Mathesis 12 (1996) 256–281
Impreso en México. Derechos reservados © 1996 por UNAM (ISSN 0185-6300)

Mathematics in ancient India. Harappa civilization: mathematics in metrology

George Gheverghese Joseph

Abstract

In constructing a chronology for early Indian mathematics (i.e., up to AD 500), discontinuities arise which makes it difficult to provide a coherent and consistent account of the development of mathematics. The general tendency is to discuss in a disjointed fashion —Harappan Mathematics, Vedic Mathematics, Jaina Mathematics, Mathematics of the Siddhantas, etc. In this paper, there will be an examination of the reasons for this fragmentation and how new evidence can help to bridge the gaps.

The earliest evidence of Indian mathematics is found among the ruins of the Indus Valley civilization which goes back to the beginning of the third millennium before the Christian Era (BC), although the antecedents of this civilization have been traced back to at least 6000 BC in excavations at Mehrgarh. It is perhaps more appropriately referred to as the Harappa civilization (named after an important urban settlement), since at its peak it spread far beyond the Indus valley itself.

Archaeological finds show an elaborate system of weights and measures. Plumb-bobs of uniform size and weight have been found throughout the vast area of the Harappa culture which conform to two series (binary and decimal) in the ratio of 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 and 10, 20, 40, 160, 200, 300, 640, 1600, 6400, 8000 and 12,800. Venkatachalam [1986] points out that equivalent weights have been in use in certain parts of India until recently, with conversion rates identical to the above ratios, as the basis for an elaborate system of barter on one commodity with another.

Scales and instruments for measuring length have been found at major urban centres of this civilization, such as Mohenjo-Daro, Harappa and Lothal

Mathesis 12 (1996) 226-283
Impreso en México (ISSN 0185-6200)

Matemáticas en la antigua India. La civilización Harappa: matemáticas en metrología

George Gheverghese Joseph

Resumen

En la construcción de una cronología para las primeras matemáticas hindúes (es decir, alrededor del año 500 a.C.), nos enfrentamos a discontinuidades que hacen difícil dar una concepción coherente y consistente del desarrollo de las matemáticas. La tendencia general es discutir de modo disconexo las matemáticas harappianas, las védicas, las de Jaina, las de los Siddhantas, etcétera. En este artículo se hace un examen sobre las razones de esta fragmentación y la forma en que las nuevas evidencias pueden ayudar a tender un puente sobre este vacío.

La evidencia más antigua de las matemáticas hindúes fue encontrada entre las ruinas de la civilización del Valle del Indo, que se remonta a los principios del tercer milenio antes de la era cristiana; no obstante, los antecedentes de esta civilización se han rastreado por lo menos hasta el año 6000 a.C. en las excavaciones de Mehrgarh. Lo más apropiado será referirse a ella como la civilización Harappa (llamada así en memoria de un importante asentamiento urbano) que en su apogeo se extendió más allá del propio Valle del Indo.

Los hallazgos arqueológicos muestran un complejo sistema de pesos y medidas. Plomadas de tamaño y peso uniformes encontradas en toda la vasta área de la cultura Harappa conforman dos series (binaria y decimal) en el rango de 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 10, 20, 40, 160, 200, 320, 640, 1600, 6400, 8000 y 12800. Venkatachalam [1986] señala que esta equivalencia en los pesos se ha seguido utilizando en algunas partes de la India hasta épocas recientes, usando conversiones proporcionales idénticas a los rangos anteriores como las bases para un detallado sistema de cambio de mercancías.

Escalas e instrumentos para medir longitudes fueron descubiertos en los principales centros urbanos de esta civilización, como Mohenjo-daro, Harappa y Lothal.

The Mohenjo-Daro scale (shown in Figure 1) is a fragment of shell 66.2 mm long, with nine carefully sawn, equally spaced parallel lines, on average 6.7056 mm apart. The accuracy of the gradation is remarkably high, with a mean error of only 0.075 mm. One of the lines is marked by a hollow circle, and the sixth line from the circle is indicated by a large circular dot. The distance between the two markers is 1.32 inches (33.5 mm), and has been named the 'Indus inch'.

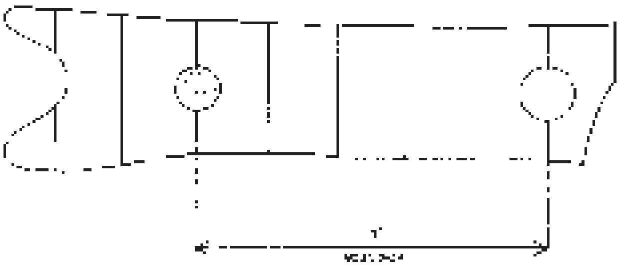

Figure 1

There are a number of interesting links between this unit of length (if indeed that is what it was) and others found elsewhere. A Sumerian *shushi* is exactly half an Indus inch which support other archaeological evidence of contacts between the two ancient civilizations. In north-west India, a traditional yard known as the *gaz* was in use from very early times. In the sixteenth century the Mughal Emperor, Akbar, attempted unsuccessfully to have the *gaz* adopted as a standard measure in his kingdom. The *gaz*, which is 33 inches (or 5 840 mm) by our measurement, equals 25 Indus inches. Furthermore, the *gaz* is only a fraction (0.36 inches) longer than the megalithic yard, a measure that seems to have been prevalent in north-west Europe around the second millennium BC. This has led to the conjecture that a decimal scale of measurement, originating somewhere in Western Asia, spread widely as far as Britain to ancient Egypt and the Indus Valley [Mackie 1977].

A notable feature of the Harappa culture was its extensive use of kiln-fired bricks and the advanced level of its brick-making technology. The bricks were exceptionally well baked and of high quality, and could still be used over and over again provided some care is taken in removing them in the first place. They contain no

La escala de Mohenjo-daro (Figura 1) es un fragmento de concha de 66.2 milímetros de largo, con nueve marcas cuidadosamente talladas en líneas paralelas igualmente espaciadas, con un promedio de 6.7056 milímetros por intervalo. La precisión de la graduación es notablemente alta con una media de error de sólo 0.075 milímetros. Una de las líneas está marcada por una cavidad circular, y la sexta línea del círculo está indicada por un gran punto circular. La distancia entre las dos marcas es de 1.32 pulgadas (33.5 mm) y ha sido llamada la 'pulgada hindú'.

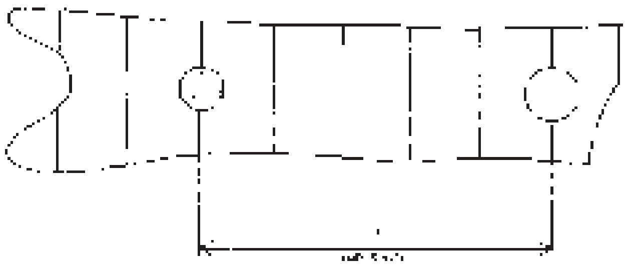

Figura 1

Hay una cantidad interesante de vínculos entre esta unidad de longitud (en caso de que lo fuera) y las halladas en otros lugares. El *shushi* sumerio es exactamente la mitad de una pulgada hindú, lo cual es otra evidencia arqueológica que apoya los contactos entre las dos civilizaciones antiguas. En el noroeste de la India, una yarda tradicional conocida como *gaz* estuvo en uso desde tiempos muy antiguos. En el siglo XVI el emperador mogol, Akbar, intentó infructuosamente adoptarla como patrón de medida en su reino. El *gaz* que mide 33 pulgadas (5. 840 mm) en nuestro sistema de medida, equivale a 25 pulgadas hindús. Más aún, el *gaz* es sólo una fracción (0.36 pulgadas) más larga que la yarda megalítica, una medida que parece estar vigente en el noroeste de Europa alrededor del segundo milenio antes de Cristo. Esto conduce a la conjetura de que una escala decimal de medidas originada en algún lugar de Asia occidental, se extendió ampliamente a lugares tan remotos como Inglaterra o hasta el mismo Egipto, así como en el Valle del Indo [Mackie, 1977].

Una característica notable de la cultura Harappa fue el uso extendido de ladrillos de arcilla horneados y el nivel tecnológico tan avanzado en su fabricación. Los ladrillos eran cuidadosamente cocidos para conservar su alta calidad, y podía seguir utilizándolos una y otra vez teniendo cierto cuidado al removerlos del primer sitio en que se usaron. Estos no contenían straw or other binding material. While fifteen different sizes of Harappan bricks have been identified, the standard ratio of the three dimensions —the length, breadth and thickness— is close to 4:2:1. Even today this is considered the optimal ratio for efficient bonding.

A correspondence between the Indus scales (from Harappa, Mohenjo-Daro and Lothal) and brick sizes has been noted by Mainkar [1984]. Bricks of different sizes from the three urban centres were found to have dimensions which were integral multiples of the graduations of their respective scales.

Our argument on the development of mathematics (and of particularly geometry) is not based on any direct evidence, nothing like the Mesopotamian clay tablets or the Egyptian papyri testifying to its origins in other centres of early civilization. However, from the standpoint of a practical engineer, Kulkarni [1978] has argued, mainly on the earlier reports of the early archaeologists such as Marshall and Mackay —*i.e.*, without yet taking note of the significant discoveries from the excavation of Kalibhagan and more spectacular ones from the dockyard at Lothal— that the elaborate constructions excavated cannot be understood by us today without attributing the knowledge of a number of geometrical propositions to the Harappan architects, engineers and masons: propositions relating to the shapes and mensuration of rectilinear figures and circles.

Deciphering the indus script

Notwithstanding these connections which have served until recently as the only basis for making inferences about the numerate character of the Harappa culture, an important piece of evidence, the written script, has so far thrown no light on this subject. This script, usually referred to as the Indus script, was a system of writing employed in the Harappa civilization, more or less contemporaneously with two other civilizations, the Mesopotamian and Egyptian. As is well known, the writings of these other two civilizations have been deciphered, and hence the archaeological findings are richly supplemented by written records to obtain a better understanding of these civilizations.

The Indus script remains unread, despite years of ingenious attempts to do so. The script poses certain problems which were not present in the writings of other two ancient scripts. The Indus writing is only available through objects of a very restricted medium, typically in the form of seals made of steatite, each seal on the average containing a text of only five graphemes (or signs).

paja u otro material aglutinador. Se han identificado quince tamaños diferentes de ladrillos harappianos, con un patrón de proporción en tres dimensiones —largo, ancho y grosor— cercano a la relación 4:2:1, que todavía es considerada la proporción óptima para una adherencia eficiente.

La correspondencia entre las escalas hindúes (Harappa, Mohenjo-daro y Lothal) y el tamaño de los ladrillos fue señalada por Mainkar [1984], quien descubrió que ladrillos de diferentes tamaños provenientes de los tres centros urbanos, tienen dimensiones que son múltiplos enteros de las graduaciones de sus escalas respectivas.

Nuestro argumento sobre el desarrollo de las matemáticas (y particularmente de la geometría) no se fundamenta en evidencias directas, aún no tenemos algo similar a las tablas de arcilla de Mesopotamia o los papiros egipcios que testifiquen sus orígenes en otros centros de civilizaciones anteriores. Sin embargo, desde el punto de vista de Kulkarni [1978], un ingeniero práctico, se dice que basándose principalmente en los reportes de los primeros arqueólogos Marshall y Mackay, —es decir, sin tomar en cuenta los importantes descubrimientos de la excavación de Kalibhagan y el espectacular patio del astillero en Lothal— la complicada construcción excavada no pueden ser entendida sin recurrir al conocimiento de ciertas proporciones geométricas por parte de los arquitectos, ingenieros y albañiles harappianos: proposiciones relacionadas con la forma y la medida de figuras rectilíneas y círculos.

Descifrando la escritura hindú

Aún cuando estas conexiones han servido recientemente como la única base para hacer inferencias acerca del carácter numérico de la cultura Harappa, una evidencia importante, como sería la escritura, hasta ahora no ha salido a la luz. Esta escritura usualmente referida como escritura hindú, fue un sistema empleado en esta civilización, más o menos contemporáneo al de otras dos: Mesopotamia y Egipto. Es bien conocido que la escritura de ambas culturas ya se ha descifrado, con lo cual los hallazgos arqueológicos se enriquecen ampliamente por estos registros escritos que proporcionan un mejor entendimiento de estas civilizaciones.

La escritura hindú todavía permanece sin poder ser leída, a pesar de años de intentos para hacerlo, ya que presenta problemas no contemplados en las otras dos escrituras antiguas. Esta escritura está disponible solamente a través de objetos que eran de uso muy restringido, comúnmente en forma de sellos hechos de esteatita, conteniendo cada uno en promedio un texto de sólo cinco grafemas (o signos). Hasta

No bilingual or multilingual text, such as the Rosetta stone in the Egyptian case, is available. Also the language, or the language family, of the Indus script texts is unknown, although the common assumption made in the past was that it is some form of proto-Dravidian language and had 'disappeared' sometime before the middle of the second millennium BC. There is apparently a long hiatus between this disappearance and the emergence of the so-called historical period of the Indian sub-continent (the Vedic period) which is conservatively dated as starting around the middle of the first millennium BC, causing thereby a big 'hole' in the chronology of Indian mathematics right from its inception.

There have been many attempts to read the texts ever since a substantial collection of them became available around the 1920's. Many of the early attempts were phonetic interpretations based on unverifiable *a priori* linguistic and other speculations, sometimes involving mythological elements of Hindu traditions. A notable 'objective' attempt was that of Hunter [1934] who carried out a positional and functional analysis of the signs of the Indus script and suggested methods for splitting the texts into certain sign combinations which constituted 'words', irrespective of their linguistic attributes. Following Hunter's work, more recent investigations have involved detailed structural analysis of the texts with the aim of classifying the signs or sign combinations into linguistic units, such as root morphemes, attributes and other grammatical suffixes, and then read the texts phonetically, adapting a form of Dravidian as the underlying language.

However, what has been achieved so far in the deciphering of the Indus script is summed up by the title of Mahadevan's 1988 Presidential Address to the Indian History Congress: "*What Do We Know About the Indus Script? Neti Neti (Not This, Not That)*".

Any fresh approach to the deciphering of the Indus script needs to take account of three distinctive features that have been identified in earlier studies. First, there exists rich structural regularities in the texts which make them distinct from other ancient writings. Second, the texts occur in almost all cases on seals so that the purposes of these seals become a matter of crucial importance. Finally, a closer examination should be made of the nature and significance of a number of animal and other motifs, named by archaeologists as 'field symbols', that occur on many of the seals together with the writing. And the examination of all three features should be made within the historical context of the emergence of the Harappa culture and its aftermath.

ahora no se dispone de ningún texto bilingüe o multilingüe, como la piedra Rosetta en el caso egipcio. Asimismo, tampoco se conoce el lenguaje o familia lingüística utilizado. Aún pervive la suposición de que éste era una especie de lenguaje proto-dravidiano que 'desapareció' en alguna época antes de la primera mitad del segundo milenio antes de nuestra era. Aparentemente hay una gran laguna entre esta desaparición y el surgimiento del llamado periodo histórico del subcontinente hindú (periodo védico) cuyo inicio se fecha conservadoramente alrededor de la mitad del primer milenio antes de Cristo, causando de esta manera un gran 'vacío' desde el comienzo de la cronología de las matemáticas hindúes.

Se han hecho diversos intentos para leer los textos, principalmente desde que una importante colección de éstos estuvo disponible alrededor de los años veinte. Estas tentativas estuvieron basadas en interpretaciones fonéticas *a priori* lingüísticamente inverificables; otras especulaciones incluyeron —algunas veces— elementos mitológicos de las tradiciones hindúes. Uno de los intentos más 'objetivos' fué el de Hunter [1934] que llevó a cabo un análisis posicional y funcional de los signos de la escritura hindú, sugiriendo métodos que separaban una cierta combinación de signos que constituían 'palabras', independientemente de sus atributos lingüísticos. Continuando con el trabajo de Hunter, las investigaciones más recientes dan como resultado un detallado análisis estructural del texto con la intención de clasificar los signos o sus combinaciones en unidades lingüísticas, tales como raíces de morfemas, atributos u otros sufijos gramaticales, para entonces leer los textos fonéticamente, adaptando una forma dravidiana como lenguaje fundamental.

Lo realizado hasta ahora respecto a descifrar la escritura hindú está resumido en un título de Mahadevan del 1988, conferencia magna del Congreso Hindú de Historia: "*¿Qué es lo que sabemos acerca de la escritura hindú? Neti Neti* (*No esto, no aquello*)".

Cualquier nuevo enfoque para descifrar la escritura hindú necesita tomar en cuenta los tres rasgos distintivos identificados en los estudios anteriores. El primero afirma que existen suficientes regularidades estructurales en los textos, lo que los distingue de otras escrituras antiguas. Segundo, los textos aparecen en la mayoría de los sellos, convirtiendo el uso de estos en un estudio de vital importancia. Finalmente, deberá hacerse una revisión más cercana sobre la naturaleza y significado de los números zoomorfos y otro tipo de imágenes, llamados por los arqueólogos 'símbolos de campo' que aparecen en muchos de los sellos junto con lo escrito. Sin olvidar que la revisión de estos tres rasgos debe hacerse dentro del contexto histórico unido al surgimiento de la cultura Harappa y sus repercusiones.

Some recent studies Jeganathan [1993], Kak [1989 & 1990] and Subbarayappa [1993] are noteworthy attempts to incorporate these features and look at the Indus texts with 'fresh eyes'. The discussion that follows is based on these studies.

It is generally accepted that the Indus seals were records of administration and of internal as well as external trade. Indus seals have been found in sites in West Asia indicating periods of commercial contact between the Harappans and the wider neighbouring areas. There is also general agreement among archaeologists of the existence of an efficient and centralised administration, governing the vast area which constituted the Harappa culture, ensuring a degree of uniformity whether it was in the construction of houses and public amenities, promotion of arts and commerce or other activities.

What do the inscriptions on seals mean? To attempt an answer, some features of the Harappa culture needs to be highlighted. The geographical spread of this culture makes it highly unlikely that the language was the same throughout the length and breadth of that culture. Even the Mesopotamian civilization, which was contained in a much smaller area than that of the Harappa culture, had regional variations in language. Such variations are commonly observed throughout history. India has had a multilingual culture from ancient times. There have been marked variations not only in spoken but also in written languages. As to a common script, whatever may have been the situation in other ancient civilizations, the picture could well be different on the Indian sub-continent. Even the earliest extant written records from the first half of the first millennium BC used two scripts —Kharosti and Brahmi— as vehicles of the same language. Are we therefore justified in assuming that there was one language throughout the Harappa culture —in the urban centres such as Mohenjo-daro, Harappa, Chanhu-daro, Lothal, Kalibangan, etc., and in the rural settlements— spanning a total area of 1.2 million square kilometres? Yet this assumption of a similar literary script is necessary since the seals and other inscribed objects found in different parts of the Harappa culture have more or less identical forms with a noticeable uniformity of their own. Such a continuity may be more plausible in the case of a well-established system of numerical notation.

The brahmi-indus correspondence

Number reckoning and notations have historically cut across language and other barriers. Indeed, if there is a single universal object today, one that transcends linguistic, national and cultural barriers and is acceptable

Otros estudios más recientes: Jeganathan [1993], Kak [1989 y 1990] y Subbarayappa [1993] son investigaciones sobresalientes que incorporan estos rasgos y ven a los textos hindúes con 'nuevos ojos'. La discusión que sigue está basada en estos estudios.

Se acepta comúnmente que los sellos hindúes fueron registros utilizados en administración y comercio, tanto interno como externo. Los encontrados en sitios del occidente de Asia indican periodos de contacto comercial entre los harappianos y sus vecinos. Hay un acuerdo general entre los arqueólogos sobre la existencia de una administración centralizada y eficiente que gobernaba la vasta área ocupada por la cultura Harappa, asegurando con ello un grado de uniformidad, ya sea en la construcción de casas, diversiones públicas, promoción de artes, comercio u otras actividades.

¿Qué significan las inscripciones en los sellos? Para formular una respuesta adecuada se deben resaltar algunas de las características de la cultura Harappa. Por un lado, su extensión geográfica hace sumamente difícil que el lenguaje fuera el mismo a lo largo y lo ancho de ella. Aún la civilización mesopotámica establecida en una área más pequeña tuvo variaciones regionales de lenguaje. Esta diversidad es común en la historia. La India ha tenido una cultura multilingual desde tiempos remotos, lo que marca diferencias no sólo en el lenguaje hablado sino también en el escrito. Respecto a la escritura común, ¿cuál sería la situación en otras civilizaciones antiguas? El panorama pudo ser diferente en el subcontinente hindú. Los primeros registros escritos de la primera mitad del primer milenio a.C., fueron dos —kharosti y brahmi— que se utilizaron como vehículos de un mismo lenguaje.

¿Estará entonces justificado asumir que hubo un solo lenguaje en toda la cultura Harappa —en centros urbanos como Mohenjo-daro, Harappa, Chanhu-daro, Lothal, Kalibangan, etc., y en las poblaciones rurales— dispersa en una área total de 1,2 millones de kilómetros cuadrados? Todavía es necesaria esta suposición de una escritura similar, literalmente hablando, ya que los sellos y otros objetos inscritos encontrados en diferentes lugares de esta cultura tienen, más o menos, formas idénticas con una marcada uniformidad entre ellos. Tal continuidad puede ser más plausible en el caso de un sistema bien establecido de notación numérica.

Correspondencia entre el bramhi y el hindú

Históricamente los cálculos numéricos y las notaciones han traspasado la barrera del idioma. En efecto, si existe hoy un objeto universal que trascienda barreras lingüísticas nacionales y culturales, que sea aceptado to all and denied by none, it is our present set of numerals. From its remote beginnings in India, its gradual spread in all directions remains the great romantic episode in the history of mathematics.

Yet there is a further question. It is clear that both in India and elsewhere, there have been several languages which have existed without scripts of their own. During the early Vedic period, there is some doubt whether a written script was available. A long tradition of oral communication of knowledge was a characteristic of that period and left a singular mark on the nature and transmission of knowledge, whether religious or scientific, in Indian civilization. A question arises: If the Vedic culture followed the Harappa culture, and if there was a written tradition among the Harappans, would this not continue? A further question: If the Harappans had a literate tradition, how was it they did not leave behind long texts like those which have shown up in the Sumerian civilization with whom the Harappans had long-established contacts?

After pondering over these questions, Subbarayappa [1993, 43] arrives at two interesting conjectures. The Harappans did not have a written language but an oral tradition similar to those of succeeding cultures. Second, and a crucial conjecture: for purposes of

> central administration, agricultural production and management, arts and crafts, weights and measures, and commercial practices [...] the Harappans developed a viable system of numbers and their forms [which] found their way on to the Indus seals and other inscriptions.

The numerical nature of the information contained is also inferred from the fact a number of the signs often occur side by side in twos, sometimes in threes and fours: a characteristic that one normally associates with numbers rather than words.

> If there are about 430 script forms, which by permutation and combination, have appeared on seals and others, sometimes in a repetitive manner, naturally a question arises: If these forms consist of words, was the vocabulary of the Harappans limited to these? On the other hand, in the ciphered system of numeration, by using as many as 430 forms, a wide variety of numbers both small and large can be recorded in the desired way.
> [Hence, all] these considerations lead to the conclusion that the script forms on Indus seals and other engravings cannot but be numerical. One may even say that the seals are an exclusive repository of numerical forms, unparalleled elsewhere. This is the point of departure from attempts made so far for deciphering the Indus script. [...] Besides, the interlinks among the scripts forms,

por todos sin posibilidad de ser negado, es nuestro presente conjunto de números. Desde sus lejanos inicios, en la India, hasta su gradual dispersión en todas las direcciones permanece como un gran episodio romántico en la historia de las matemáticas.

Aún existe una cuestión por añadir. Es claro que tanto en la India como en otras partes, han habido lenguajes sin escritura propia. Durante el inicio del periodo védico, todavía hay dudas sobre la disponibilidad de una escritura. La característica del periodo fue la arraigada tradición de comunicación oral que dejó una marca singular en la naturaleza y en la trasmisión de conocimientos religiosos o científicos en la civilización hindú. Surge una pregunta: ¿la cultura védica siguió a la cultura Harappa, y si hubo una tradición escrita entre los harappianos, acaso ésta no continuó? Una pregunta adicional: si los harappianos tuvieron una tradición literaria, ¿cómo fue que ellos no dejaron grandes textos como los de la civilización sumeria, con quienes los harappianos tuvieron un contacto bien establecido?

Después de ponderar estas preguntas, Subbarayappa [1993, 43] llega a dos conjeturas interesantes: los harappianos no tenían un lenguaje escrito, sino una tradición oral similar a aquellas de las culturas posteriores. Y una conjetura crucial: para los propósitos de

> administración central, producción agrícola, gobierno, artes, oficios, pesas, medidas y prácticas comerciales [...], los harappianos desarrollaron un sistema accesible de números y sus formas . . [el cual] encontró utilidad en los sellos hindúes y otras inscripciones

La naturaleza numérica de la información es también inferida del hecho de que una determinada cantidad de signos se agrupa frecuentemente en pares, otras veces en tercias o en cuádruplos: una característica que se asocia normalmente más con números que con palabras.

> Si hay alrededor de cuatrocientas treinta formas de escritura, que por permutación y combinación han aparecido en sellos y otros objetos, algunas veces de manera repetitiva, naturalmente surge una duda: si estas formas consisten de palabras, ¿el vocabulario harappiano se limitaba a éstas? Por otro lado, en el sistema cifrado de numeración, usando tantas como 400 formas, una amplia variedad de números tanto pequeños como grandes puede ser registrada en la manera deseada.
> [De aquí que, todas] estas consideraciones conducen a la conclusión de que las formas de escritura en los sellos hindúes y otros grabados no pueden ser más que numéricos. Aún se puede decir que los sellos son un depósito exclusivo de formas numéricas sin paralelo en otro lugar. Este es el punto de partida de los intentos hechos hasta ahora para descifrar la escritura hindú [...] Además, la interrelación entre las formas escritas, las figuras

> the animal motifs and the object-structure in front of them, will also be examined as an integral part of this new approach [*Ibid.*, 44]

Both Kak's and Jeganathan's works are variations on the same theme. From a frequency analysis, Kak found a number of similar features in the Brahmi and Indus writing. These include 'a tendency to use abbreviations and the sometime use of consonantal writing' and numeral signs. There were also interesting parallels between the 'field-symbols', notably the animal motifs in both writing.

From a structural and characteristic classification of the Indus script forms, Jeganathan groups the signs into four classes. The first class of signs, consisting of closely grouped identical marks such as the Indus forms for numbers one to three, are called *straight numerals*. The second class of signs (*the first order numerals*) stand for numerals four to ten, some of these having more than one sign form. A distinctive characteristic of this class of numerals is that they have both a concrete and etymological basis. Thus the sign for four ( ) stands for grain and its sound value in proto-Dravidian is *nellu* (grain) which approximates to *nallu* (four). Similar connections are made for five ( ) between *kai* (hand) and *cai* (five), for six ( ) between *coru* (vessel) and *caru* (six) ...

The third class contains *second order numerals*. They have concrete backgrounds, in the sense that if a combination is formed between a second order one and a numeral of the previous types, or between the second order ones themselves, the operation is multiplication and the result is usually expressed in the form of second order numeral. However, the majority of such combinations are between a second order numeral and a straight numeral. They include signs for ten, hundred and thousand. However, Jeganthan is unable to establish a word or numeral identification for a number of signs of this class.

The last class are called *basic metrical numerals*. Each of these numerals stands for a suitable unit of capacity measures and for the value of a numeral, taking either one of these attributes depending on the context. When paired with numerals of the preceding classes, the operation involved is conjectured to be multiplication.

It is not the purpose of this paper to give a detailed description or critique of these attempts to decipher the Indus script. One of their main strengths is their attempt to provide detailed rationale for a numerical interpretation of the Indus script and more important to restore the historical continuity which has been missing as a result of the long-held perception of the Harappa culture as being disjointed from what followed later in the Indian sub-continent.

> zoomorfas y los objetos estructurales frente a ellos, serán también examinados como una parte integral de esta nueva interpretación [*Ibid.*, 44].

Los trabajos de Kak y Jeganthan son variaciones sobre el mismo tema. De un análisis de frecuencia, Kak encontró varias características similares en la escritura brahmi e hindú. Esto incluye 'una tendencia a usar abreviaturas y uso ocasional de escritura consonante' y signos numéricos. Hubo también paralelos interesantes entre los 'símbolos de campo', principalmente los motivos zoomorfos de las dos escrituras.

De la clasificación de manera característica y estructural de las formas de la escritura hindú, Jeganathan agrupa los signos en cuatro clases. La primera consiste en marcas idénticas agrupadas tales como las formas para los números del uno al tres, llamados *números exactos*. La segunda clase de signos (*números de primer orden*) representan los números del cuatro al diez, algunos con más de un signo. Una característica distintiva de esta clase de números es que tienen tanto una base concreta como etimológica. Por lo que el signo para cuatro (ψ) significa grano y su valor de sonido en proto-dravidiano es *nellu* (grano) que se aproxima a *nalu* (cuatro). Conexiones similares son hechas para el cinco (ʼ|ʼ) entre *kai* (mano) y *cai* (cinco); y para seis (⊔) entre *coru* (vasija) y *caru* (seis).

La tercera clase contiene *números de segundo orden*. Estos tienen antecedentes concretos, en el sentido de que si una combinación es formada entre un segundo orden y un número del tipo anterior, o entre los mismos de segundo orden, la operación es una multiplicación y el resultado es expresado generalmente en la forma de un número de segundo orden. Sin embargo, la mayoría de tales combinaciones son entre un número de segundo orden y un número exacto. Estas incluyen signos para decenas, centenas y millares. No obstante, Jeganthan es incapaz de establecer una palabra o identificación numérica para signos de esta clase.

La última clase son los *números métricos básicos*. Cada uno de estos significa una unidad propia de medida de capacidad o el valor de un número, tomando cualquiera de estos atributos dependiendo del contexto. Cuando formamos parejas con números de la clase anterior, se conjetura que la operación involucrada es una multiplicación.

No es el propósito de este artículo dar una descripción detallada o crítica de estos intentos por descifrar la escritura hindú. Uno de sus principales valores es tratar de dar una interpretación numérica racional y concisa de la escritura hindú, siendo aún más importante la reconstrucción de la continuidad histórica perdida como resultado de la equivocada percepción sostenida por largo tiempo, que separaba a la cultura Harappa del desarrollo posterior en la India.

Table 1 is adapted from Subbarayappa [1993, Table 10]. It compares the Indus numerals to Brahmi and Kharosti numerals and the Chinese Shang 'oracle-bone' and other numeral forms. The attribution of certain Indus forms to specific numerals may be open to argument. But the similarity between the Indus and the later numerals remains and this forms the basis for matching the Indus notation with specific numbers

It is the attempt to understand the Indus script in its wider socio-economic context and in the later development of other numerals that make the studies discussed so interesting. But there is the danger (and the authors are aware of it) that the heavy weight of conjectures piled on one another may result in the collapse of the whole thesis. Future work based on longer written records found from further excavations is needed to verify each individual conjecture which is part of the process of deciphering the Indus script.

One important consequence of these recent studies of the Indus script is that the continuity of the history of Indian mathematics has been partially restored although we are not any more nearer to establishing a more precise chronology for Indian mathematics. Together with Chattopadhyaya's work [1986] on the connections between the brick-making technology of the Harappa culture and the construction of sacrificial altars in the Vedic period over a thousand years later according to conservative dating, the attempts to link the Indus script with later numerals in the case of Subbarayappa or with the Brahmi script in the case of Kak or with Dravidian counting etymology in the case of Jeganthan, form a real advance towards a more holistic approach to the early history of Indian mathematics.

Mathematics in the vedic age

An examination of the earliest written record of geometry in India involves a study of the *Sulbasutras*,[1] conservatively dated around 800 to 500 BC, although they contain knowledge from earlier

1 Three of the more mathematically important *Sulbasutras* were the ones recorded by Baudhyana, Apastamba and Katyayana. Little is known about these *sulbakaras* (i.e., authors of *Sulbasutras*) except that they were not just scribes but also priest-craftsmen performing a multitude of tasks including design, construction and maintenance of sacrificial altars

La Tabla I está adaptada de Subbarayappa [1993, Tabla 10], ésta compara los números hindúes con los números brahmi, kharosti, el 'oráculo de hueso' Chinese Shang y otras formas numéricas. La atribución de ciertas formas hindúes a números específicos puede estar abierta a discusión. Pero la similitud entre los números hindúes y los posteriores aún permanece, y éstos forman la base para igualar esta notación con números específicos.

Este es el intento de entender la escritura hindú en su amplio contexto socioeconómico y en el desarrollo posterior de otros números que hacen la discusión del estudio tan interesante. Pero existe el peligro (y los autores están concientes de ello) de que todo el peso de las conjeturas acumuladas una sobre otra, puede repercutir en el colapso de toda la tesis. Estudios futuros que puedan basarse en registros escritos encontrados en nuevas excavaciones serán necesarios para verificar cada conjetura individual que es parte del proceso de desciframiento de la escritura hindú.

Una consecuencia importante de estos estudios recientes en escritura hindú es que la continuidad en la historia de sus matemáticas ha sido parcialmente reestablecida, aunque todavía no estamos cerca de establecer una mayor precisión cronológica de las matemáticas hindúes. Con el trabajo de Chattopadhyaya [1986] sobre las conexiones entre la tecnología de la fabricación de ladrillos de la cultura Harappa y la construcción de los altares de sacrificio en el periodo védico alrededor de mil años después, de acuerdo con fechas conservadoras, los intentos de ligar la escritura hindú con números posteriores, como es el caso de Subbarayappa, o con la escritura Brahmi, como señala Kak, o con la cronología dravidiana, considerando la etimología, como dice Jegandhan, se da un avance real en torno a un mayor acercamiento holístico de una historia antigua de las matemáticas hindúes.

Matemáticas en la edad védica

El análisis de los registros escritos de geometría más antiguos en la India involucra el estudio de los *Sulbasutras*,[1] fechados conservadoramente alrededor de los años 800 a 500 a.C., los cuales contienen conocimiento

1 Los tres *Sulbasutras* matemáticamente más importantes fueron los registrados por Baudhyana, Apastamba y Katyayana. Poco se conoce sobre estos *sulbakaras* (i.e., autores de los *Sulbasutras*) excepto que no sólo fueron escribas sino también sacerdotes que desarrollaban multitud de labores incluyendo diseños, construcción y mantenimiento de altares de sacrificio

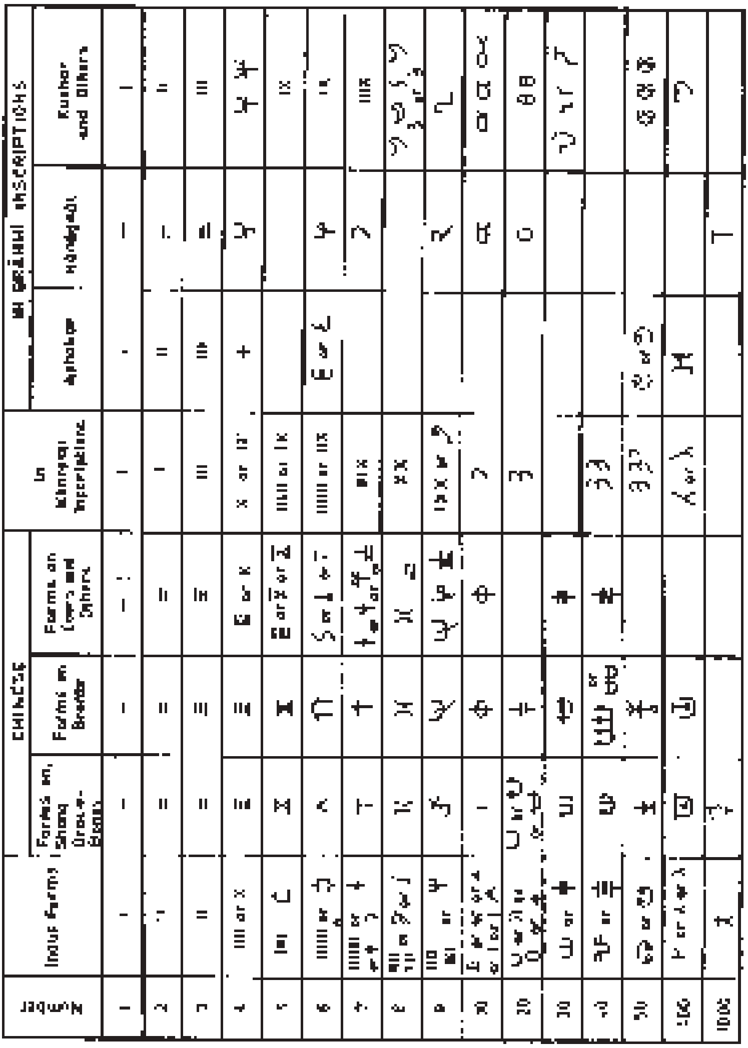
Number
Indus Forms
CHINESE
Forms on Shang Oracle-Bones
Forms on Bronze
Forms on Coins and Others
In Kharosthi Inscriptions
IN BRAHMI INSCRIPTIONS
Asokan
Nanaghat
Kushan and Others
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
100
1000

Table I

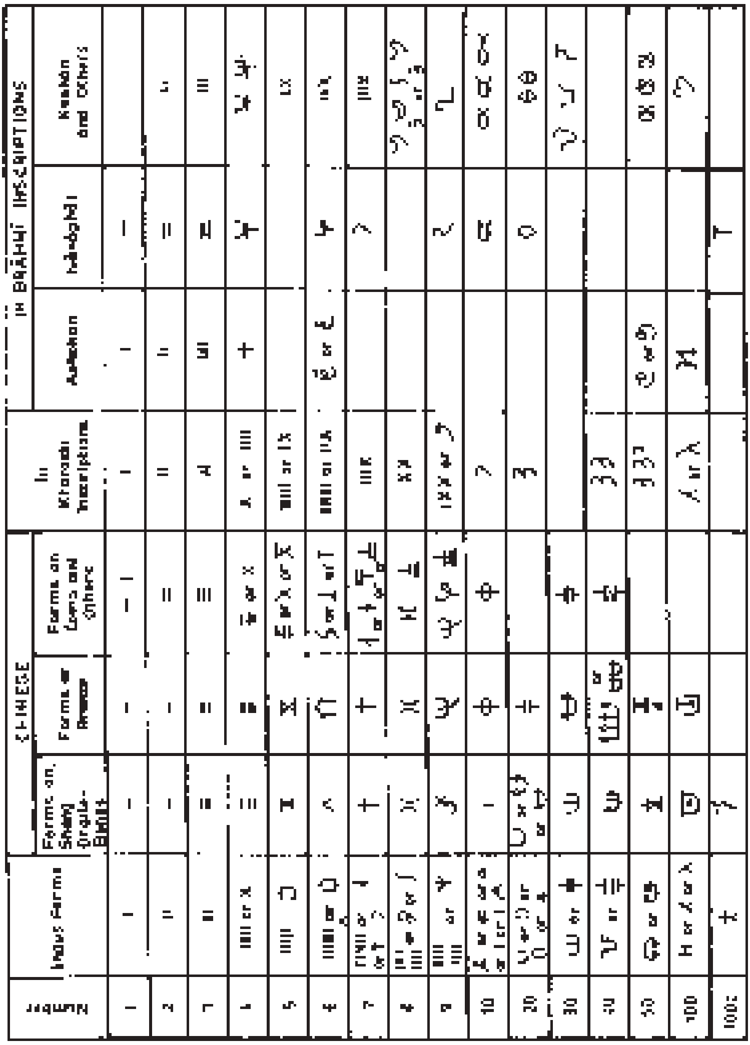
Number
Indus Forms
CHINESE
Forms on Shang Oracle-Bones
Forms on Bronzes
Forms on Coins and Others
In Kharoshthi Inscriptions
IN BRAHMI INSCRIPTIONS
Asokan
Nanaghat
Kushan and Others
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
100
1000

Tabla 1

times, notably the *Sathapatha Brahmana* which conservative chronology places around 1000 BC.[2] The *Sulbasutras* are instructions for the construction of sacrificial altars (*vedi*) and the location of sacred fires (*agni*) which had to conform to clearly laid-down instructions about their orientation, shapes and areas if they were to be effective instruments of sacrifice. There were two main types of ritual, one for worship at home and the other for communal worship. Square and circular altars were sufficient for household rituals, while more elaborate altars whose shapes were combinations of these basic figures and rectangles, triangles and trapeziums, were required for public worship.

The composers of the *Sulbasutras* made it clear that their work was not original but could be traced to earlier texts, notably the *Samhitas* and the *Brahmanas* of which the most relevant text, the *Satapatha Brahmana* is at least three thousand years old.[3] Despite its obscurities and archaic character, the text is valuable for an early discussion of the technical aspects of altar construction.

An important section of the *Sathapatha Brahmana* deals with the construction of altars to carry out a twelve day *Agnicayana* ceremony which, as the name would indicate, is concerned with measuring the passage of time. The ceremony took place in an area containing two sections (see Figure 2): (i) The *Mahavedi* (Great Altar): Shaped like an isosceles trapezium, the two parallel sides were located in such a way that the larger side measured 30 *prakramas* on the west and the

2 Chronologically, this period of Indian astronomy and mathematics should be taken to commence from when the Vedic hymns began to be composed, which some date as going back to 4000 BC. Certain issues regarding early Indian chronology have unfortunately become a tug-of-war between those Westerners who see themselves as the guardians and promoters of impartial scholarship and invariably adopt conservative dating and certain Indians who make excessive claims of antiquity for the early sources of Indian mathematics and astronomy. The tunnel visions of both groups make the task of incorporating recent discoveries in archaeology, necessitating drastic revisions to the conservative dating of the Vedic period, more difficult. What this evidence would indicate is that the final forms of both *Sathapatha Brahmana* and *Sulbasutras* should be placed about a thousand years earlier than the conservative dates attributed to these texts. For further details on recent evidence from archaeology, see Frawley [1991] and Kak [1987a, 1987b, 1992].

3. The literature includes, primarily four Vedic *Samhitas* (i.e., *Rigveda*, *Yajurveda*, *Samaveda* and *Atharvaveda*) in their various recensions and being the collection and presentation in a classified form of a large number of Vedic hymns; a set of elucidatory literature called *Brahmanas* of which the *Satapatha Brahmana* is the most important for our purpose; a set of philosophical treatises called *Upanishads*; and six *Vedangas*, written for the purpose of instilling the correct methods of recitation of the *Vedas* and of performing Vedic rituals, of which two, the *Jyotisa* and the *Kalpa* are particularly important for our purposes since the first contains early knowledge of astronomy and the last contains the *Sulbasutras*.

de tiempos anteriores, en especial el *Sathapatha Brahmana*, cuya cronología lo sitúa alrededor del 1000 a.C.[2] Los *Sulbasutras* son indicaciones sobre la construcción de los altares de sacrificio (*vedi*) y la locación de los fuegos sagrados (*agni*), que tenían que seguir instrucciones claramente establecidas acerca de su orientación, forma y área si querían ser instrumentos de sacrificios efectivos. Había dos tipos principales de rituales, uno para el culto en la casa y el otro para el culto en comunidad. Altares cuadrados y circulares eran suficientes para rituales domésticos, mientras que los altares más elaborados cuyas formas eran combinaciones de estas figuras básicas junto con rectángulos, triángulos y trapecios eran los requeridos para cultos públicos.

Los autores de los *Sulbasutras* señalaron claramente que su trabajo no era original, este podía rastrearse en los textos más antiguos; notablemente los *Samhitas* y los *Brahmanas*, cuyo texto más relevante es el *Satapatha Brahmana*, que tiene al menos 3000 años de antigüedad.[3] A pesar de su obscuridad y su carácter arcaico, el texto es valioso por la temprana discusión de aspectos técnicos en la construcción de altares.

Una importante sección del *Sathapatha Brahmana* trata acerca de la construcción de altares para llevar a cabo una ceremonia de doce días llamada *Agnicayana*, la cual se refiere a la medida del paso del tiempo. Dicha ceremonia se hacía en una área que contenía dos secciones (ver Figura 2): (i) El *Mahavedi* (Altar Grande): de forma similar a un trapecio isósceles, con los dos lados paralelos colocados de manera que el más largo midiera 30 *prakramas* en el oeste y el lado más

2. Cronológicamente, debe tomarse este período de astronomía y matemáticas hindúes como el inicio de la composición de himnos védicos, alrededor de cuatro mil años a.C. Algunas publicaciones consideran a la antigua cronología hindú como campo de batalla entre los occidentales, que se ven así mismos como los guardianes y promotores de una sabiduría imparcial y que invariablemente asignan fechas conservadoras, y algunos hindúes que hacen reclamos excesivos sobre la antigüedad de las tempranas fuentes matemáticas y astronómicas. La visión estrecha de estos dos grupos hace más difícil la labor de incorporar descubrimientos arqueológicos recientes, al necesitarse una revisión drástica y conservadora en el fechado del período védico. Estas evidencias indican que la conformación final del *Sathapatha Brahmana* y los *Sulbasutras* deberían situarse alrededor de mil años antes que las fechas atribuidas a estos textos. Para más detalles sobre evidencias arqueológicas recientes ver Frawley [1991] y Kak [1987a, 1987b, 1992].
3. La literatura incluye principalmente: cuatro *Samhitas* védicos (i.e. *Rigveda*, *Yajurveda*, *Samaveda* y *Atharvaveda*) en varias recensiones, haciendo su colección y presentación de forma clasificada en un gran número de himnos védicos, un conjunto de literatura aclaratoria llamada *Brahmanas*, de los cuales el *Satapatha Brahmana* es el más importante para nuestros propósitos; un conjunto de tratados filosóficos llamados *Upanishads*, y seis *Vedangas*, escritos con el propósito de instruir al modo correcto de recitación de los vedas y la representación de sus rituales, de los cuales dos, el *Jyotisa* y el *Kalpa* son particularmente importantes para nuestros fines, ya que el primero contiene conocimientos antiguos de astronomía y el último a los *Sulbasutras*.

smaller side 24 *prakramas* on the east with the altitude of the trapezium being 36 *prakramas*.[4] The choice of these dimensions may have been dictated by a calendrical consideration: to reconcile the discrepancy of the two calendars in use —the lunar and the solar— by choosing a nominal year of 360 days which is four times the

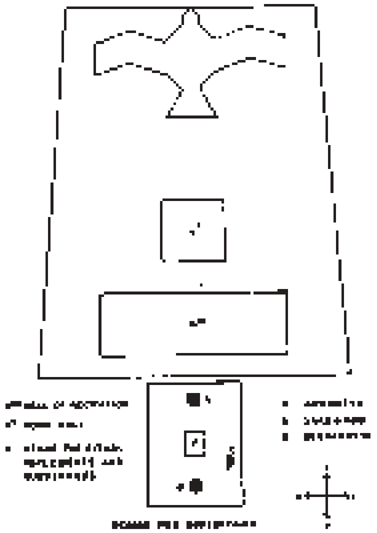

Figure 2

sum of the above dimensions. Contained in the *Mahavedi* was a falcon-shaped brick altar (*Vakrapraksa-syena*) representing time.[5] The geometrical aspects relating to the construction of this altar will be discussed later in this paper. There were other constructions contained in the *Mahavedi* of functional and ritual significance but yield-

4. The measures used in the *Satapatha Brahmana* were the same as in the *Sulbasutras*. The important units of measurement were:
1 pradesa = 12 angulas
1 pada = 15 angulas
1 prakrama = 2 padas
1 purusha = 120 angulas
A *prakrama* would be about 0.8 metres.

5. In Vedic mythology, time was represented by the metaphor of a bird. The year was divided into six seasons, with the head of the bird being the *vasanta*, the body being both *hemanta* and *sisira*, the wings being *sarad* and *grishma* and the tail being *varsha*.

pequeño 24 *prakramas* en el este, con una altura de 36 *prakramas*.[4] La selección de estas dimensiones pudo haber sido dictada por una consideración calendárica: para reconciliar la discrepancia de los dos calendarios en uso —el lunar y el solar— eligiendo un año nominal de 360 días que es cuatro veces la suma de la dimensión anterior. En

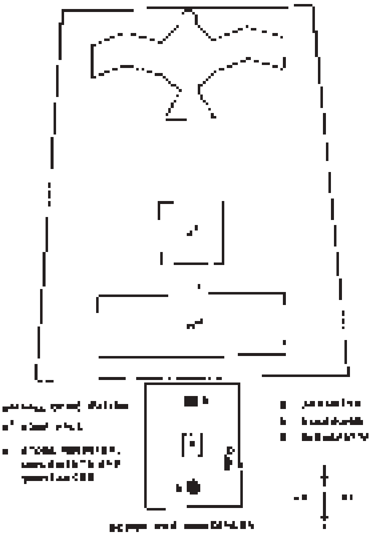

Figura 2

el *Mahavedi* había un altar de ladrillo con forma de halcón (*Vakrapaksa-syena*) que representaba el tiempo.[5] Los aspectos geométricos relacionados con la construcción de este altar serán discutidos más tarde en este artículo. Hubo otras construcciones contenidas en el *Mahavedi* con un significado

4 Las medidas usadas en el *Satapatha Brahmana* eran las mismas que en los *Sulbasutras*. Las unidades de medida más importantes fueron:
1 *pradesa* = 12 *angulas*
1 *pada* = 15 *angulas*
1 *prakrama* = 2 *padas*
1 *purusha* = 120 *angulas*
Una *prakrama* sería alrededor de 0.8 metros.

5. En la mitología védica el tiempo era representado metafóricamente por un pájaro. De ahí que el año estuviera dividido en seis estaciones, la cabeza del pájaro era el *vasanta*, el cuerpo era tanto *hemanta* como *sisira*, las alas eran *sarad* y *grishma*, y la cola era *varsha*.

ing little of mathematical interest. (ii) To the west of the *Mahavedi* was a smaller rectangular area called *Pracinavamsa* in which, in specified positions, were three fire altars called *Garhapatya* (of circular shape symbolising the earth), the *Dakshinagni* (of semi-circular shape representing space) and the *Ahavaniya* (a square representing the sky). In the *Sulbasutras*, there may have been the suggestion that the areas of the three fire altars were equivalent and equalled one square *purusha*.[6] The last of these fire altars (the sky altar) was a representation of the universe and included both space and earth. It was laid out in five layers, with the first representing the earth, the second being the joining of earth and space, the third the space, the fourth representing the joining of space and sky and the fifth the sky. The need to maintain equivalence of area and of shapes in the case of different altars raised a number of geometric problems, the solutions of which led to early Indian geometry.

The instructions for the design of the *Mahavedi* provides an insight into practical nature of the texts of the period. The *Apastamba Sulbasutra* [V.2] contains the following revised version of the original cryptic instruction:

> To a cord of length 36 *prakramas*, add 18 *prakramas*. Make two marks on the cord, one at 12 *prakramas* and the other at 15 *prakramas* from the western end. Tie the ends (of the cord) to pegs on the ends of the East-West (*prachi*) line of length 36 *prakramas*. Take the cord by the mark at 15 *prakramas* and stretch it to the south and mark the point with a peg. Do likewise to the north. These are respectively the south west and the north west corners of the *Mahavedi*. Now untie the ends of the cord from the East-West line and retie the end that was previously fastened to the peg on the east end to the west end and vice versa. Repeat the previous procedure but using the mark at 12 *prakramas* to obtain the south east and north east corners of the *Mahavedi*.

The augmented cord is 36 + 18 = 54 *prakramas*. From the other end, the 12th mark is half of the smaller parallel side while the 15th mark forms the base (*AB*) of a right-angled triangle (*ABC* in Figure 3), with its hypotenuse (*BC*) being the remainder of the chord (*i.e.*, 36 − 3 = 39 *prakramas*) and the other side being the East-West line (*AC*) which measures 36 *prakramas*.

6 Seidenberg [1983, 115-116] contains an interesting discussion of ambiguities in the Vedic texts relating to equivalences of area as well as the philosophical underpinnings of such a requirement.

funcional y ritual, pero de poco interés matemático; (ii) al oeste del *Mahavedi* había un área rectangular más pequeña llamada *Pracinavamsa* en la que se ubicaban tres altares de fuego en una posición especificada, el *Garhapatya* (de forma circular simbolizando la tierra), el *Dakshinagni* (de forma semicircular representando el espacio) y el *Ahavaniya* (un cuadrado representando el cielo). En los *Sulbasutras*, puede existir la sugerencia de que las áreas de los tres altares de fuego eran equivalentes e iguales a un cuadrado *purusha*.[6] El último de estos altares de fuego (el altar del cielo) era una representación del universo que incluía tanto el espacio como la tierra. Estaba dispuesto en cinco capas, con la primera representando la tierra; la segunda, la unión de la tierra y el espacio; la tercera, el espacio; la cuarta representa la unión del espacio y el cielo; y la quinta, el cielo. La necesidad de mantener la equivalencia de área y de formas en el caso de altares diferentes generó cierto número de problemas geométricos, la solución de los cuales condujo a la primera geometría hindú.

Las instrucciones para el diseño del *Mahavedi* dan una visión acerca de la naturaleza práctica de los textos del periodo. El *Apastamba Sulbasutra* [V 2] contiene la siguiente versión revisada de una instrucción secreta original:

> A una cuerda de treinta y seis *prakramas* de largo, agregarle dieciocho de ellas. Hacer dos marcas en la cuerda, una a las doce *prakramas* y otra a las quince en el extremo oeste. Amarrar los extremos (de la cuerda) a las estacas en los extremos de la línea este-oeste (*prsthya*) de longitud de treinta y seis *prakramas*. Tome la cuerda por la marca hecha a las quince *prakramas* y estírela hacia el sur y marque ese punto con una estaca. Haga del mismo modo al norte. Estas son las respectivas esquinas suroeste y noroeste del *Mahavedi*. Ahora desamarre los extremos de la cuerda de la línea este–oeste y vuelva a amarrar el final que fue previamente fijado a la estaca del extremo este al extremo oeste y viceversa. Repetir el procedimiento anterior, usando ahora la marca en doce *prakramas* para obtener las esquinas sureste y noreste del *Mahavedi*.

La cuerda aumentada mide 36 + 18 = 54 *prakramas*. Por otro lado, la marca 12 es la mitad del lado paralelo más pequeño, mientras que la 15 forma la base (*AB*) de un triángulo rectángulo (*ABC* en la Figura 3), siendo la hipotenusa (*BC*) lo que sobra de la cuerda (*i.e.*, 36 + 3 = 39 *prakramas*) y el otro lado la línea este–oeste (*AC*) que mide 36 *prakramas*.

---

6. Seidenberg [1983, 113-116] contiene una interesante discusión sobre la ambigüedad que hay en los textos védicos en relación a las equivalencias de área, así como el soporte filosófico de tales requerimientos.

Apastamba gives other *rational* right angled triangles which would satisfy the measurements required by the *Mahavedi*. These are the Pythagorean triples (3,4,5) multiplied by 4 or 5; (12,5,13) multiplied by 3, (15,8,17) and (12,35,37). All these are chosen to ensure that at least one of the sides have the length of one side of the *Mahavedi*. Apastamba also introduces a slight modification to the method of designing the *Mahavedi* which is suitable for any length of a given side.[7]

One of the most elaborate of the public altars (also found in the *Mahavedi* constructed for the *Agnicayana* ceremony) was shaped like a giant falcon just about to take flight shown in Figure 4a. It was believed that offering a sacrifice on such an altar would enable the soul of a supplicant to be conveyed directly by a falcon to heaven.

Most falcon-shaped altars were constructed with five layers of 200 bricks each which reached to the height of the knee.[8] For special occasions ten, fifteen, upto a maximum of ninety five layers of bricks were used in the construction of the falcon-shaped altar. The top layer of the basic altar (Figure 4b) had an area of 7.5 square *pu-*

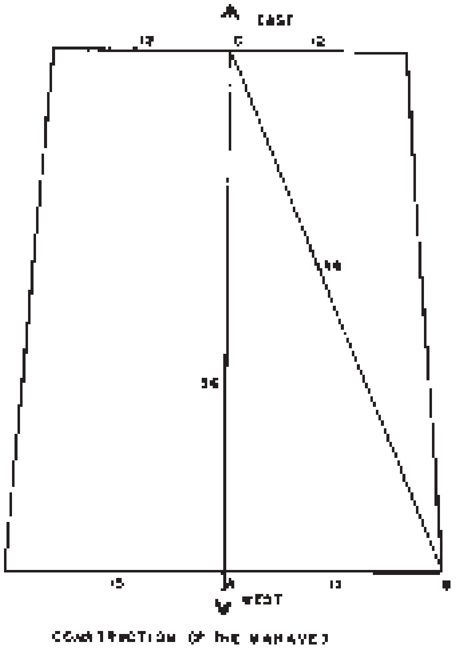

Figure 3

7. Apastamba's procedure may be interpreted as follows. Let the East-West line be x units in length. If the length of the cord is augmented to $x + x/12$, and the mark is at a distance of $5x/12$ and the other part of the cord is $13x/12$, then if the ends of the chords are tied to the ends of the East-West line, and the cord is stretched up to the mark, we get a right-angled triangle whose sides are x, $5x/12$ and $13x/12$. This relationship will hold for any integral value of x.

8. Two different types of bricks were used in altar construction. There were ordinary bricks (*lokamprnah*) and special (*yajushmati*) bricks each of which had been consecrated and marked for purpose of identification. In the case of both types of bricks, they varied according to different size and shapes.

Apastamba proporciona otros triángulos rectángulos, con lados *racionales*, los cuales satisfacerían las medidas requeridas por el *Mahavedi*, estos son las triadas pitagóricas (3, 4, 5) multiplicadas por 4 o 5, (12, 5, 13) multiplicadas por 3; (15, 8, 17) y (12, 35, 37). La elección se hace para asegurar que al menos uno de los lados tenga la longitud de uno de los lados del *Mahavedi*. También introduce una modificación ligera al método de diseño del *Mahavedi*, apropiado para cualquier longitud de un lado dado.[7]

Uno de los altares públicos más elaborados (también encontrado en la construcción del *Mahavedi* para la ceremonia *Agnicayana*) tenía la forma de un halcón gigante justo a punto de tomar vuelo mostrado en la Figura 4a. Se creía que ofreciendo un sacrificio en dicho altar permitiría que el alma del suplicante fuera transportada directamente por el halcón al cielo.

La mayoría de los altares–halcón fueron construidos con cinco capas de doscientos ladrillos, cada una de las cuales alcanzaba la altura de la rodilla.[8] Para ocasiones especiales se usaron diez, quince, hasta un máximo de noventa y cinco capas. La superficie superior del altar básico (Figura 4b) tenía una área de 7.5 *purushas*

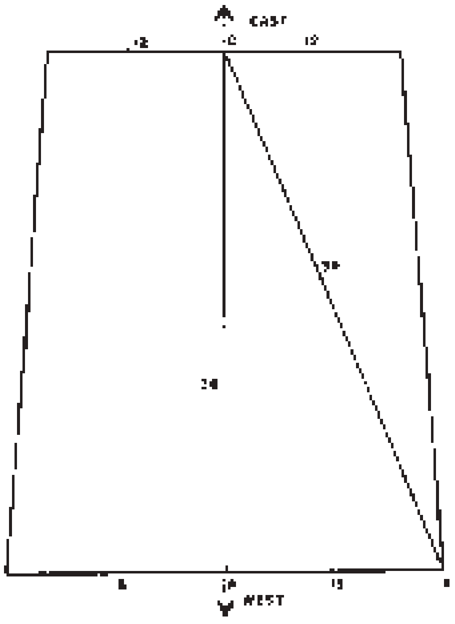

Figura 3

7. El procedimiento de Apastamba puede interpretarse como sigue. Sea la línea este-oeste igual a x unidades de largo. Si el largo de la cuerda es aumentado a $x + x/12$, la marca está a una distancia de $5x/12$ y la otra parte de la cuerda es $13x/12$, entonces si los extremos de las cuerdas se amarran a los extremos de la línea este–oeste, y se estira la cuerda hasta la marca, obtenemos un triángulo rectángulo cuyos lados son x, $5x/12$ y $13x/12$. Esta relación es válida para cualquier valor entero de x.
8. Dos tipos diferentes de ladrillos fueron usados en la construcción del altar. Eran ordinarios (*lokamprina*) o especiales (*yajushmati*), estos últimos consagrados y marcados a fin de identificarlos posteriormente. Los dos tipos de ladrillos variaban de acuerdo a los diferentes tamaños y formas.

rushas.[9] A *purusha* was defined as the height of a man with his arms stretched above him, say 2.5 metres, which would give the altar an area measure of approximately 47 square metres. For the second layer from the top, the prescription was that one square *purusha* should be added, so that the total area of would be 8.5 square *purushas*.[10] Similarly, each successive layer area should be augmented by 1 square *purusha*, until with the 94th successive

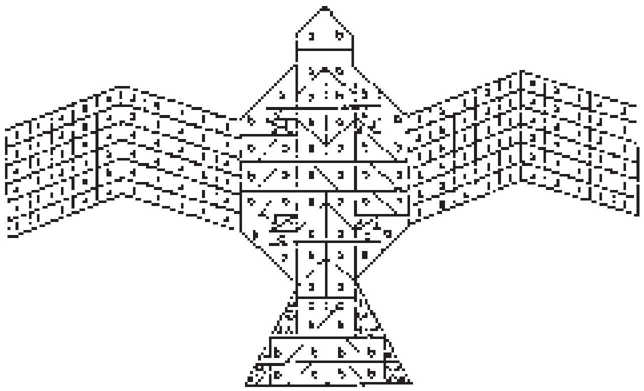

Figure 4a

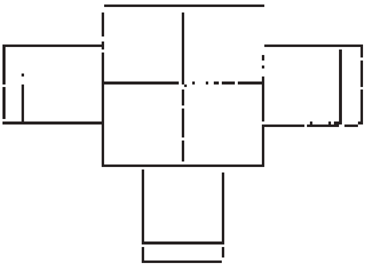

Figure 4b

9. Apart from minor variations, the body of the first layer falcon-shaped altar was four square *purushas*. The wings and tail were one square *purusha* each plus the wing increased by 1/5 of a square *purusha* each and the tail by 1/10 of a square *purusha* so that the image would more closely approximate the shape of a falcon. Thus the total area of the top layer of *Vakrapaksha-syena* altar is 4 + (2 × 1.2) + 1.1 = 7.5 square *purusha*.
10. In *Katyayana Sulbasutra* [5.4] appears the following instruction:

    For the purpose of adding a square *purusha* (to the original falcon-shaped altar), construct a square equivalent to the original altar together with the wings and tail, add to it a square of one *purusha*. Divide the sum [illegible] the resulting square cuadradas.[9] La *purusha* se definió como la altura de un hombre con los brazos estirados hacia arriba, digamos unos 2.5 metros, que le daría al altar una medida de área aproximada de cuarenta y siete metros cuadrados. En la siguiente capa, en orden descendente, la prescripción era agregar una *purusha* cuadrada, de tal manera que el área total fuera de 8.5 *purushas* cuadradas.[10] Similarmente, cada capa sucesiva debe aumentarse de una en una hasta noventa y cuatro veces. El área de

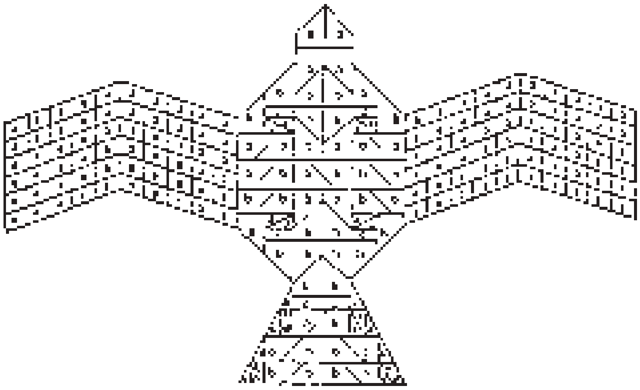

Figura 4a

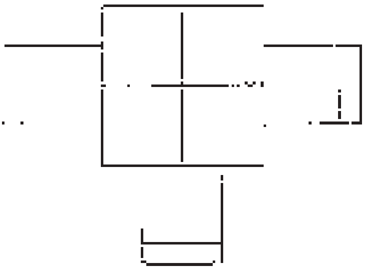

Figura 4b

---

9 Sin tener en cuenta variantes menores, el cuerpo de la primera capa del altar-halcón fue de cuatro *purushas* cuadradas. Las alas y la cola medían una *purusha* cuadrada, respectivamente. Aumentando las alas en 1/5 de una *purusha* cuadrada cada una y la cola en 1/10 de un *purusha* cuadrada, de tal forma que la imagen se aproximara más a la forma de un halcón. Por consiguiente, el área total de la capa superior del altar *Pak-sapaksa-syena* es: 4 + 2 × 1.2 + 1.1 = 7.5 *purushas* cuadradas.

10 En *Katyayana Sulbasutra* [5.4] aparecen las siguientes instrucciones:

> En caso de querer agregar una *purusha* cuadrada (al altar-halcón original), construir un cuadrado equivalente al *átman* (original) junto con sus alas y cola, adicionarle un cuadrado que mida una *purusha*. Dividir la suma (i.e., el cuadrado

increase of 1 square *purusha*, the area of the base of this huge construction would be 101.5 square *purushas*.[11]

It is clear that if in the construction of larger altars they had to conform to certain basic shapes and prescribed areas or perimeters, two geometrical problems would soon arise: (i) the problem of finding a square equal in area to two or more given squares (ii) the problem of converting other shapes (for example, a circle or a trapezium or a rectangle) into a square of equal area or vice versa. The constructions were achieved through a judicious combination of concrete geometry (the principle of dissection and reassembly)[12], ingenious algorithms and application of the so-called Pythagorean theorem.

In the *Katyayana Sulbasutra* (named after one of the authors) appears the following proposition:

> The cord (stretched along the length) of the diagonal of a rectangle makes an (area) which the vertical and horizontal sides make together (2.11)

---

into fifteen parts and combine two of these into a square. This will be the (new) unit of square *purusha* (for the construction of the enlarged figure)

11 The instructions given in *Sathapatha Brahmana* (X.2.3.11-14) for constructing a falcon-shaped altar consisting of 95 layers of bricks may be interpreted as follows.
Area of the body (*atman*) = 56 + (12/7)(56);
Area of two wings = 2(14) + (3/7)(14) + (1/5)(1/7)(3)(14);
Area of tail = 14 + (3/7)(14) + (1/10)(1/7)(3)(14).
The total area is about 116 square *purushas*, which is an over-estimate of the required 101.5 square *purushas*, arising in part from a rounding off error resulting from taking 14 rather 13 + 8/15. *Baudhayana Sulbasutra* contains an explanation of how the last number is obtained. Expressed in modern notation: Let the new unit after the *m*th augmentation be x. Then, $x^2 = 1 + (2m/15)$ where m runs from 1 to 94.
For $m = 94$, $x^2 = 13 + 8/15$.
So that 14, the estimate used, is a rounding up of this number. The use of this more accurate figure gives the calculated total area as 130 square *purushas*.

12. The essence of this method involves two commonsense assumptions.
(i) Both the area of a plane figure and the volume of a solid remain the same under rigid translation to another place.
(ii) If a plane figure or solid is cut into several sections, the sum of the areas or volumes of the sections is equal to the area or volume of the original figure or solid.
The reasoning behind this approach was very different from that behind Euclidean geometry, but the method was often just as effective, as shown in the Indian (and Chinese) 'proofs' of the Pythagorean theorem discussed in Joseph [1992 & 1994].

la base de ésta enorme construcción que sería de 101.5 *purushas* cuadradas.[11]

Resulta claro que si en la construcción de altares grandes se tenían que ajustar a ciertas formas básicas, áreas y perímetros prescritos, surgirían pronto dos problemas geométricos: (i) encontrar un cuadrado de área igual a dos o más cuadrados dados; y (ii) convertir otras formas (por ejemplo, un círculo o un trapecio o un rectángulo) en un cuadrado de área igual o viceversa. Éstas construcciones se lograron a través de una atinada combinación de geometría definida (el principio de disección y reagrupación),[12] algoritmos ingeniosos y aplicaciones del llamado teorema de Pitágoras.

En el *Katyayana Sulbasutra* (llamado así en memoria de uno de los autores) aparece la siguiente proposición:

> La cuerda (estirada a lo largo de la longitud) de la diagonal de un rectángulo genera una (área) igual a la que hacen los lados vertical y horizontal juntos [2.11].

---

resultante) en quince partes y combinar dos de éstas en un cuadrado. Ésta será la (nueva) unidad equivalente a una *purusha* cuadrada (para la construcción de una figura alargada).

11. Las instrucciones dadas en el *Sathapatha Brahmana* [X.2.3.11-14] para la construcción de un altar-halcón de noventa y cinco capas se interpreta como sigue:
Área del cuerpo (atman) = 56 + (12/7)(56);
Área de las dos alas = 2(14) + (3/7)(14) + (1/5)(1/7)(3)(14);
Área de la cola = 14 + (3/7)(14) + (1/10)(1/7)(3)(14).
El área total es de alrededor de 116 *purushas* cuadradas, que es una sobrestimación de las 101.5 requeridas; esto es debido, en parte, a un error de redondeo resultante de tomar 14 en lugar de 13 + 8/15. El *Baudhayana Sulbasutra* contiene una explicación de cómo se obtuvo el último número. Expresado en notación moderna: Sea x la nueva unidad después de el m-ésimo aumento. Entonces $x^2 = 1 + (2m/15)$ cuando m corre de 1 al 94.
Para $m = 94$, $x^2 = 13 + 8/15$.
De tal manera que 14, la estimación usada, es un redondeo de este número. El uso de estas figuras más exactas da el área total calculada como 110 *purushas* cuadradas.

12. La esencia de estos métodos involucra dos supuestos de sentido común: (i) tanto el área de una figura plana como el volumen de un sólido permanecen igual bajo traslaciones precisas a otro lugar, (ii) si una figura plana o sólido se corta en varias secciones, las sumas de las áreas o volúmenes de estas secciones es igual al área o al volumen de la figura o sólido original.
El razonamiento detrás de esta proposición fue muy diferente de aquel detrás de la geometría euclidiana, pero este método fue igualmente efectivo, como se muestra en las 'pruebas' hindúes (y chinas) del teorema pitagórico discutido en Joseph [1992 y 1994].

Using this version of the Pythagorean theorem, the *Sulbasutras* show how to construct both a square equal to the sum of two given squares and a square equal to the difference of two given squares. Further constructions include the transformation of a rectangle (square) to a square (rectangle) of equal area and of square (circle) to a circle (square) of approximately equal area. The constructions 'doubling the square' and 'squaring the circle' lead naturally to the devising of algorithms for the square root of 2 and other numbers, for implicit estimates of π and for constructing similar figures in required proportions of a given figure.[13]

Another problem that led to some interesting mathematics related to ensuring the precise distance and relative positions of the three fire altars, *Garhapatya, Dakshinagni and Ahavaniya* contained in the *Prace-tuvams* given in Figure 2. The general requirement was: *Dakshinagni* should lie south of the line joining the other two fire altars and be at a distance from *Garhapatya* of one third the distance between the other two fire altars.

The *Baudhayana Sulbasutra* (*BSS*) contains three different versions of solving the same problem. To quote the relevant passages given in Datta [1932, 203-205], with modifications for sake of clarity:

> (1) With the third part of the length (i.e., the distance between *Garhapatya* (*G*) and *Ahavaniya* (*A*)) describe three squares closely following one another (from west towards the east): *Garhapatya* is located at the north-western corner of the western square, *Dakshinagni* (*D*) is at its south-eastern corner; and *Ahavaniya* at the north-eastern corner of the eastern square [*BSS*, 1.67].
> (2) Divide the distance between the *Garhapatya* and *Ahavaniya* into five or six (equal) parts; add (to it) a sixth or seventh part. Divide (a cord as long as) the whole increased length into three parts and mark the end of the two parts from the eastern end (of the cord). Fasten the two ends of the cord (to two) pegs at either end of the distance between the *Garhapatya* and *Ahavaniya*, stretch it towards the south, having taken it to the mark and fix a peg at the point reached. This is the position of the *Dakshinagni* [*BSS*, 1.68].
> (3) Increase the measure (between the *Garhapatya* and *Ahavaniya*) by a fifth; divide (a cord of that length) into five parts and make a mark at the end of two parts from the western end (of the cord) after fastening the two ends to the east-west line. Stretch the cord towards the south having taken it to the mark and fix a peg at the point reached. This is the position of the *Dakshinagni* [*BSS*, 1.69].

13. For a discussion of these constructions and the mathematics underlying them, see Joseph [1992, 228-236; 1991, 6-11; 1994, 184-189; 1996, 93-113].

Usando esta versión del teorema de Pitágoras, los *Sulbasutras* muestran cómo construir un cuadrado igual a la suma de dos cuadrados dados, así como un cuadrado igual a la diferencia de dos cuadrados dados. Construcciones posteriores incluyen la transformación de un rectángulo en un cuadrado con área igual y viceversa, así como la de un cuadrado en círculo o a la inversa, también con la misma área. Estas construcciones que 'doblan al cuadrado' y 'cuadran al círculo' naturalmente conducen a la proyección de algoritmos para la raíz cuadrada de 2 y de otros números, para la estimación implícita de π, y para la elaboración de figuras similares con proporciones requeridas a partir de una figura dada.[13]

Otro problema que involucra algún interés matemático es el relacionado con la necesidad de asegurar la distancia precisa y las posiciones relativas de los tres altares de fuego: *Garhapatya*, *Dakshinagni* y *Ahavaniya*, contenidos en el *Pracinavams* dado en la Figura 2. La instrucción general fue: *Dakshinagni* debe descansar al sur de la línea juntando los otros dos altares de fuego y estar a una distancia de *Garhapatya* de un tercio de la distancia entre los otros dos altares de fuego.

El *Sulbasutra Baudhyana* (*BSS*) contiene tres versiones diferentes para resolver el mismo problema. Se cita el pasaje relevante dado en Datta [1932, 203-205] con algunas modificaciones que lo aclaran.

> (1) Con la tercera parte de la longitud (*i.e.*, la distancia entre *Garhapatya* (*G*) y *Ahavaniya* (*A*)) se describen tres cuadrados cercanos entre sí (de oeste a este). *Garhapatya* se localiza en la esquina noroeste del cuadrado oeste; *Dakshinagni* (*D*) se sitúa en la sureste; y *Ahavaniya* en la esquina noreste del cuadrado este [*BSS* 1.67].
> (2) Dividir la distancia entre el *Garhapatya* y el *Ahavaniya* en cinco o seis partes (iguales); agregar (a ésta) una sexta o séptima parte; dividir (una cuerda tan larga como) todo la longitud aumentada ya en tres partes y marcar el final de las dos partes del extremo este (de la cuerda). Sujetar los dos extremos de la cuerda (a dos) estacas en cualquier extremo de la distancia entre el *Garhapatya* y *Ahavaniya*, estirar hacia el sur, tomándola de la marca y fijar una estaca en el punto alcanzado. Esta es la posición del *Dakshinagni* [*BSS*, 1.68].
> (3) Incrementar la medida (entre el *Garhapatya* y el *Ahavaniya*) en un quinto; dividir (la cuerda de esa longitud) en cinco partes y hacer una marca al final de dos partes del extremo oeste (de la cuerda) después de fijar los dos extremos a la línea este-oeste. Estire la cuerda hacia el sur tomándolo en la marca y asegurarlo a una estaca en el punto alcanzado. Esta es la posición del *Dakshinagni* [*BSS*, 1.69].

13. Para la discusión de estas construcciones y las matemáticas implícitas en ellas, ver Joseph [1992, 228-236, 1995, 6-11, 1994, 184-189, 1996, 97-113].

Datta [1932, 203-205] proceeds to use these instructions to construct Figure 5 and obtain various estimates of the relative distances between the fire-altars implied by (1) - (3). Thus, given $AG = x$, it can easily shown that,

$AD = \sqrt{5}(x/3)$ and $GD = \sqrt{2}(x/3)$ from (1)

$AD = (7/9)x$ or $(16/21)x$ and $GD = (7/18)x$ or $(8/21)x$ from (2)

$AD = (18/25)x$ and $GD = (12/25)x$ from (3)

And if one assumes that the relative positions of all three fire-altars are the same irrespective of the rule used, then the following estimates for $\sqrt{5}$ and $\sqrt{2}$ may be inferred:

$$\sqrt{5} = 2.333,\ 2.285,\ 2.16$$
$$\sqrt{2} = 1.166,\ 1.143,\ 1.44$$

None of these estimates are accurate approximations, the best being only correct to the first place of decimals. These rules were essentially practical 'rules of the thumb' that an early surveyor may use, without mathematical considerations being predominant. However, this did not mean that considerations of accuracy did not occur in early Indian geometry. For example, to calculate the square root of 2, the following instructions are given both by Apastamba [1.6] and Katyayana [2.13] who came after Baudhayana: "Increase the measure by its third and this third by its own fourth

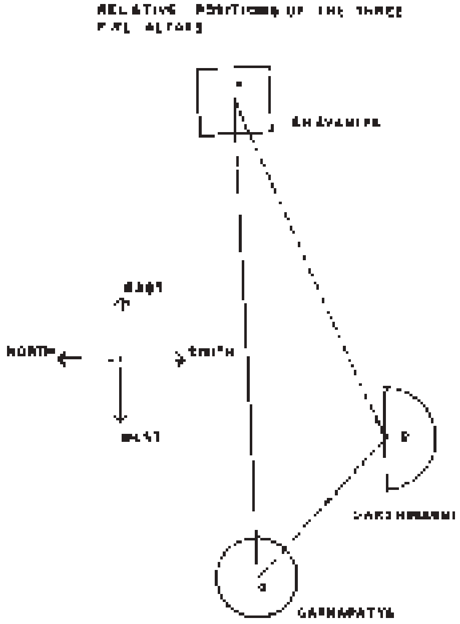

Figure 5

Datta [1932, 203-205] usó estas instrucciones para construir la Figura 5 y así obtener varias estimaciones de las distancias relativas entre los altares de fuego implícitas en (1) - (3). Por consiguiente, dado $AG = x$, se puede mostrar fácilmente que:

$AD = \sqrt{5}(x/3)$ y $GD = \sqrt{2}(x/3)$ de (1)
$AD = (7/9)x$ o $(16/21)x$ y $GD = (7/18)x$ o $(8/21)x$ de (2)
$AD = (18/25)x$ y $GD = (12/25)x$ de (3)

Y si uno asume que las posiciones relativas de los tres altares de fuego son las mismas independientemente de la regla usada, entonces pueden inferirse las siguientes estimaciones para $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{5} = 2.333,\ 2.285,\ 2.16$$
$$\sqrt{2} = 1.166,\ 1.143,\ 1.44$$

Ninguna de éstas son aproximaciones exactas, la mejor es correcta sólo en el primer lugar de los decimales. Estas reglas fueron esencialmente estimaciones prácticas 'extremadamente burdas' que se usaron en mediciones tempranas, sin que ninguna consideración matemática fuera predominante. No obstante, esto no significa que no se tuviera en consideración la precisión en la antigua geometría hindú. Por ejemplo, Apastamba [1.6] y Katyayana [2.13], quienes vinieron después de Baudhyana, dieron las instrucciones siguientes para calcular la raíz cuadrada de 2. "Aumentar la medida en un tercio, y éste

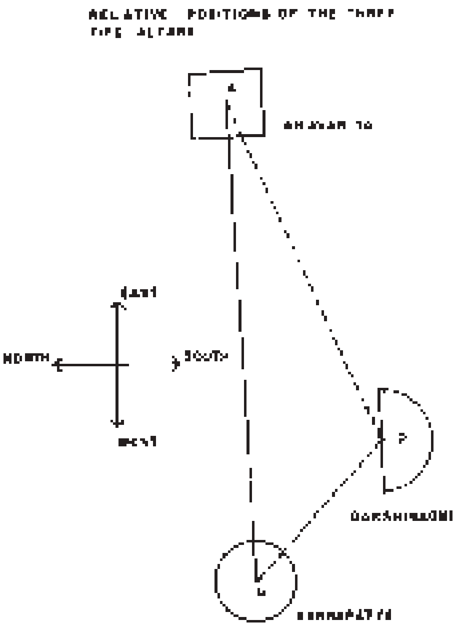

Figura 5

less the thirty-fourth part of that fourth. This is the value of a special quantity in excess (which needs to be deducted)".

If we take 1 unit as the dimension of the side of a square, the above formula gives the approximate length of its diagonal as:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 34} = 1.4142156..$$

The true value is 1.414213....

The *Sulbasutras* contain no clue as to the manner in which this accurate approximation was arrived at. A number of theories or explanations have been proposed. Of these, the most plausible one is that of Datta [1932], based on the 'dissection and reassembly' principle mentioned earlier and discussed in Joseph [1992, 234-236].

Apart from equivalence through area, the Vedic texts contain equivalences established between phenomena through numbers. The starting point is the centrality of the number 360 in the Vedic calendar and philosophy. Parallels were drawn between human anatomy and planetary motions. Thus, the *Caraka Samhita*, an early medical text, counts the total number of *asthis* (or bones, teeth, nails, hard cartilages) in the human body to be 360, obtained from considering the 308 bones of the new born babe (before they fuse into a smaller number of 206 in the adult), 32 teeth and 20 nails where each of these *asthis* are associated with each day of the year. The parallel between the nominal year (360 days) and man (*purusha*) is carried further in *Sathapata Brahmana* where the basic falcon-shaped altar of 7.5 square *purushas* or 108,000 square *angulas* (1 *purusha* = 120 *angulas*) is linked to 10 nominal years or 108,000 *muhurtas* (1 *muhurta* = 48 minutes).[14] It is interesting in this context that a total of 10,800 ordinary (*lokamprina*) bricks were used in the construction of the three fire altars found in the *Pracinavamsa* which is the same as the number of *muhurtas* in a nominal year. A number of other parallels based on the equivalence of numbers is found the Vedic literature of the period.[15]

14 Various rituals required the day-time and night-time to be divided into two, three, four, five and fifteen equal parts. In the fifteen-fold division, each part was a *muhurta* which would be equivalent to 1/15 th of 12 x 60 or 48 minutes.

15 For further examples, see Kak [1993] from which examples of equivalences quoted in this paper are taken.

por su propio cuarto menos la trigesimocuarta parte de ese cuarto. Este es el valor de una cantidad especial que sobra (la cual necesita deducirse)[13].

Si nosotros tomamos una unidad como la dimensión del lado de un cuadrado, la fórmula anterior da la longitud aproximada de su diagonal como:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 34} = 1.4142156\ldots$$

El valor verdadero es 1.414213...

Los *Sulbasutras* no dan claves sobre la forma en que se llegó a esta aproximación. Un cierto número de explicaciones y teorías se han propuesto. De éstas, la más plausible es la de Datta [1932], basada en la 'disección y reagrupación', principio ya mencionado anteriormente y discutido en Joseph [1992, 234-236].

Aparte de las equivalencias en áreas, los textos védicos contienen equivalencias establecidas entre fenómenos comunes en los números. El punto inicial es la centralidad del número 360 en el calendario y la filosofía védica: se trazaron paralelos entre la anatomía humana y los movimientos planetarios. De ahí que el *Caraka Samhita*, un texto médico antiguo, cuente que el número total de *asthis* (huesos, dientes, uñas y cartílagos duros) en el cuerpo humano son 360, obtenido de considerar los 308 huesos de un recién nacido (antes de que éstos se fusionen a un número menor de 206 en el adulto), 32 dientes y 20 uñas donde cada uno de estos *asthis* están asociados a cada día del año. El paralelo entre el año nominal (360 días) y el hombre (*purusha*) es llevado más allá en el *Sathapata Brahmana*, donde el altar-halcón básico es de 7.5 *purushas* cuadradas o 108.000 *angulas* cuadradas (1 *purusha* = 120 *angulas*) y está ligado a diez años nominales o 108.000 *muhurtas* (1 *muhurta* = 48 minutos).[14] Es interesante notar que en este contexto un total de 10.800 ladrillos ordinarios (*lokamprina*) se usaran en la construcción de los tres altares de fuego encontrados en el *Pracinavamsa*, cuyo número es el mismo que el número de *muhurtas* en un año normal. Otros paralelos basados en la equivalencia de los números se hallaron en la literatura védica del periodo.[15]

---

14 Varios rituales requerían dividir los tiempos de duración del día y de la noche en dos, tres, cuatro, cinco y quince partes iguales. En la decimoquinta división, cada parte era un *muhurta* que equivale a 1/15 de 12 × 60 o 48 minutos.

15 Para [illegible] ejemplos ver Kak [1993], de donde se tomaron los ejemplos de equivalencia citados en este artículo.

Kak [1993] has argued that the concept of equivalence is of central importance in interpreting Vedic astronomical knowledge. So that in the design of altars, an astronomical code was present which required to be deciphered. For example, the circular *Garhapatya* fire altar which symbolized earth or the womb was constructed with 21 ordinary bricks and had an area of 1 square *purusha*.[16] If the basic falcon-shaped altar having an area of 7.5 square *purusha* corresponded to 360 days, then 1 square *purusha* would be equivalent to 48 days. The augmentation of the basic falcon-shaped altar by one square *purusha* at a time was to be seen as a correction to make the altar correspond closer to an actual year (366 days or 372 *tithis* or lunar days). A *nakshatra* year was taken as the number of *nakshatras* (27) multiplied by the number of months (12) which would give 324 days (or *tithis*). An additional 48 *tithis* as a correction was needed to get an actual year. However, this would mean an excess of 0.93761 *tithi* every year since the number of *tithis* in a solar year is 371.06239. So by constructing a falcon-shaped altar of 95 layers symbolising a 95 year cycle, with each augmentation being 1 square *purusha* (or 48 *tithis*), starting from 7.5 square *purushas* to 101.5 square *purushas* at the end of that cycle, the practice of a major adjustment every 95 years to the calendar by 90 *tithis* (or 3 lunar months) made sense. Such a correction implied that the length of the solar year is: 372 - (90/95) = 371.05263 *tithis* which corresponds to 365.24675 days. Compare this value to the present-day estimate for the tropical year of 365.24236 days, and we are struck by the accuracy of estimates which are at least three thousand years old.

With similar ingenuity, Kak proceeds to unravel the astronomical codes contained in the Vedic texts, notably in the *Rigveda* and *Satapatha Brahmana*. The distances of the moon and the sun from the earth were expressed as 108 times the diameters of these heavenly bodies respectively. The values obtained today from using modern instruments are 110.6 for the moon and 107.6 for the sun respectively.

16 The choice of 21 is symbolic. It is the sum of 12 months, 5 seasons, 3 worlds and the sun, or the three sets of *Rishis* (or planets); or the sum of five elements (earth, water, fire, air, space), five breaths (*prana, apana, vyana, udana, samana*), five organs of cognition (*jnanendriyas*), five organs of action (*karmendriyas*) and the inner self (*antahkarana*).

Kak [1993] argumenta que el concepto de equivalencia es de una importancia vital en la interpretación del conocimiento astronómico védico. Así pues, en el diseño de altares, estaba presente un código astronómico que requería ser descifrado. Por ejemplo, el altar de fuego circular, *Garhapatya*, que simbolizaba la tierra o el útero materno, se construyó con veintiún ladrillos ordinarios y tenía un área de una *purusha* cuadrada.[16] Si el altar-halcón tiene una área de 7.5 *purushas* cuadradas correspondientes a 360 días, entonces 1 *purusha* cuadrada sería equivalente a 48 días. El aumento de este altar en una *purusha* cuadrada era visto en ese tiempo como una corrección para hacer que el altar se pareciera más a un año actual (366 días o 372 *tithis* o días lunares). Un año *nakshatra* era tomado como el número de *nakshatras* (27) multiplicado por el número de meses (12) que daría 324 días (o *tithis*). Se necesitaba una cantidad adicional de 48 *tithis* como corrección para obtener un año actual. Sin embargo, esto significaría tener un exceso de 0.93761 *tithis* cada año, ya que el número de ellos en un año solar es de 371.06239. De ahí que, mediante la construcción de un altar-halcón de noventa y tres capas se simbolizaba un ciclo de noventa y cinco años, con cada aumento de 1 *purusha* cuadrada (48 *tithis*), empezando de 7.5 a 101.5 *purushas* cuadradas al final de ese ciclo, la práctica de un ajuste principal cada noventa y cinco años al calendario con la suma de noventa *tithis* (tres meses lunares) tenía sentido. Tal corrección implicaba que la duración del año solar es: 372 - (90/95) = 371.05263 *tithis* que corresponden a 365.24675 días. Comparando este valor con la estimación actual del año tropical de 365.25636 días, impacta la precisión de este cálculo que tiene una antigüedad de al menos tres mil años.

Con ingenio similar, Kak procede a desenredar los códigos astronómicos contenidos en los textos védicos, principalmente en el *Rigveda* y en los *Satapatha Brahmana*. Las distancias de la tierra a la luna y al sol fueron expresadas como ciento ocho veces el diámetro de cada uno de estos cuerpos celestes respectivamente. Los valores obtenidos ahora usando instrumentos modernos son 110.6 para la luna y 107.6 para el sol

16 La elección de 21 es simbólica. Es la suma de doce meses, cinco estaciones, tres mundos y el sol; o los tres conjuntos de *Kuhns* (o planetas) o la suma de cinco elementos (tierra, agua, fuego, aire, espacio), cinco soplos (*prana, apana, vyana, udana, samana*), cinco órganos del conocimiento (*jnanendriyas*), cinco órganos de acción (*karmendriyas*) y el oído interno (*antahkarana*).

Conclusion: restoring historical continuity

There is a view that Indian mathematics originated in the service of religion. The proponents of this view have sought their main support in the complexity of motives behind the recording of the *Sulbasutras*. Since time immemorial, they argue, the needs of religion have determined not only the character of Indian social and political institutions, but also the development of her scientific knowledge. Astronomy was developed to help determine the auspicious day and hour for performing sacrifices. The forty-nine verses of *Jyotisutras* (the *Vedanga* containing astronomical information) gave procedures for calculating the time and position of the Sun and Moon in various *nakshatras* (signs of the zodiac). Also, a strong reason in Vedic India for the study of phonetics and grammar was to ensure perfect accuracy in pronouncing every syllable in a prayer or sacrificial chant. And the construction of altars and the location of sacred fires, as we have seen, had to conform to clearly laid-down instructions about their shapes and areas if they were to be effective instruments of sacrifice.

However, there is a danger that the magico-religious beliefs surrounding the Vedic rituals may be overly emphasized when considering the origins of Indian mathematics. We have seen the crucial role played by the *Agnicayana* ceremony in generating geometrical concepts and techniques found in the *Sulbasutras*. The rituals associated with the construction of fire altars may be looked at from two standpoints. The first is from the standpoint of the beliefs connecting the shapes of altars with the specific desires to be fulfilled by their use in the sacrifices. The second is that of technology pure and simple: How exactly to construct the altars with specific shapes, specified size and by using a specific numbers of bricks, or how to vary their shapes without affecting their size or area.

It is clear that the geometry originating in the *Sulbasutras* had nothing to do with the first standpoint. Thus, for example, whether a falcon-shaped altar ensures for the sacrificer heaven or the annihilation of enemies is totally irrelevant to the problem of constructing it to conform to certain size and shape. As a matter of fact these problems would remain the same if somebody wanted that structure in the garden for ornamental purposes. In other words, the geometry developed in the *Sulbasutras* was required exclusively for solving the technological problems involved in constructing brick-structures.

Conclusión: Reestableciendo la continuidad histórica

Hay un punto de vista de que las matemáticas en la India se originaron al servicio de la religión. Los defensores de esta visión han buscado su principal apoyo en la complejidad de los motivos detrás del registro de los *Sulbasutras*. Desde tiempos inmemoriables argumentan la necesidad de la religión para determinar no sólo el carácter de la sociedad e instituciones políticas hindúes, sino también el desarrollo de su conocimiento científico. La astronomía se desarrolló para ayudar a determinar el día y la hora favorables para la ejecución de sacrificios. Los cuarenta y nueve versos del *Jyotisutras* (el *Vedanga* contiene información astronómica) proporcionan los procedimientos para calcular el tiempo y la posición del sol y la luna en varios *nakshatras* (signos del zodiaco). Asimismo, una fuerte razón, en la India védica, para el estudio de la fonética y gramática fue asegurar una perfecta precisión en la pronunciación de cada sílaba en una plegaria o en cantos de sacrificio. La construcción de altares y la localización de fuegos sagrados, como se ha visto, tenían que ser de acuerdo a instrucciones claramente establecidas acerca de sus formas y áreas para ser instrumentos efectivos de sacrificio.

No obstante, existe el peligro de que las creencias mágico-religiosas que rodeaban los rituales védicos puedan ser excesivamente enfatizadas cuando se consideran los orígenes de las matemáticas hindúes. Se ha visto el crucial papel jugado por la ceremonia *Agnicayana* en la generación de conceptos geométricos y hallazgos técnicos en los *Sulbasutras*. Los rituales asociados con la construcción de altares de fuego pueden observarse desde dos perspectivas. La primera conecta las creencias que unen las formas de los altares con el cumplimiento de los deseos específicos en cada sacrificio. La segunda es tecnología pura y simple: cómo construir exactamente los altares con formas y tamaños específicos, con un número determinado de ladrillos; o cómo variar sus formas sin afectar su tamaño o área.

Es claro que la geometría originada en los *Sulbasutras* no tuvo que ver con el primer punto de vista. De este modo, por ejemplo, si un altar-halcón asegura para el ofrendante el cielo o la aniquilación de los enemigos, es totalmente irrelevante para el problema de su construcción acerca cierta forma y tamaño. De hecho, estos problemas permanecerían iguales si alguien quisiera esa estructura en el jardín para propósitos ornamentales. En otras palabras, la geometría desarrollada en los *Sulbasutras* se requirió exclusivamente para resolver los problemas tecnológicos envueltos en la construcción de estructuras de ladrillos.

And it is this geometry that should be of interest to the historian of mathematics.[17]

Once the *Sulbasutras* are seen as manuals for technicians, the question then arises where and when were the practical knowledge relating to bricks and brick technology acquired? Now references to bricks are conspicuous by their absence from the most sacred and earliest of Vedic literature, the *Rigveda Samhita*. When they do make an appearance in a recension (*Taittiriya Samhita*) of a later *Veda*, the *Yajurveda Samhita*, bricks are viewed as marvellous and mysterious entities.[18]

In the same text, there are exhortations that 'tiles or post-herds' from the ruined Harappa cities should be gathered for ritual purposes. It is, therefore, likely that the priests were acquainted with the burnt bricks from the same sites and would in course of time invest them with magico-religious properties.

In one of the last recensions to *Yajurveda* appears the *Satapatha Brahmana* and in which, as mentioned earlier, there is a discussion of the conducting of *Agnicayana*. The magico-religious elements of this ritual is accompanied by a short discourse on the construction of brick altars of various shapes and sizes. While the discussion lacks the geometrical sophistication of the *Sulbasutras*, it is clear that knowledge of brick technology which was abundantly evident in the Harappa culture was slowly percolating into the Vedic rituals to become the most critical element of Vedic constructions. Staal's [1978] conclusion is particularly apposite:

> If we wish to understand more, we have to go beyond the texts and place the *Agnicayana* in a wider historical perspective. The techniques for fir-

---

17. There are indications in the texts that the authors of the *Sulbasutras* were aware of this distinction, for often one comes across expressions, 'Thus we are told', 'Such are our instructions', etc. The implication is that these instructions (say, on the sacrificial efficacy of different shaped altars or the astronomical dates to be adhered to) are not particularly relevant to the main purposes of the texts. These instructions are simply taken for granted, while the texts themselves pay exclusive attention to the technique of executing them. In fact, the texts are good exemplars of how exact science may grow directly out of applications.
18. Consider the following passage from the *Taittiriya Samhita* [iv.4.11]:

    May these bricks, O *Agni*, be milch cows for me: one, and a thousand, and a million, and ten million, and a hundred million, and a thousand million, and ten thousand million [...]; may these bricks, O *Agni*, be for me milkers of desires named the glorious yonder in yon world.

Y es esta geometría la que debe ser de interés para los historiadores de las matemáticas.[17]

Una vez que los *Sulbasutras* son vistos como manuales para técnicos surge entonces la pregunta: ¿dónde y cuándo se adquirió el conocimiento práctico relacionado con los ladrillos y su tecnología? Por ahora las referencias a ellos son conspicuas por su ausencia en la más sagrada y antigua literatura védica, el *Rigveda Samhita*. Cuando ellos hacen su aparición en una recensión (*Taittiriya Samhita*) del último de los *vedas*, el *Yajurveda Samhita*, los ladrillos son vistos como entidades maravillosas y misteriosas.[18]

En el mismo texto, hay exhortaciones para que las "tejas o guías" de las ciudades harappianas en ruinas fueran recogidas con propósitos rituales. Por consiguiente, es probable que los sacerdotes estuvieran familiarizados con los ladrillos cocidos de los mismos lugares y con el curso del tiempo los utilizaran con propósitos mágico-religiosos.

En una de las últimas reescrituras del *Yajurveda* aparece el *Satapatha Brahmana*, en el que ya se mencionó con anterioridad que hay una discusión de cómo se erige el *Agnicayana*. Los elementos mágico-religiosos de este ritual están acompañados por un discurso corto sobre la construcción de altares de ladrillo de varias formas y tamaños. Dado que esta discusión no tiene la sofisticación geométrica de los *Sulbasutras*, es claro que el conocimiento de la tecnología del ladrillo, evidentemente abundante en la cultura Harappa, fue filtrándose poco a poco a los rituales védicos, llegando a ser el elemento crítico de las construcciones védicas. La conclusión de Staal [1978] es particularmente oportuna:

> Si queremos entender más, tenemos que ir más allá de los textos y poner el *Agnicayana* en una perspectiva histórica amplia. Las técnicas para hor-

17 Hay indicaciones en los textos de que los autores de los *Sulbasutras* estaban al tanto de esta distinción, lo cual se manifiesta en las expresiones: "como se ha dicho" o "tales son nuestras instrucciones", etc. La implicación es que estas instrucciones (digamos, en la eficacia de los altares de sacrificios de diferentes formas o los códigos asociados a los que se deben atener), no son particularmente relevantes al propósito principal de los textos. Estas instrucciones son simplemente tomadas como por sabidas, mientras que los textos en sí mismos ponen atención exclusiva a la técnica de ejecutarlos. De hecho, los textos son buenos ejemplos de cómo la ciencia exacta puede crecer directamente fuera de las aplicaciones.

18 Considérese el siguiente fragmento del *Taittiriya Samhita* [iv.4.11]:

> Puede que estos ladrillos, *O Agni*, sean vacas lecheras para mí, uno y mil, y un millón y diez millones, y cien millones, y mil millones, y diez mil millones... puede que estos ladrillos, *O Agni*, sean para mí lecheros de deseos llamados los gloriosos allá en el mundo del más allá.

> ing bricks, which we met for the first time in the *Yajurveda* texts dealing with the *Agnicayana*, could not have been imported by the Vedic nomads who had earlier entered the sub-continent from the North-west. Nomads have no need for bricks. The bricks, in fact occupy an exceptional position in the Vedic ritual, where all implements are made of perishable materials and are taken away, destroyed, burnt or immersed in water after a ritual performance has been completed [...].
>
> For the firing of bricks we have to look in a non-nomadic direction — *i.e.*, for a sedentary civilization. The fact which springs to mind is that in the Harappan civilization the use of fired bricks was normal and widespread [...]. Whatever else may be true, it is certainly reasonable to suppose that knowledge of the techniques for firing bricks was preserved among the inhabitants of the sub-continent even after the Harappa civilization had disappeared

Where, then are we to look back for the origins of geometry in India? The common view is that the *Sulbasutras* is the source. However, one hypothesis is that if the geometry embodied in the *Sulbasutras* texts are to be viewed as the outcome of a long and sophisticated tradition of brick technology, this geometry must have come into being when there was in fact an advanced form of brick technology with a long tradition behind it. This, in other words, would mean that whatever may be the time of the actual codification of the *Sulbasutras*, their contents come down from a different period. That must have been a period of flourishing brick technology. Only one period answering to all this is known in ancient Indian history, and that is the period of the Harappa civilization. The presumption, in short, is that geometrical science which we find eventually codified in the *Sulbasutras* could have come down from the Harappan period. If this presumption is correct, the first and earliest of the discontinuity in the chronology of Indian mathematics has been filled with the assistance of bricks.

Bibliography

CHATTOPADHYAYA, D. 1986. *History of Science and Technology in Ancient India. The Beginnings*. Calcutta: Firma KLMPFT.

DATTA, B. 1932. *The Science of the Sulba*. Calcutta: University Press.

FRAWLEY, D. 1991. *Gods, Sages and Kings*. Salt Lake City: Passage press.

HUNTER, G.R. 1934. *The Script of Harappa and Mohenjodaro and its Connection with Other Scripts*. Londres: Kegan Paul, Trench, Trubner and Co.

JEGANATHAN, P. 1993. *On the Structural Reading and the Evolution of the Indus Script*. Technical Report 220. Department of Statistics, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.

JOSEPH, G.G. 1992. *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*. London: Penguin.

> near ladrillos, que conocemos por primera vez en los textos *Yajurvedicos*, que tratan del *Agnicayana*, pudieron no haber sido traídos por los nómadas védicos quienes habían entrado anteriormente al subcontinente por el noroeste. Ellos no tenían necesidad de los ladrillos, los cuales, en efecto, ocupan una posición excepcional en los rituales védicos, en donde todos los implementos eran hechos de materiales perecederos, y luego desechados, destruidos, quemados o inmersos en agua después de que la representación ritual ha sido terminada .
>
> Para el cocimiento de ladrillos tenemos que ver hacia una dirección no nómada —i.e. para una civilización sedentaria— El hecho que brinca a la mente es que en la civilización Harappa el uso de ladrillos cocidos era normal y ampliamente extendido ... Cualquier otra cosa puede ser cierta, es razonable suponer que el conocimiento de esta técnica de cocimiento fue preservada entre los habitantes del subcontinente aún después de que la civilización Harappa había desaparecido.

Entonces ¿hacia dónde tenemos que dirigir la búsqueda de los orígenes de la geometría hindú? El punto de vista común apunta que los *Sulbasutras* son la fuente. Sin embargo, una hipótesis es que si la geometría formulada en los textos *Sulbasutras* implica que éstos deben verse como el resultado de una larga y sofisticada tradición de la tecnología de ladrillos, entonces esta geometría debió haber nacido cuando se llegó a una forma más avanzada de esa tecnología, tenía una larga tradición detrás. Esto, en otras palabras, significaría que cualquiera que sea el tiempo de codificación actual de los *Sulbasutras*, sus contenidos se transmitieron en un período diferente. Que debió ser un período de florecimiento de dicha tecnología. Sólo un intervalo conocido en la historia de la India antigua responde a todo ésto, y este es el de la civilización Harappa. La hipótesis, en breve, es que las ciencias geométricas que encontramos eventualmente codificadas en los *Sulbasutras* pudieron haberse transmitido del período harappiano. Si esta suposición es correcta, la primera y más antigua de las discontinuidades en la cronología de las matemáticas hindúes ha sido cubierta con la ayuda de ladrillos.

Bibliografía

CHATTOPADYAYA, D. 1986. *History of Science and Technology in Ancient India. The Beginnings*. Calcuta: Firma KLM/PVT.

DATTA, B. 1932. *The Science of the Sulba*. Calcuta. University Press.

FRAWLEY, D. 1991. *Gods, Sages and Kings*. Salt Lake City. Passage press.

HUNTER, G.R. 1934. *The Script of Harappa and Mohenjodaro and its Connection with Other Scripts*. Londres: Kegan Paul, Trench, Trubner and Co.

JEGANATHAN, P. 1993. *On the Structural Reading and the Evolution of the Indus Script*. Technical Report 220, Department of Statistics. The University of Michigan. Ann Arbor. Michigan.

________. 1993. "What is a Square Root? A study of geometrical representation in different mathematical traditions", in M. Quigley (ed.). *Proceedings of 1993 Annual Meeting of C.M.E.S.G.*, University of Calgary. Pp. 3-14.

________. 1994. "Different Ways of Knowing: Contrasting Styles of Argument in India and the West", in D.F. Robitaille *et al.* (eds.). *Selected Lectures from the 7th International Conference on Mathematical Education*. Les Presses de L'Université Laval, Sainte-Foy (Quebec). Pp. 183-198.

________. 1996. "The Geometry of Vedic Altars", in K. Williams (ed.). *Nexus: Architecture and Mathematics*. Firenze: Edizioni Dell'Erba, Fucecchio.

KAK, S.C. 1987a. "On the astronomy in ancient India". *Indian Journal of History of Science* 22: 205-221.

________. 1987b. "On the chronology of ancient Indian". *Indian Journal of History of Science* 22: 222-234.

________. 1989. "Indus Writing". *Mankind Quarterly* 30: 113-118.

________. 1990. "Indus and Brahmi Further Connections". *Cryptologia*, XIV, No.2, 169-183.

________. 1993. "Astronomy of the Vedic Altars". *Vistas in Astronomy*, 36: 117-140.

KULKARNI, R.P. 1978. "Geometry as known to the People of Indus Civilisation", in *Indian Journal of History of Science* 13: 117-124.

MACKIE, E.W. 1977. *The Megalithic Builders*, Oxford: Phaidon.

MAINKAR, V.B. 1984. "Metrology in the Indus Civilisation", in B.B. Lal y S.P. Gupta (eds). *Frontiers of the Indus Civilisation*. New Delhi: Motilal Banarsidass.

SEIDENBERG, A. 1962. "The Ritual Origins of Geometry". *Archives for History of Exact Sciences* 1: 488-527.

________. 1983. "The geometry of the Vedic Rituals", en F. Staal (ed.). *Agni: the Vedic Ritual of the Fire Altar*, 2. Berkeley: Asian Humanities Press. Pp. 95-126.

SEN, S.N. and Bag, A.K. 1983. *The Sulbasutras*. New Delhi: Indian National Science Academy.

STAAL, F. 1978. "The Ignorant Brahmin of the Agnicayana". *Annals of the Bhandarkar Oriental Research Institute*, Diamond Jubilee Number, Pune. Pp. 337-348.

SUBBARAYAPPA, B.V. 1993. *Numerical System of the Indus Valley Civilisation: A Monograph on the Indus Script*. Mimeo, Bangalore: Indian Council of World Culture.

THIBAUT, G. 1875. "On the Sulbasutra". *Journal of the Asiatic Society of Bengal* 44: 227-275.

VENKATACHALAM, K. 1986. "A Study of Weights and Measures of the Indus Valley Civilisation", in I. Mahadevan (ed.). *Tamil Civilization Quarterly Research Journal of the Tamil University* 4: 1.

JOSEPH, G.G. 1992. *The Crest of the Peacock: non-European Roots of Mathematics*. London: Penguin.

_____ 1993. "What is a Square Root? A study of geometrical representation in different mathematical traditions", en M. Quigley (ed.) *Proceedings of 1993 Annual Meeting of C.M.E.S.G.*, University of Calgary. Pp. 3-4.

_____ 1994. "Different Ways of Knowing: Contrasting Styles of Argument in India and the West", en D.F. Robitaille *et al.* (eds.), *Selected Lectures from the 7th International Conference on Mathematical Education*. Les Presses de L'Université Laval, Sainte-Foy (Quebec). Pp. 183-198.

_____ 1996. "The geometry of vedic altars", en K. Williams (ed.), *Nexus: Architecture and Mathematics*. Firenze: Edizioni Dell'Erba, Fucecchio.

KAK, S.C. 1987a. "On the astronomy in ancient India", *Indian Journal of History of Science* 22: 205-221.

_____ 1987b. "On the chronology of ancient Indian". *Indian Journal of History of Science* 22: 222-234.

_____ 1989. "Indus Writing". *Mankind Quarterly* 30: 113-118.

_____ 1990. "Indus and Brahmi Further Connections". *Cryptologia*, XIV, No.2, 169-183.

_____ 1993. "Astronomy of the Vedic Altars". *Vistas in Astronomy* 36: 117-140.

KULKARNI, R.P. 1978. "Geometry as known to the People of Indus Civilisation". *Indian Journal of History of Science* 13: 117-124.

MACKIE, E.W. 1977. *The Megalithic Builders*. Oxford: Phaidon.

MAINKAR, V.B. 1984. "Metrology in the Indus Civilisation", en B.B. Lal y S.P. Gupta (eds) *Frontiers of the Indus Civilisation*. New Delhi: Motilal Banarsidass.

SEIDENBERG, A. 1962. "The Ritual Origins of Geometry". *Archives for History of Exact Sciences* 1: 488-527.

_____ 1983. "The geometry of the Vedic Rituals", en F. Staal (ed.) *Agni: the Vedic Ritual of the Fire Altar*, 2. Berkeley: Asian Humanities Press. Pp. 95-126.

SEN, S.N. and Bag, A.K. 1983. *The Sulbasutras*. New Delhi: Indian National Science Academy.

STAAL, F. 1978. "The Ignorant Brahmin of the Agnicayana". *Annals of the Bhandarkar Oriental Research Institute*. Diamond Jubilee Number. Pune. Pp. 337-348.

SUBBARAYAPPA, B.V. 1993. *Numerical System of the Indus Valley Civilisation: A Monograph on the Indus Script*. Mimeo. Bangalore: Indian Council of World Culture.

THIBAUT, G. 1875. "On the Sulbasutra". *Journal of the Asiatic Society of Bengal* 44: 227-275.

VENKATACHALAM, K. 1986. "A Study of Weights and Measures of the Indus Valley Civilisation", en I. Mahadevan (ed.), *Tamil Civilisation Quarterly Research Journal of the Tamil University* 4: 1.

George Gheverghese Joseph was born in Kerala, southern India. Then he moved to Mombasa in Kenya where he studied at the University of Leicester. He did his post-graduate work at Manchester. His teaching and research has ranged over a broad spectrum of subjects in applied mathematics and statistics including multivariate analysis, mathematical programming, demography and econometrics. However, in recent years, his research has been mainly in the social and historical aspects of mathematics with particular emphasis on the non-European contribution to the subject. His publications include three books: *Women at work* (Philip Allan, Oxford 1983), *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics* (Penguin, London 1992) [spanish translation *La cresta del pavo real* (Pirámide, Madrid 1996)] and *Multicultural Mathematics* (Oxford University Press, Oxford 1993).

George Gheverghese Joseph nació en Kerala, India. Estudió en la Universidad de Leicester en Mombasa, Kenia, y realizó su trabajo de posgrado en Manchester. Sus investigaciónes abarcan un amplio espectro de temas en matemáticas aplicadas y estadística, incluyendo análisis multivariado, programación matemática, demografía y econometría. Sin embargo, en años recientes sus investigaciones se han centrado principalmente en el aspecto social e histórico de las matemáticas, con un énfasis particular en las contribuciones no europeas. Sus publicaciones incluyen tres libros: *Women at work* (Philip Allan, Oxford, 1983), *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics* (Penguin, London, 1992), de este libro hay una traducción al español *La cresta del pavo real* (Pirámide, Madrid, 1996) y *Multicultural Mathematics* (Oxford University press, Oxford, 1993).