiano.

Un segundo motivo podría haber sido la *completez*. En efecto, la técnia de Eudoxo puede ponerse en práctica aun sin una definición general explícita de la proporción; pero los teoremas fundamentales relativos a la proporción, entre ellos los de las relaciones básicas de desigualdad entre las razones (como en el libro V, proposición 8) no serían demostrables en esta forma, porque la técnica las presupone. Así, cuando uno trata de formular la teoría general, siguiendo los lineamientos de la teoría terminada de las magnitudes conmensurables, se vuelve evidente el camino que lleva a las definiciones alternativas (euclidianas).

La revisión de la teoría introdujo algunas incongruencias que Euclides no captó (o, al menos, no intentó eliminar).

1) Como hemos visto, las pruebas contenidas en el libro XII (con excepción del libro XII, 13) no usan la teoría de la proporción contenida en el libro V.
2) La forma euclidiana de los teoremas sobre el ángulo y el sector del arco (VI, 33) no se ocupa del caso en que los múltiplos de los ar-

cos, ángulos y sectores se toman más grandes que la circunferencia entera, el ángulo completo (es decir, cuatro rectángulos) y el círculo, respectivamente. En cambio, Arquímedes dedica un teorema a un problema análogo en su libro *Espirales*, proposición 15.

3) Hay una diferencia sutil en las dos formas de la condición de una "mayor desigualdad": la definición euclidiana es no constructiva, en el sentido de que da por sentada la existencia de múltiplos que producen las desigualdades expresadas, sin indicar cómo se obtienen. Por el contrario, la técnica eudoxiana de hecho construye el equivalente y esto lo hace a través del lema sobre la obtención de la magnitud conmensurable intermedia.

V Evidencia adicional de la teoría reconstruida de Eudoxo

Una vez fijada en los *Elementos* de Euclides, la forma revisada de la teoría de la proporción suplantó la más antigua forma eudoxiana entre los estudiantes de geometría. En consecuencia, para el historiador de las matemáticas posteriores, es la teoría euclidiana la que sienta las bases de todo el avance de la teoría de la proporción hasta llegar a la época moderna. Pero conocer al precursor eudoxiano tiene gran trascendencia histórica al menos en dos aspectos:

Primero, un puñado de escritores (como Arquímedes y Teodosio) estuvieron en contacto con las fuentes más antiguas y, por eso, encontraron algunos vestigios de la teoría de Eudoxo. Para entender las aportaciones de esta clase, el historiador necesita comprender las diferencias entre las dos formas de la teoría. Por lo menos pueden citarse cuatro pasajes.

1) Arquímedes se sirve de la misma técnica (eudoxiana) en *Del Equilibrio de los planos* I, 6-7, para demostrar el principio fundamental del equilibrio (que las magnitudes están dispuestas en relación con su centro de gravedad, en forma tal que sus pesos son inversamente proporcionales a sus distancias).

2) Para explicar el paso principal de la prueba de Arquímedes en la proposición 7 (el caso inconmensurable), donde se requiere introducir un peso menor que cierto peso dado y conmensurable con otro, el comentador Eutocio remite al lector al libro III de *Geometría esférica*. Según se señaló con anterioridad, allí encontramos el "lema relativo a la geometría esférica", correspondiente a la cita de Pappo en el paso [2] de su prueba referente al teorema sobre el sector del arco. El hecho de que el teorema de Arquímedes proceda de un contexto

enteramente distinto al que rodea la Geometría esférica de Teodosio o al teorema de Pappo indica una vez más cómo el lema se originó en una teoría general de la proporción.

3) La *Geometría esférica* de Teodosio, proposiciones 9-10, se sirven de la misma técnica en el estudio de los arcos de los grandes círculos.

4) El teorema sobre el sector del arco de Pappo, que según hemos visto antes también aplica la técnica alterno, constituye una premisa en la prueba del teorema de que el área de un sector circular es la mitad del producto de su radio y arco. La prueba de este teorema del área supone asimismo el teorema correspondiente relativo a la superficie del círculo, que Pappo en otros pasajes toma directamente del libro *Medida del círculo*, de Arquímedes. En opinión de Heron de Alejandría, en ese mismo libro estaba contenida la prueba del teorema del área del sector (aunque no se halle en el actual texto griego de la obra).

Se deduce, pues, que los dos teoremas de Pappo sobre el sector (esto es, la proporcionalidad de los sectores y arcos, y la regla del producto para su área) están tomados del libro de Arquímedes, de modo que este último debió haber utilizado en él la teoría alterna de la proporción, como lo hace en *Del equilibrio de los planos*. Esta teoría podría atribuirse a sus fuentes técnicas como un sustituto de la teoría euclidiana, puesto que difícilmente podría pensarse que la haya inventado él mismo. En consecuencia, el testimonio de Arquímedes brinda un importante apoyo al origen eudoxiano de esta teoría.

VI Orígenes históricos de la teoría de las proporciones

La teoría euclidiana de los números se basa en el procedimiento de "anthyphairesis", es decir, en su método de división "Euclidiana" para calcular medidas comunes. Esta técnica, que podemos suponer que fue elaborada por Teeteto en la década del año 370, sienta las bases de una teoría de las proporciones para las magnitudes conmensurables (cf. *Elementos* VII) y en principio puede aplicarse a una teoría general que abarque además las magnitudes inconmensurables. Pero su utilización plantea serios problemas técnicos al punto que resulta imposible imaginar que haya alcanzado un notable desarrollo.

Eudoxo siguió un camino distinto. Sus investigaciones acerca de la medición del círculo, la esfera, la pirámide y el cono lo llevaron a una técnica especial de prueba (el llamado "método de exhaución", o sea una técnica indirecta de los límites), basándose en al razonamiento indirecto, en la construcción de figuras auxiliares mediante la bisección continua y la manipulación de desigualdades. La misma técnica pudo modificarse para manejar las proporciones de magnitudes inconmensurables, como se vio en los ejemplos tomados de Arquímedes y Pappo. Con algunas modificaciones menores esta técnica desemboca en definiciones de la teoría euclidiana de las proporciones (*Elementos* V), donde las desigualdades de Eudoxo entre las razones de magnitudes commensurables e inconmensurables se convierten en las desigualdades de Euclides entre equimúltiplos de determinadas magnitudes. Supongo que la transición de la forma eudoxiana a la euclidiana fue obra de los discípulos de Eudoxo durante el último tercio del siglo IV.

Al quedar fija la nueva teoría en los *Elementos* de Euclides, la antigua técnica de Eudoxo comenzó a desaparecer paulatinamente, sobreviviendo únicamente en algunos pasajes dispersos de unos cuantos tratados antiguos (entre ellos, en los de Arquímedes y Teodosio). Arquímedes, hijo de un astrónomo, probabemente aprendió sus matemáticas en los libros de Eudoxo y no en los de Euclides. Ello explicaría los vestigios de la teoría eudoxiana de las proporciones en sus primeros escritos. Pero, al momento de escribir el libro *Espirales*, también él había adoptado ya la forma euclidiana de la teoría (cf. *Espirales*, proposiciones 1-2).

Entre los comentarios de épocas más recientes y de la Edad Media, el libro de Euclides fue adoptado universalmente como obra de consulta para el estudio de la geometría, de manera que la teoría eudoxiana de las proporciones no ejerció un influjo directo en la evolución ulterior de las matemáticas.

Al reconstruir la teoría más antigua descubrimos, y con gran claridad por cierto, la manera de pensar que llevó a Eudoxo a formularla. Sea como fuere, cabe suponer que el geómetra creador de ella captó cabalmente las necesidades técnicas. Pero lo sorprendente es la forma tan adecuada en que su técnica de los límites le da un marco de referencia para enunciar la teoría de las proporciones, pues intentó ampliar el dominio de ella de las magnitudes conmensurables a las inconmensurables. En efecto, su pensamiento se aproxima mucho a la forma en que Dedekind cambió los números reales en términos de desigualdades con los números racionales. Así pues, los orígenes de la antigua teoría son más afines a la teoría moderna de lo que generalmente suponemos.

Bibliografía

Una exposición más detallada de la reconstrucción propuesta aquí se encuentra en W.R. Knorr, "Archimedes and the pre-Euclidean proportion theory", *Archives internationales d'histoire des sciences*, 1978, 28:183-244.

Sobre la mecánica de Arquímedes y, en particular, su prueba tan original del principio de equilibrio: E. J. Dijksterhuis, *Arquímedes*, Copenhague, 1956, cap. 9, y las notas bibliográficas en el epílogo a la edición revisada de W.R. Knorr (Princeton, 1987).

Sobre los teoremas de Arquímedes sobre el círculo y el lugar que en ellos ocupa el teorema sobre el sector del arco propuesto por Pappo: W.R. Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Boston, 1989, part III, cap. 4.

Sobre la teoría alternativa pre-euclidiana de las proporciones a través de la "anthyphairesis": W.R. Knorr, *Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht, 1975; M.E. Lane, "On the possibility of a pre-Euclidean theory of proportion", *Centaurus*, 1984, 27:1-25; D.H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford, 1987.