Mathesis 10 (1994) 235-254
[illegible]

El discurso matemático: ideograma y lenguaje natural

Javier de Lorenzo

Resumen

El lenguaje natural occidental es fundamentalmente fonológico enfrentado a lo ideogramático. El hacer matemático invierte esa relación y se origina en el ideograma que no es transcripción de fonema sino potencialidad constructiva. Desde posiciones que parten del lenguaje fonológico, o de las sintáctico-formales, no se ha captado el papel que el ideograma posee en el hacer matemático por lo que su manejo se califica, sin más, de formalismo. El objetivo de este trabajo es analizar el papel específico del ideograma en el hacer matemático, y apuntar algunas consecuencias conceptuales que se derivan de dicho análisis

Abstract

The natural western language is mainly phonological, as opposed to ideogrammatical things. Mathematical way of doing things reverse this relationship and originated in the ideogram, which is not a phoneme transcription but a constructive potentiality. From positions starting from the phonological language, or from the syntactic-formalism ones, the role of the ideogram in the mathematical way of doing things has not been realized, and because of that its use is simply called formalism. The purpose of this work is to analyze the specific role of the ideogram in the mathematical way of doing things, and to point out some conceptual consequences that deriving from this analysis.

1. Se ha mantenido que el manejo de un buen simbolismo es esencial para el desarrollo matemático y, desde cierto enfoque histórico, se afianza la idea al indicar que un adecuado simbolismo posibilitó a Viète plasmar el álgebra especiosa, o que una elección afortunada condujo a los

leibnizianos al desarrollo del cálculo infinitesimal frente a los newtonianos, aferrados a lo fluxional contra el d'ismo continental ... Parecería plausible una armoniosa unión entre lenguaje natural y un simbolismo matemático propio, unión como elemento imprescindible para el discurso matemático. Y, sin embargo, en la relación entre el hacer matemático y el lenguaje natural en el que parece expresarse encuentro una pugna permanente, reflejo de una problemática intrínseca en cuanto a dicha relación. Pugna que ha conducido a dos soluciones extremas que, desde mi punto de vista, no resuelven la problemática subyacente.

a. Por un lado, partiendo de una afirmación tópica como la de 'basta abrir un libro de matemática para ver que está escrito en lenguaje natural con elementos de un vocabulario especial', se pasa a afirmar que ese escrito, aunque utiliza términos específicos y otros del lenguaje natural con significado diferente al de sus homónimos, no se puede considerar como la manifestación de un lenguaje especial sino como la de uno equiparable al taurino o al gastronómico .. Además, los términos específicos se ven como abreviaturas convencionales de las que, en principio, puede prescindirse, al igual que en la exposición y construcción de la geometría sintética las figuras, los diagramas geométricos se enfocan como ayudas heurísticas pero no constitutivas del hacer geométrico que en su auténtica elaboración conceptual, según se afirma, puede y debe prescindir de las mismas porque la representación gráfica no significa constituye fuente de error y confusión.

Cierto que, llegado el caso de la praxis matemática, la eliminación se presenta sólo como conceptual porque, en dicha práctica la presencia de tales términos en el discurso matemático se muestra como imposible de erradicar.

Desde un tópico como el anterior se convierte en tesis la afirmación de que el simbolismo específico es un añadido al lenguaje natural, añadido conceptualmente espúreo porque en el discurso matemático se hace referencia a objetos u operaciones con ciertas propiedades y relaciones pero con referencia que puede traducirse al lenguaje natural.

b. Opuesta a la tesis anterior se tiene la que se sustenta en posiciones ideológicas surgidas de las escuelas de fundamentación. Sin entrar en una concepción como la de Brouwer —quien mantiene la radical independencia del hacer matemático respecto a lenguaje alguno, natural o artificial—, y frente a quienes conceblan a la matemática como un lenguaje propio bien hecho —y parafraseaban a Condillac—, surge la afirmación de que la matemática es una teoría, un conjunto de proposiciones verdaderas expresadas en un lenguaje artificial y cerrado bajo la demostración o derivación formal. Desde esta tesis la Matemática se trascribe a un lenguaje artificial sintáctico-formal pero ella misma no es, en modo alguno, un lenguaje.

Hay que aceptar, aquí, una noción de lenguaje como la que caracteriza Chomsky bajo los términos 'lenguaje externamente concebido' y que viene compuesto por: a. Un *vocabulario* de elementos discretos, b. Una *sintaxis* explicitada por la cual las configuraciones obtenidas a partir del vocabulario se *escinden* en bien y mal formadas; c. Una *semántica* por la cual a las bien formadas se las dota de alcance semántico ya que el lenguaje se utiliza para hablar, con valor de verdad, de objetos que, en general, son distintos de los que componen el vocabulario. A esta noción de lenguaje formal se agrega la creencia de que los términos singulares denotan y satisfacen a las fórmulas abiertas de las proposiciones existencialmente cuantificadas, por lo que basta dicho lenguaje artificial para expresar las teorías matemáticas sin mezcla de lenguaje natural alguno.

Es caracterización en la que no se tienen en cuenta factores como los del contexto en el cual ese lenguaje entra en juego o los de recepción: el lenguaje artificial se enfoca desde una visión de código establecido atemporalmente y, en el fondo, sin sujeto lingüístico.

Desde esta concepción lógico-formal los razonamientos que se admiten como matemáticos son aquellos que pueden transcribirse en la lengua artificial elegida sin empleo de lenguaje natural alguno. De esta forma la matemática, por carecer de vocabulario, sintaxis y semanticidad propios, tampoco es lenguaje sino teoría o sistema formal deductivo transcrito en el lenguaje artificial elegido donde el cierre teórico, dado por el operador derivación, manifiesta que es teoría caracterizada por axiomas y reglas de derivación. Punto de partida indiscutido, junto a la concepción externa del lenguaje, la visión axiomático formal en la cual los axiomas son las proposiciones iniciales de todos los teoremas o derivaciones a la vez que constituyen la definición implícita de posibles estructuras, también formales, que dotan de la semanticidad requerida, intrínseca, a la teoría formal. Visión contrapuesta a la concepción axiomático-postulacional en la cual los axiomas delimitan, por constitutivos, el campo de juego conceptual que, una vez construido, posibilita el hacer matemático en su interior con posterior transcripción lingüística no artificial.

La posición sintáctico-formal de lenguaje artificial que rechaza cualquier intromisión del lenguaje natural enlaza, por su desconfianza respecto a éste último, con el pensamiento de Frege. Frege, en *Begriffsschrift*, señala la necesidad de romper con el dominio de la palabra, escrita o hablada, sobre el pensamiento puro. Pensamiento puro que, en un primer momento, centra en la matemática y, en particular, en la aritmética. Frege constata que el pensar matemático no puede realizarse en el lenguaje natural, y se requiere no sólo de una nueva forma lógica —frente a S-P la función-argumento—, sino de una nueva conceptografía. Conceptografía enfocada como lenguaje estrictamente sígnico, gráfico y no hablado. Más aun, una conceptografía planaria, geometrizada y no linealizada o serializada. Sólo esta conceptografía escrita, en paralelo a la *lingua characteristica* leibniziana, pero con la potencia de poder expresar en ella la cuantificación, será capaz de reflejar la estructura profunda de la matemática, los contenidos conceptuales del pensamiento puro. En ella no interviene para nada el lenguaje natural, limitado a breves comentarios introductorios respecto a la conceptografía, al lenguaje artificial.

No sólo Frege. En paralelo, Peirce insistirá en que su más grande contribución a la lógica se centra en la creación del método gráfico con el que se alcanza "más directamente al último análisis en los problemas lógicos que ninguna especie de álgebra jamás inventada" (CP. 3.619). Los gráficos geométricos se establecen en el universo del discurso dado por la hoja bidimensional o el encerado y, como partes de ese universo, tales gráficos representan hechos o afirmaciones verdaderas sobre el mismo.

En el sentir de Frege, en el de Peirce, no es el lenguaje natural el que vehicula la matemática. Más aun, la confunde.

El pensamiento matemático requiere, por modo único, el manejo del ideograma en forma de conceptografía fregeana o de gráfico peirceano, en los dos casos con representación bidimensional. Las razones de Frege, de Peirce, se centran básicamente en que esos tipos de representación ideogramática posibilitan realizar un análisis profundo y completo del pensamiento matemático. Para ambos, si el matemático maneja los ideogramas lo hace como instrumento y, en cualquier caso, siempre comete el 'error' de saltar a pie juntillas sobre los cálculos y las derivaciones, quemando etapas, sintetizando. Desde un enfoque de fundamentos, por el contrario, y al igual que desde un enfoque puramente sintáctico-formal, se hace imprescindible no saltar etapa alguna, sino analizar, mostrar todos y cada uno de los pasos que intervienen en el razonamiento.

En cualquier caso, aunque la conceptografía y el método gráfico se enfocan en su origen como instrumentos de análisis conceptual más que de elaboración para matemática el lenguaje natural aparece desterrado conceptualmente tanto de ese análisis y fundamentación como de la elaboración matemática.

c. Frente a las dos posiciones mencionadas —la que ve a la Matemática como un hacer que se expresa en el lenguaje natural con el añadido de unos símbolos 'bien elegidos' pero conceptualmente redundantes, o la reduccionista tanto en la línea fregeana o peirceneana, como en la sintáctica o lógico-formal, donde es el lenguaje natural el conceptualmente redundante—, resulta que, en la práctica, el matemático sigue manejando una combinación de ideograma y lenguaje natural, y éste no sólo como abreviatura o justificación del anterior. Además, sigue saltando de pie juntillas sobre los cálculos y sigue sin hacer 'demostraciones matemáticas'. Hace matemática y no fundamentos —y recuerdo la crítica de Frege a Dedekind— o un juego gráfico rudimentario y superficial (Peirce CP 3.619) o un juego de ajedrez (Dieudonné 1953).

Desde posiciones como las apuntadas, contrapuestas a la praxis del hacer matemático a la que pretenden describir, fundamentar o justificar, se deja en el aire la necesidad conceptual de los ideogramas en el hacer matemático; se deja en el aire la necesidad de que ese hacer se tenga que plasmar en una mezcla de lenguaje natural e ideogramático, estimando que no hay tal necesidad sino mera cuestión de índole pragmática. Desde ambas posiciones no se resuelve el problema sino que se oculta por el intento de eliminar o el ideograma o el lenguaje natural.

2. Desde la búsqueda de una *lingua characteristica*, una conceptografía, un método gráfico, unos ideogramas ..., el hacer matemático ha mostrado una permanente pugna con el lenguaje natural sin por ello prescindir de ambos elementos. Pugna o tensión: 'hacer matemático-lenguaje natural' que me lleva a la búsqueda de lo que en esa pugna se encuentra subyacente. Y en esa búsqueda se constatan, de entrada, dos puntos:

a. En primer lugar, se observa que el lenguaje natural es, básicamente, fonológico y no ideográfico. Entiendo por 'ideograma' aquí, y en sentido muy amplio, una colección visual de caracteres o líneas, o un símbolo convencional, que remite bien a un objeto, bien a un concepto o a una idea, bien a una acción; por 'fonema' el símbolo que remite al sonido, a las sílabas —vocales y consonantes—.

La escritura occidental, el discurso escrito, se ha plasmado como transcripción de *fonemas*, del discurso hablado. La escritura, lo que aquí califico en sentido amplio de lenguaje escrito, se ha constituido en la tradición cultural occidental por transcripción fonética y no ideogramática.

(En fechas muy cercanas las reales academias de la lengua americanas y española han acordado suprimir, como letras del alfabeto la ch y la ll. Como argumento, el representar fonemas que de hecho, se mantienen, pero pueden ser transcritos por letras o signos con c-h, l-l, sin pérdida significativa de su valor hablado. Las academias americanas que votaron en contra de la supresión pusieron de relieve el papel de la tecnología como razón última pero apoyaban su negativa en el argumento de que la escritura debía mantener el papel de transcripción del fonema. La supresión como letras supeditaba la transcripción fonética a lo mero sígnico convencional, a lo ideográfico).

Esa transcripción gráfica de los fonemas conlleva una serie de características propias del lenguaje escrito. Menciono, básicamente, las siguientes:

1. Atomicidad o proceso discreto y, consecuente, principio de molecularidad sintáctico,

2. Seriación o linealización de la escritura, sucesión gráfica y temporal, reflejo de la seriación espacio-temporal de lo hablado con la posterior captación espacio-temporal descodificadora también seriada y lineal,

Como un tercer punto, la transcripción de lo fonético se convierte en velo ya que no muestra el objeto mencionado y, de aquí, ahonda la escisión entre

{fenómeno/objeto} —— hablada que lo describe o
nombra —— palabra escrita que transcribe esta última

Por ser lo escrito transcripción fonética mantiene el velo que el lenguaje hablado entraña radicaliza la rotura, la escisión objeto-palabra.

Las dos primeras características marcan un límite al lenguaje en el sentido de que la discrecionalidad y la seriación impiden captar el total de lo expresado mediante una visión global, directa. Obliga, el lenguaje, a un proceso de reconstrucción serial, siempre mediato, temporal y no intuitivo inmediato.

Desde el tercer punto se plantea un conjunto de problemas —que se encuentran incardinados en todo el proceso filosófico occidental— entre los que menciono.

• adecuación de la palabra —hablada o escrita— respecto al objeto o fenómeno descrito o nombrado, respecto a sus atribuciones; problemática que da paso, por ejemplo, a cuestiones acerca de si el lenguaje refleja la realidad o es quien la condiciona, a cuestiones acerca de la verdad, a problemáticas como la del atomismo lógico ...;

• enlazando con la limitación antes señalada, el problema epistemológico, ya que el proceso cognitivo se convierte en un proceso mediato, siempre interpretativo —y no entra en las cuestiones de la percepción—,

• el problema de la argumentación, también mediata, lo cual implica búsqueda de criterios tanto de validez como de convicción ...

b. En segundo lugar, la constatación, desde la praxis matemática, de que el hacer matemático exige tanto del lenguaje escrito ideogramático como del fonológico que es el que vehicula y da marco al elemento escrito.

Supone, esta constatación, mantener la tesis de que el hacer matemático entraña una inversión radical respecto al lenguaje natural: supone afirmar que en el hacer matemático no se parte del discurso hablado para una posterior transcripción gráfica, sino que su punto originario es el ideograma gráfico, la colección visual de caracteres o líneas, el símbolo que puede o no ser transcrito fonológicamente. (Y, de aquí, el imprescindible uso de la pizarra, del papel, o el hecho de que la manifestación oral matemática venga siempre entrecortada respecto al lenguaje natural: "Sea la función ..." y tenga que escribir, presentar gráficamente la función.)

El lenguaje en el que se manifiesta el hacer matemático se me presenta como constitutivamente mixto, fonológico-ideogramático, donde el papel constructivo esencial lo posee el ideograma mientras el lenguaje natural aparece como vehículo o marco que enlaza y posibilita las construcciones ideogramáticas matemáticas a las cuales no puede sustituir o reemplazar, sino complementar y apoyar en lo posible interpretativo.

3. El carácter constitutivo del ideograma y el papel de amalgama del natural en la matemática, se revelan nítidos en el hacer figural, aunque tal mostración ha provocado tensiones en cuanto a su interpretación, principalmente en aritmética y álgebra.

Voy a hacer un breve recorrido por el hacer figural intentando precisar tanto la noción de ideograma como el papel que le corresponde, la función que poseen, realmente, esas notaciones o símbolos especiales que se entremezclan al texto o discurso matemático.

* En Geometría sintética, el ideograma parece mostrar todo su esplendor como figura asociada al texto o discurso natural. Pero hay que

precisar los dos papeles en los que tal figura se presenta: en cuanto al concepto y en cuanto a la demostración.

Desde una concepción representativa se ha visto la figura geométrica con una componente referencial por modo exclusivo: el ideograma se considera imagen de un objeto o idea, ya preexistente en sí, ya obtenido por abstracción de objetos de la realidad sensible. Decir recta, triángulo, circunferencia, cuártica ..., lleva a representar, gráfica o imaginativamente, el ideograma correspondiente a un objeto o concepto preexistente. Desde una concepción representacional, el ideograma es símbolo que es copia icónica o representación convencional de un objeto o idea abstracta previamente establecido.

Kant puso de manifiesto el error de esta concepción: el ideograma no es sólo signo-imagen referencial de, sino esencialmente esquema constructivo. Es, en el fondo, un principio de acción que se materializa en el gráfico concreto y singular, el ideograma o figura geométrica contiene una acción intencional. Y cuando se parte del fonema representativo, como al decir 'triángulo', lo que hace el matemático es construir el ideograma gráfico correspondiente, actualizar su potencial intencionalidad intrínseca.

Sin embargo, la posición kantiana va desde el nombre al esquema —porque, quizá, parte de una Matemática ya hecha— lo que supone un inversión que no da cuenta del total, modifica el punto de partida real: punto de partida que es el ideograma con su posterior búsqueda de nombre y descripción, en el lenguaje natural, del objeto construido así como de las posibles propiedades que puede poseer el objeto generado por el ideograma.

Como ejemplo ilustrativo adopto el aportado por Unguru en su estudio sobre la cónica de Apolonio. Cuando Apolonio desarrolla la geometría de las cónicas plantea la existencia de un conflicto con lo visual en el sentido de que las cónicas se generan como secciones de un cono y tal generación es visual sin que, por ello, la cónica generada sea un objeto visual. La generación del cono es su causa y el corte o sección es el que produce la cónica y, producida, se busca el nombre apropiado para la misma así como se establecen las propiedades de la cónica generada. Las propiedades de la sección cónica se generan a través del corte, es decir, es la cónica generada la que provoca unas propiedades y no, como suele estimarse desde el previo dato del objeto, porque se tengan unas propiedades se tiene un tipo determinado de cónica. Lo primario es la construcción o generación visual-geométrica del objeto que, en su constitución, pasa a generar las propiedades atribuibles al mismo. Visualización que, en una elaboración constructivo geométrica como la de Apolonio, obliga a que el texto y el ideograma, texto y figura, conformen un cuerpo único, indisociable.

El elemento constitutivo de acción intencional del ideograma se manifiesta aun más nítidamente en el papel que tiene en la demostración geométrica. Se ha querido que la figura que acompaña al texto de una demostración posea un valor heurístico no esencial a la misma. Y sí es esencial: el ideograma, en este caso la figura —con más precisión, la superposición constructiva en la que se resume la figura final—, es imprescindible para la elaboración y no sólo comprensión de la demostración geométrica. La figura geométrica no es mera ilustración de un texto escrito en lenguaje natural, sino que implica lo no explicitado en el enunciado y supone una construcción espacial —no sólo lineal— que culmina en la superposición final, totalizadora de la demostración del teorema. No es, en modo alguno, prolongación serializada del texto o discurso fonológico escrito.

Incluso más: el ideograma geométrico, al entrañar el proceso constructivo espacial, pero no serial o simplemente discreto sino globalizador, sugiere las líneas directoras para alcanzar la demostración adecuada, la resolución de un problema; a la vez justifica la aplicación correcta, en dicha demostración, de unas u otras reglas demostrativas. Es la construcción geométrico-figural la que orienta y conduce la búsqueda operatoria que posteriormente puede traducirse, o transcribirse, al lenguaje mixto natural-ideogramático. Transcripción que no es otra cosa que la conversión a ese lenguaje mixto de lo que el ideograma soporta. En otras palabras, la transcripción no es más que redactar la demostración entrevista del teorema, la solución intuida a un problema ...

El ideograma geométrico, por su acción intencional constitutiva, implica, en el fondo, un método para resolver toda una clase de problemas prácticos en un cuadro espacial previamente asumido y, por ello, las particularidades concretas, lo singular de la plasmación ideogramática carecen de importancia porque lo importante es el método constructivo que el ideograma oculta en su presencia. Como acción intencional, como esquema ostensivo en el decir kantiano, el ideograma obliga a que se le vea no ya como objeto en sí sino como acción potencial intencional constructiva. (Esta intencionalidad potencial, como componente constitutiva del ideograma, posibilita suprimir un problema como el lockeano de que la imagen concreta lo sea de un objeto singular y no del concepto o idea universal que debería representar, así como el problema de la idealización que se plantea a todo empirista a lo Mill cuando tiene que admitir que no hay en la naturaleza objetos de los que abstraer los conceptos matemáticos, salvo por procesos de idealización.)

* La mayor dificultad para la comprensión del papel del ideograma en el hacer figural ha procedido de la aritmética y el algebra, dificultad apoyada en la idea de que no hay, en estas materias, referente alguno para los signos aritméticos y algebraicos. Ausencia de 'realidad material' que se agrava aun más en el caso de las cantidades imposibles, de los números imaginarios o entes de ficción y que posibilita aceptar un enfoque pragmático y formalista para los mismos. Enfoque desde el cual la aritmética y el algebra no son más que amalgama de reglas para contar o medir, sistema de símbolos útiles para guiar la acción indicaría Berkeley.

Al igual que en lo geométrico, también aquí conviene precisar. La notación algebraica, en sus momentos iniciales con Descartes, encierra un proceso que ha quedado oculto bajo lo simbólico-formal. La notación cartesiana se apoya en lo geométrico, en la intuición visual al ligarse estrechamente con la consideración de los segmentos rectilíneos —otros diagramas previos— a los que van a representar los signos algebraicos. La representación notacional algebraica permite 'ver', por un lado, lo que oculta el cálculo numérico mientras que, por otro, generaliza las relaciones entre los elementos de las figuras o los nuevos diagramas a los que dan lugar esos segmentos rectilíneos. Descartes señalará que si se escribe $a^2 = b^2 + c^2$, b^2 y c^2 quedarán como partes 'distintas' y se mostrarán no sólo como los catetos correspondientes al triángulo rectángulo sino que mantendrán la intuición de la relación que liga a dichos catetos con la hipotenusa. Relación oculta bajo un cálculo en el que aparecería, por ejemplo, 225 como resultado de ser 9 y 12 las longitudes de los catetos; longitudes, además, de un triángulo rectángulo singular y concreto y no del triángulo rectángulo general, universal, para el cual es válida la ecuación anterior.

El álgebra se liga, en Descartes, a hacer visible lo que el cálculo oculta y, por visible, a dar la universalidad del método matemático. Las relaciones algebraicas son generales y a partir de la ecuación en su representación ideográfica 'universal' se alcanza la concreción, la singularidad, al particularizar en ella, por sustitución, los símbolos por valores concretos cualesquiera.

La notación algebraica, de esta manera, no surge como mero formalismo o regla de cálculo pragmático, sino como notación ideogramática con dos objetivos: mantener la intuición constructiva y universalizar. Visión ligada, en el momento naciente de una matemática 'moderna' —como la llama Descartes—, a otra representación ideogramática —aquí geométrica— y, por ello, su adecuado empleo en el estudio de las curvas geométricas, de las curvas racionales. Y recuerdo que el primer problema que plantea Descartes, como ejemplo de la potencia de su método algebraico, es el problema de Pappus y que culmina su *Geometría* con la clasificiación de curvas.

De esta forma, el ideograma algebraico no es sólo representación de otros ideogramas previos sino que muestra, como en el caso geométrico, su elemento constitutivo de ser una intencionalidad potencial de acción. Es, evidentemente, símbolo convencional —no icónico— pero a la vez que muestra una intuición del segmento rectilíneo o de la curva asociada y de alguna propiedad atribuible a ellas, revela en sí su carácter operatorio potencial. Si se representa una curva por la ecuación de grado n como

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

la forma de escritura ya divide las componentes en coeficientes, las a_i y una variable, x. Y es esta forma ideográfica la que posibilita buscar, por ejemplo, las relaciones entre los coeficientes y las raíces de la ecuación o permite conjeturar el teorema fundamental del álgebra o conduce al teorema de Bezout que conlleva interpretaciones como la de obtener el número de puntos en el que se cortan dos curvas o la de resolver un sistema de dos ecuaciones ... y, sobre todo, —y lo considero clave—, permite pasar de la ecuación al polinomio correspondiente —de $p(x) = 0$ a $p(x)$— y operar con el mismo y sus análogos.

Principio de acción el diagrama, al actualizarse, condiciona que algunas raíces puedan ser imaginarias y que los símbolos que las representan, manejados con las mismas reglas que hacen uso de los 'reales', den paso a cálculos imaginarios que terminan, en muchos casos, por dar resultados reales. La fórmula algebraica —vehiculada a través de un lenguaje escrito mixto que posibilita sus distintas interpretaciones— no sólo conduce desde el triángulo rectángulo concreto al triángulo rectángulo universal o a generalizar la ecuación hasta alcanzar el último teorema de Fermat con la búsqueda de ternas pitagoras ahora sin elemento geométrico asociado alguno ..., sino que permite una generalización aun mayor convertirse en reglas operatorias sobre símbolos carentes en principio de referencial, símbolos donde la intuición cartesiana se ve impotente. Al igual que la intuición leibniziana, como explícitamente indicará Leibniz al reconocer el poder razonador independiente que estos símbolos conllevan.

> [e]sas expresiones tienen de admirable que en el cálculo no envuelven nada de absurdo o contradictorio aunque no pueden mostrar nada en la naturaleza, es decir en las realidades concretas.[1]

El ideograma algebraico no es símbolo formal sintáctico creado de manera convencional por el matemático para operar mediante unas reglas adoptadas, por analogía, de las aritméticas. El ideograma algebraico posee un contenido mucho más profundo. Lo que el método cartesiano lleva a efecto es una inversión del papel figural geométrico en lugar de partir de la curva con sus propiedades —dato referencial—, parte de un espacio con un sistema de coordenadas en el que se generan las curvas en función de una caracterización ideográfica establecida por unas ecuaciones y se van generando, a su vez, las propiedades de las mismas.

Es inversión que provoca, realmente, el surgimiento del álgebra en cuanto manifestación notacional ideográfica. En esa inversión, se parte de las operaciones correspondientes a los segmentos en paralelo a las operaciones aritméticas, lo que obliga a tomar un segmento arbitrario como unidad, por lo que toda operación entre segmentos se reduce siempre a un segmento único —y se ha eliminado el problema de la homogeneidad dimensional— a la vez que esas operaciones se corresponden con las que se pueden hacer entre los ideogramas numerales y letras. La unidad se reemplaza por un signo como x y se indica que puede operarse con él como si fuera un número natural. De esta manera las curvas, o las operaciones entre segmentos, vienen dadas por polinomios —y ecuaciones entre polinomios— que se pueden manejar, a su vez, como si fueran números ... Lo que la notación algebraica ha llevado a cabo es linealizar una serie de conceptos geométricos y algebraicos.

Quiero insistir, el álgebra ha surgido de, y plasmado, un proceso de linealización sólo factible desde el ideograma, ahora en versión notacional algebraica. Proceso conceptual de linealización que conlleva que, desde el hacer matemático, puedan construirse modelos de lo real aunque, para ello, tengan que crearse modelos de lo imaginario. Bien entendido, no se parte de la naturaleza, de 'la realidad concreta' para seguir las palabras citadas de Leibniz, sino del ideograma para alcanzar el modelo y sólo cuando se ha construido el modelo se intenta llegar a la realidad concreta, a una parte de la naturaleza.

* Un proceso análogo de linealización, así como de dependencia originaria respecto a lo geométrico hasta alcanzar su estatuto inde-

1. Hae expressiones id habent mirabile, quod in calculo nihil involvunt absurdi vel contradictorii, et tamen exhiberi non possunt in natura rerum seu in concretis. [Leibniz *Math. Schriften* VII-73]

pendiente, se tiene en la constitución leibniziana del análisis infinitesimal. Uno de los primeros objetivos del mismo era la cuadratura de curvas más generales que las algebraicas cartesianas, las curvas trascendentes, curvas dadas por ecuaciones imposibles de representar mediante ecuaciones polinómicas 'racionales'. Para lograr ese objetivo se tenían, como puntos originarios: la aportación algebraica cartesiana, la visión geométrica de los infinitesimales —con origen básico en los escritos de Pascal—, la idea de que una curva es lo mismo que un polígono con una infinidad de lados rectos —por lo que la tangente a la curva no viene a ser más que uno de dichos lados ya que une dos puntos infinitamente próximos—, y las proporciones entre un triángulo y el triángulo característico. Con este objetivo, con esos puntos de partida, se pasa a configurar gráficamente unos ideogramas que permitan un cálculo más general, más universal que el aportado por el análisis algebraico cartesiano.

Ello implica que en los ideogramas de diferenciación o integración no se pueden ver simples símbolos abreviaturas del lenguaje natural que posean como referencial un objeto o sean imagen sensible del mismo sino que hay que verlos en su potencialidad de operadores lineales, aunque ésta quede aparentemente oculta en su momento originario. Aparentemente porque, para Leibniz, la diferencial escrita por *dx* muestra una afección de la magnitud *x*, afección que recibe su determinación de las operaciones en que está inmersa. Es decir, *dx* no es la transcripción de una cantidad o magnitud previamente determinada sino que es el resultado de la diferenciación *d*, de la operación diferencial. Y son las magnitudes que varían las que dan paso al concepto dinámico de función, que se constituye de esas magnitudes que varían y tienden a. En otras palabras, las relaciones que tienen entre sí los términos del cálculo son las que condicionan la introducción de la función.

Y frente a quienes buscan una imagen representacional para la diferencial como si fuera una magnitud infinitamente pequeña —un infinitésimo como referente previamente dado— Leibniz responderá que esas magnitudes infinitamente pequeñas "... no son más que principios de acción"... [Carta a Varignon 20 Junio 1702. *Math. Schriften* V 106-110]

* El ideograma o colección de caracteres y líneas propio de lo algebraico, del análisis infinitesimal, se refiere, auténticamente, a sí mismo aunque no como símbolo, sino como ideograma. Una referencia no sólo a objetos, conceptos, ideas sino a una intencionalidad potencial que hay que actualizar. Muestra principios de acción además de mos-

trarse a sí mismos y referirse a. Y es lo que hay que ver, lo que hay que captar. En esa captación los ideogramas muestran una generalidad o universalidad que trasciende la concreción singular de su trazado gráfico, de su creación original más o menos convencional o arbitraria, de su presentación singular, de su posible referente representacional, único o múltiple.

Consecuente, en su obligada captación 'visual', y que por serlo es globalizadora frente a la transcripción fonética de elementos señalizados, discretos, se encierra su potencial aplicabilidad a campos muy distintos de aquel en el que puede tener su origen. En campos de objetos cualesquiera que pueden llegar a ser, incluso, ellos mismos.

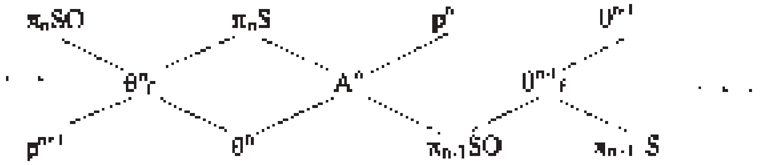
Es la manera en la que el ideograma constitutivo del hacer matemático encierra, por un lado, una potencialidad constructiva con la que realizar modelos del mundo real. Potencialidad que reflejó el cálculo infinitesimal desde sus orígenes a través del desarrollo en serie de potencias de una función —linealización en su versión newtoniana— o en la formulación en ecuaciones diferenciales y en los intentos de su resolución —que es la potencia de la escuela leibniziana y no sólo la elección de unos símbolos más adecuada que la del fluxional newtoniano, como se quiere dar a entender desde algunos tópicos históricos.

Por otro lado, este papel del ideograma, amalgamado por el lenguaje natural, reafirma uno de los avances que el hacer matemático ha supuesto para la definitiva plasmación de la burbuja o ámbito conceptual frente al razonamiento propio del ámbito simbólico y que se mantiene en el razonamiento calificable de normal: la capacidad de razonar con significado pero sin referencial representacional directo. (Aquí cabe mencionar cómo se razona en un espacio geométrico euclídeo que es radicalmente antiperceptivo.) Razonamiento distinto al que se establece desde el sólo lenguaje fonológico, representacional, argumentativo. Cuando este último, se *trasvasa* al lenguaje ideográfico del hacer matemático, se *trasvasa*, en el fondo, una falacia como la descriptivista, como la calificara Robles [1990] al referirse a las críticas de Berkeley.

El razonamiento matemático no cae sin embargo en mero formalismo sintáctico porque supone un proceso constructivo creador de modelos, aplicables posteriormente a lo real concreto, con lo que reafirma el poder instrumental del hacer matemático. Aplicabilidad que no es otra cosa que la mostración de una universalidad que se convierte en modelo con muy diferentes interpretaciones.

* Si me he detenido básicamente en el hacer figural, caben las mismas afirmaciones, quizá más radicalizadoras, en el hacer global. Un

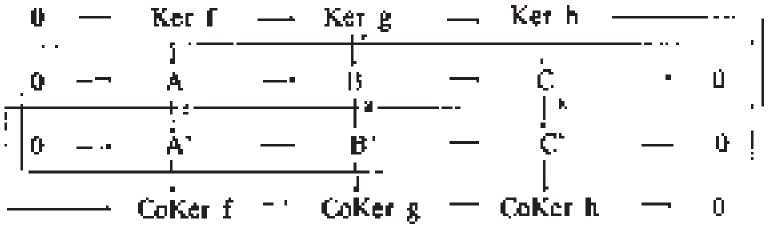
Hacer global en el cual se mantiene la norma intencional a través de los ideogramas con los que se genera. Hacer global que requiere de una ideografía o pasigrafía especial —y es lo que pusieron de relieve Frege, Peano, — apoyada en la notación de cuantificadores, pertenencia, variables sobre conjuntos, estructuras, flechas para morfismos ... Un hacer donde un diagrama reticular como el de Kervaire-Milnor se hace texto, imposible de transcribir de manera directa, imposible de enunciar en serialización temporal porque ha de captarse de modo global,



o los diagramas conmutativos en Algebra homológica como el de los grupos abelianos con sus morfismos correspondientes, donde las flechas indican las sucesiones exactas y que llevan a que el morfismo

'Ker h → Coker f'

es el objeto construido a partir de los morfismos verticales f, g, h.



4. Desde las dos constataciones realizadas, desde una breve incursión por los momentos originarios del hacer figural, he señalado que una de las claves constitutivas del hacer matemático se centra en el manejo del ideograma, que no es transcripción fonética sino acción intencional constructiva independiente de lo fonológico. Y, de aquí, todo el halo de expresiones que se ligan con este hacer: desde la necesidad de 'ver' los elementos centrales de una demostración o 'ver' un problema, a los razonamientos 'ciegos' producidos a través de un cálculo ... Desde lo fonético, las expresiones correspondientes irían ligadas, quizá, al verbo oír y no, precisamente, al verbo ver. Igualmente, se podrían señalar las pugnas por caracterizar el razonamiento deductivo matemático, siempre diferente al de la argumentación propio de la dialéctica y la

retórica, o de lo judicial y, por supuesto, de la derivación sintáctico-formal ...

Desde estas constataciones, desde sus consecuencias, han de rechazarse las dos posiciones que he citado al comienzo y que pretendían justificar la tensión entre el lenguaje natural fonológico y el hacer matemático por eliminación de una de las dos componentes.

En primer lugar, respecto al tópico, insistir en que el lenguaje mixto y el natural no sólo se diferencian en el vocabulario por lo cual la expresión matemática se equipara a la taurina o a la gastronómica. Los ideogramas son elemento constitutivo y punto de partida del hacer matemático, imposibles en general de transcripción o discurso fonológico. Punto de partida que provoca la generación tanto de nuevos elementos que se convierten en soporte de nuevas propiedades como de formas de razonamiento, básicamente existencial, que propician alcanzar objetos o estructuras a los que hay que dotar, posteriormente, de contenido referencial, por lo que posibilitan la construcción de modelos posibles de lo real ...

Por elemento constitutivo, el ideograma y, con él, la materialización del discurso y hacer matemático, requiere, en su manejo, del encerado, de la hoja de papel como algo básico y no como auxiliar o instrumento apto para la comunicación o la transmisión. Encerado y hoja de papel bidimensional que hace que cualquier ideograma en él establecido se capte en su totalidad, globalmente, frente a la atomicidad y linealidad del discurso fonético, hablado.

Con la advertencia de que el espacio en el que se inscribe no es algo inocuo o inerte, sino que posee un valor dependiente de los elementos que en él se van inscribiendo, ya que es el que delimita la visión de conjunto y, por ello, se hace marco perceptivo que posibilita la creación de relaciones potencialmente significativas entre los ideogramas que en él se van estableciendo.

El simbolismo gráfico posee una lógica propia: cuando se yuxtaponen dos o más ideogramas se crean unas relaciones sintagmáticas que transforman el valor individual de los elementos combinados: simultáneamente, establecen un ritmo apoyado en nexos internos de los ideogramas, ritmo que condiciona una capacidad directora de búsqueda —y es una de las claves de su papel en la demostración—, sin olvidar que esa materialización muestra también unas posibilidades de carácter mnemotécnico ...

En segundo lugar, y respecto a la concepción que ve la matemática como teoría o sistema formal cerrado, conjunto de proposiciones que se expresan en un lenguaje artificial pero que no es lenguaje por ninguna característica propia: el ideograma no encierra sólo capacidad representacional y, con ella, necesidad de referirse a objetos o conceptos, sino que es principio o norma de acción.

Como la clave de una teoría deductiva es el ser cerrada respecto a la demostración, Frege y quienes le siguen pretenden clarificar esta noción. Pretensión por la que termina reduciéndose a derivación sintáctica formal, a sucesión de proposiciones. Ello supone una confusión no sé si profunda o de principiante: identificar la demostración con la presentación de la demostración. La demostración es norma; la sucesión, la derivación formal, es resultado, producto de haber ejecutado la demostración. Dos elementos conceptuales que es preciso distinguir. Así, cuando Frege y quienes le siguen pretenden reducir la inducción completa a juicio lógico y, con ello, la aritmética a lógica, el principio de inducción completa lo presentan en forma de juicio y, como tal, es verdadero o falso. Sin embargo, la inducción completa no es sólo el juicio en el que se expresa, es una norma, una potencialidad o método demostrativo que no es, ni puede ser, verdadero o falso. Es una regla constructiva.

El pretendido reduccionismo del hacer matemático a teoría proposicional manifiesta esta confusión avalada por, al menos, otras dos: por un lado, no tener en cuenta, en el terreno del lenguaje, que en la comunicación humana el modelo del código, único que parecen manejar, ha de complementarse con el de contextos y recreaciones. Quiero decir, cualquier texto escrito, como objeto semiótico, es un diagrama que carece de valor en sí, como objeto, si no se tiene presente el valor potencial de ser actualizado en cada momento, en cada instante. Y es ese valor potencial el que posibilita la constitución real del texto como objeto semiótico.

Por otro lado, la pretensión de querer justificar o fundamentar unas normas de acción por sólo su expresión como juicios lógicos. Las reglas derivativas lógicas difícilmente pueden justificarse en un interior proposicional de la lógica. En ésta se puede establecer, tras un previo análisis crítico, qué axiomas y reglas se eligen para el desarrollo de una teoría, pero lo que no se puede es fundamentarlas. Esa justificación puede plantearse desde otros terrenos, y ello conduciría a debate diferente, en el supuesto de que las reglas derivativas son codificaciones de aspectos de una conducta de adaptación de especie; o quizá tengan un origen manipulatorio . . .

5. He venido indicando que el ideograma, junto a lo representativo conceptual, posee como factor constitutivo un elemento activador y

que, por su valor potencial, requiere ser actualizado para su auténtica constitución real. Recuerdo a Kant cuando indicaba que si un matemático 'habla' de recta, lo que hace es construir, actualizar el ideograma correspondiente en el papel, la pizarra o la imaginación: el matemático traza una línea ... Quiero decir el valor potencial del ideograma, como elemento constitutivo, lo es para quien sepa verlo y, con ello, actualizarlo. Y aquí se encierra la problemática del no sólo 'ver' sino 'ver cómo'. Una problemática que va ligada, desde mi punto de vista, al papel del aprendizaje. Aprendizaje obligado, como aquél que lleva, en lo Simbólico, desde el aprendiz hasta el iniciado.

Sólo para quien ha aprendido se presenta la relación constitutiva del ideograma en cuanto tensión interna establecida por la composición, al menos cuaternaria, de: el símbolo en sí, quien lo ve, aquello que representa para quien lo ve y la potencialidad constructiva que ha de captar quien lo ve. Tensión, además, interna a un contexto noosociológico y temporal determinado.

Y el aprendizaje implica que lo que hay que captar no es el símbolo gráfico más o menos convencional y no icónico, sino la tensión entre las componentes que en el mismo se encierran. De aquí la necesidad de una praxis permanente en el hacer matemático, de una práctica mediante la resolución de problemas con la necesidad de captar los mecanismos que en tal resolución se encierran, así como en la necesidad de aprender a demostrar teoremas. Bien entendido que, en este último caso, no como simples sucesiones de proposiciones.

Concretándome al principio de inducción completa antes mencionado, cito la consideración de Wittgenstein cuando afirmaba que la inducción completa es 'inexpresable' porque la misma nos capacita para 'ver una posibilidad infinita'. Afirmación de acuerdo parcial con la posición de Poincaré, quien negaba que la inducción completa pudiera reducirse a juicio lógico o a definición, manteniendo que tenía que ser postulada ya que era la afirmación de la 'potencia del espíritu' para captar la reiteración indefinida una vez que la misma se hace actualmente posible —actualización a partir de la reiteración de los pasos al andar, por ejemplo—.

Ello implica que la inducción completa sólo se muestra de modo indirecto: lo que de modo directo se presenta son sus instancias; instancias gráficas como símbolos o ideogramas de la misma. Manipulando instancias concretas, experimentando con ellas se logra la captación del principio y su saber aplicarlo en circunstancias adecuadas. Cada instancia, un elemento singular para su captación universal, para la aprehensión de lo que el ideograma representativo del principio de inducción completa encierra. Y lo mismo vale para cualquier demostración, para cualquier problema; en el fondo, para hacer matemática.

Aprendizaje que muestra el papel de lo que puede calificarse de 'experiencia matemática', o plano teorético dirigido, en la captación y dominio del hacer matemático. Y ello de acuerdo con Peirce cuando mantenía que el razonamiento deductivo parte de la observación 'visual', de la observación de imágenes que exhiben las relaciones sobre las cuales se razona, por lo cual

> todo razonamiento deductivo encierra un elemento de observación, dicho de otra manera, la deducción consiste en construir un icono o diagrama cuyas relaciones entre las partes presentan una analogía completa con la de las partes del objeto de razonamiento; en experimentar sobre esa imagen en la imaginación, y en observar el resultado de manera que se descubran las relaciones ignoradas y ocultas entre las partes. (CP 3,363)

Salvo en que diagrama se identifica aquí con icono, es decir, con signo unido a su objeto por una relación de similitud o analogía —lo cual únicamente sería válido para un hacer como el geométrico euclídeo, con las salvedades antes apuntadas, y no para un hacer como el algebraico o, más aún, para un hacer como el global— hago mías las palabras de Peirce.

Más aún, la demostración matemática es, siempre, *ad oculos*, con elemento de carácter observacional pero siempre dirigido para que sea un 'ver como', una observación dirigida que puede condensarse en el término 'experimental'. Pero hay que aprender a hacer experimentos, a 'ver como', y este es uno de los papeles del aprendizaje.

Aprendizaje que, como he indicado, depende también del contexto social, del momento histórico en el que se realiza. Afirmación consecuente con la admisión de que el hacer matemático es una producción y un producto de algunos miembros de ciertas subespecies humanas.

Un aprendizaje básico para llegar a saber cuándo, en el lenguaje mixto en el que vehicula su trabajo el matemático, un símbolo es, en esencia, un ideograma con su principio constrictivo que condicione su actualización, bien en cuanto a representación objetual o referencial, bien en cuanto a norma y método en sí.

Y es clave alcanzar experiencialmente este saber porque, si se obtiene la comprensión del elemento constitutivo del ideograma, no sólo falacias descriptivistas o referenciales se vienen abajo sino, lo que es más importante, se hace matemática y, desde este hacer, se puede dar la vuelta y pensar sobre el mismo, un pensar interior y no exterior, un exterior que lleva en muchos casos a confundir la presentación o producto final, ya acabado, con el núcleo o producción del hacer matemático.

Referencias

DIEUDONNÉ, J. 1953. "Lógica y Matemáticas". *Revista de Matemáticas Elementales*. 2 (1) 1-7 Bogotá.

DHOMBRES, J. 1993. "La figure dans le discours géométrique: Les façonnages d'un style". *Theoria* (2ª ép.) 8 (19): 51-88.

GARDIES, J-L. 1993. "Les ambigüités du formalisme". *Revue Philosophique* 3: 331-374.

LORENZO, J. de. 1992. *Kant y la Matemática. El uso constructivo de la razón pura*. Madrid. Tecnos.

QUESADA, D. 1991. "¿Es la matemática un lenguaje?" *Revista de Filosofía* 3ª ép. 4 (5) 31-43.

ROBLES, J. A. 1990. *Estudios berkeleyanos*. México: UNAM.

SHERRY, D. 1991. "The Logic of Impossible Quantities". *Stud. Hist. Phil. Sci.* 22 (1) 37-62.

TAIT, W. W. 1986. "Truth and Proof: The Platonism of Mathematics". *Synthese* 69: 341-370.

UNGURU, S. 1994. "Algunas consideraciones sobre la geometría de la Cónica". Ponencia en el I *Coloquio Internacional de Filosofía e Historia de las Matemáticas*. México, 17 de junio.

Javier de Lorenzo, licenciado en matemáticas y licenciado y doctor en filosofía por la Universidad Central de Madrid, es profesor titular de lógica y filosofía de la ciencia en la Universidad de Valladolid. Sus campos de investigación se centran, básicamente, en la historia y filosofía de la matemática. Entre sus numerosas publicaciones cabe mencionar *El método axiomático y sus creencias* (Tecnos, Madrid, 1980), *Introducción al estilo matemático* (Tecnos, Madrid, 1982), *Experiencia de la razón* (Universidad de Valencia, 1991).