■ *artículos* ■

La filosofía de C. S. Peirce sobre los conjuntos infinitos

Un estudio sobre el interés de Peirce en el infinito, relacionado con el nacimiento de las matemáticas en América y el trabajo contemporáneo de Cantor y Dedekind

Joseph W. Dauben
Herbert H. Lehman College, C.U.N.Y.

Temo que pareciese que les hablo en chino, así de diferentes son sus mentes y la mía.

Charles Sanders Peirce.

Las matemáticas en los Estados Unidos de América, como en general la ciencia americana durante el siglo XIX, permanecían subdesarrolladas, dependían básicamente de los modelos europeos y lograron pocas contribuciones propias, independientes y reconocidas. Aunque presidentes como Jefferson pondrían un interés pedagógico en las matemáticas y su enseñanza y mientras Garfield, de hecho, descubría una interesante variación sobre las muchas pruebas del teorema de Pitágoras, las matemáticas americanas en general permanecieron sin respaldo, ya fuese institucional o financiero hasta finales de siglo.

A pesar de la falta de incentivos para hacer una carrera matemática en América, hubo, sin embargo, algunos matemáticos que hicieron importantes contribuciones a las matemáticas en los Estados Unidos. De éstas, una de las más interesantes, la de Charles Sanders Peirce, quien hizo descubrimientos fundamentales, bastante independientes de los de sus colegas europeos, en teoría de conjuntos y lógica matemática. Este escrito explora la naturaleza y significancia de las contribuciones de Peirce.

Aunque su estudio sobre continuidad lo llevó a producir resultados en cierta forma paralelos a las contribuciones de Georg Cantor y Richard Dedekind en Alemania, el trabajo de Peirce era dramáticamente diferente en sus orígenes, inspiración y esencia. Para comprender el destino de Peirce y sus estudios matemáticos sobre la continuidad y el infinito, es necesario decir, en primer lugar, algo sobre el estatus de la ciencia americana en general y en particular de las matemáticas americanas en el siglo XIX. Siguiendo un breve bosquejo de los desarollos más importantes de la teoría de conjuntos, en gran parte en las manos de Cantor y Dedekind, tenemos entonces que volver a considerar a Peirce, sus matemáticas, y finalmente las razones por las que su genio y numerosos puntos de vista no ejercieron más influencia sobre sus contemporáneos que ellos.

Las matemáticas en los Estados Unidos en el siglo XIX

Alexis de Tocqueville, al imponer el estatus de ciencia en los Estados Unidos a principios del siglo XIX, hizo notar que los americanos encontraban más fácil el tomar prestada su ciencia de Europa que buscarla con ahínco. "Estoy convencido", escribió, "de que si los americanos estuviesen solos en el mundo. . . no habrían sido lentos en descubrir que el progreso ya no puede lograrse en la aplicación de las ciencias sin cultivar la teoría de éstas". Las matemáticas, como la dama de compañía, en particular de la astronomía y la física, fue tan esencial y al mismo tiempo tan descuidada como las ciencias básicas en América hasta bien entrada la mitad del siglo. En gran medida de Tocqueville encontró la rara combinación de democracia y oportunidades económicas, responsables de la indiferencia de los Estados Unidos a las ciencias básicas. Con ésto, quería decir que el ideal igualitario alentaba la idea de que cualquiera, con arduo trabajo, podría transformar los recursos nacionales en fortuna personal. Por lo tanto, si en ciencia se perseguía algo, era sólo el medio inmediato por el cual podría explotar la naturaleza.

Europa tenía sus monarquías y aristocracias para alentar la ciencia pura, pero de Tocqueville estaba seguro de que la ciencia podría florecer de igual manera en los Estados Unidos, si tan sólo las autoridades aquí constituidas diesen apoyo y estímulo.

Por lo tanto, mientras que la utilidad era altamente elogiada por razones religiosas, políticas y empresariales, se le mostraba poco interés al estudio abstracto que parecía no ofrecer evidencia de utilidad inmediata. Las matemáticas no eran la excepción. De hecho, hasta finales de siglo, la mayoría de los matemáticos americanos eran personas de medios económicos y, el caso de Josiah Willard Gibbs es ilustrativo. Gibbs enseñó en la Universidad de Yale durante muchos años sin percibir sueldo. En un país en el que el "éxito" era más que a menudo asociado con prosperidad económica, no es de sorprender que los científicos en América no tuviesen, virtualmente, participación en el gobierno o en asuntos públicos, a diferencia de sus colegas europeos. Aún en 1902 el matemático C. J. Keyser de la Universidad de Columbia escribiría:

> Conozco personalmente seis jóvenes, cinco de los cuales han abandonado la búsqueda científica y el (sexto), que sólo ayer me dijo que estaba también contemplando seriamente abandonarla, todos ellos, por la razón que, según alegan, la carrera universitaria no provee en absoluto, o tardíamente, suficiencia económica y por lo tanto alivio a una virtual condena al celibato.

En lo que se refiere al gobierno americano, éste rehusó constantemente apoyar cualquier organización nacional para la ciencia hasta después de la guerra civil, y fue sólo a través de la donación de un inglés que finalmente se estableció el Instituto Smithsoniano. De hecho, a menudo los americanos eran mejor conocidos en el extranjero que en su país. Nada refleja tanto el estado tan pobre de la ciencia americana, aún al final del siglo, como un cuento que una vez relató J. J. Thomson:

> "Cuando en 1887 se fundó una gran Universidad, el presidente recientemente electo fue a Europa en busca de profesores. Llegó a Cambridge y me preguntó si podía decirle de alguien que fuese un buen profesor en física molecular. Le dije: "No necesita venir a Europa para eso; el mejor hombre que pueda encontrar es el americano Willard Gibbs". "Oh", dijo, "se referirá usted a Wolcott Gibbs", mencionando a un químico prominente. "No, no me refiero a él", le dije, "quiero decir Willard Gibbs", y le referí algo sobre el trabajo de Gibbs. Se sentó, pensativo, durante uno o dos minutos y entonces dijo, "Me gustaría que me diese otro nombre. Willard Gibbs no puede ser un hombre con tanto magnetismo personal, o ya sabría yo de él".

Los matemáticos en Estados Unidos podrían culpar su falta de estatus a la apatía e indiferencia. Un matemático, al evaluar la productividad matemática en los Estados Unidos, repitió las palabras de Tocqueville cuando dijo que "la actividad educacional y científica llegaría a ser en general comprendida y especialmente en la proporción en la que aprendemos a valorar las cosas de la mente, no únicamente por su utilidad, sino también por su valor espiritual. La evaluación fue de C. J. Keyser, y en parte culpó del bajo nivel de productividad de los matemáticos americanos, poco antes de finalizar el siglo, a su aislamiento, al decir que "en general no había sospecha de que, del otro lado del Atlántico, las matemáticas fuesen una ciencia vasta y en auge".

Durante el siglo XIX, las matemáticas, como las ciencias en general, se hicieron más complejas, más técnicas, más especializadas. Se requería de un entrenamiento más formal, más profesionalización y, al principio, los americanos siguieron el modelo que de Tocqueville describió en 1835. Si los estadounidenses deseaban aprender las técnicas más recientes para estudiar las últimas teorías, se iban a Europa, muchos a Alemania, a centros matemáticos tales como Berlín y Göttingen. Raras veces los europeos venían a América. Quizás ninguno tuvo más influencia en el futuro de las matemáticas americanas, en esta especialidad, que J. J. Sylvester, cuyo arribo a América acompañó a otro desarrollo significativo. Como una contraparte al crecimiento de la especialización de la ciencia europea, se estimaba en mucho, como imperativo, la enseñanza avanzada, a nivel de postgrado. En consecuencia, siguiendo los ejemplos de las grandes escuelas europeas como la Ecole Polytechnique y la Universidad de Berlín, la primera escuela de postgrado se fundó en Baltimore.

En 1876 se abrió la Universidad Johns Hopkins y una de sus primeras y grandes atracciones fue el matemático inglés J. J. Sylvester. Él y Johns Hopkins ejercieron una enorme influencia sobre las matemáticas americanas, en parte a través del *American Journal of Mathematics*, editado por Sylvester y que se inició en la Johns Hopkins en 1878. Fue quizá sintomático que no sólo era la revista originalmente editada por un inglés, sino que en gran parte los artículos eran escritos por extranjeros. Ya que Johns Hopkins era principalmente una escuela para postgrado, ésta sirvió para alentar estudios de postgrado en otras Universidades en los Estados Unidos. A finales de siglo se fundarían dos instituciones similares: la Universidad Clark en Worcester, Massachusetts, en 1889 y la Universidad de Chicago en 1892, la cual ejerció una gran influencia en el medio oeste.

Pero el factor más poderoso en organizar y promover la investigación matemática en América fue la Sociedad Matemática Americana. Su precursor, el Club Matemático de Nueva York, fundado en 1888, al principio no era sino un pequeño grupo que se reunía en la Universidad de Columbia. Pero pronto el Club Matemático se convirtió en la Sociedad Matemática de Nueva York, que publicaba un boletín mensual. En 1894 esta organización de nuevo se transformó, convirtiéndose en la Sociedad Matemática Americana con casi cuatrocientos miembros. Se llevaban a cabo reuniones bimestrales; por todo el país se programaban reuniones de verano y pronto se establecieron las secciones diseminadas de costa a costa. La primera sección, fundada el 24 de abril de 1897, fue la de Chicago, encabezada por E. H. Moore. Cinco años después, en 1902, la Sección de San Francisco fue encabezada por Irving Stringham; y poco después, en 1906, la Sección Sudoeste se estableció en St. Louis por E. R. Hedrick. En lo referente a sus sociedades, revistas y matemáticos que publicaban, las matemáticas en América habían recorrido un largo camino, desde su estatus a principios de siglo, cuando la aritmética se enseñaba aún en primer año en el Harvard College y sólo se convirtió en un requisito para aceptación en 1816. A finales del siglo XIX, por muchas razones, si no por todas, las palabras del matemático francés Laisant eran en gran parte ciertas. Mientras observaba el progreso que los americanos hacían en las matemáticas, concluyó:

> Las matemáticas se enseñan en todas sus formas y en todas sus partes en numerosas universidades, se tratan en una multitud de publicaciones y es cultivada por escolares que en ningún aspecto son inferiores a sus compañeros matemáticos de Europa. Ya no son más un objeto de importación del viejo mundo, sino que se han convertido en un artículo esencial de producción nacional y esta producción aumenta cada día en importancia y cantidad.

Antes de evaluar el carácter y significado de la contribución hecha por C. S. Peirce a las matemáticas americanas, en particular a varios aspectos de la Teoría de Conjuntos, es necesario observar brevemente el estado de ese arte en Europa en ese momento. Sobre todo, al menos hasta alrededor de 1895, el desarrollo de la Teoría de Conjuntos Transfinitos era casi exclusivamente el trabajo del matemático alemán Georg Cantor.

Georg Cantor (1845-1918)

Georg Cantor, creador de la teoría de conjuntos transfinitos, publicó un teorema en 1872 que lo dio a conocer en el mundo matemático y que también marcó el principio de su trabajo en la teoría de conjuntos. Su teorema estableció la unicidad de las representaciones funcionales mediante series trigonométricas sobre dominios de los cuales ciertos conjuntos infinitos de puntos se podían omitir. La única restricción limitaba el conjunto de puntos excepcionales a conjuntos de primera especie, aquellos P para los que su n-ésimo conjunto derivado P^n era vacío para cualquier valor finito de n. Pero para proporcionar un fundamento satisfactorio a su prueba, Cantor descubrió que estaba obligado a introducir una construcción rigurosa de los números reales. Lo hizo en términos de clases de equivalencia de secuencias infinitas de números racionales sujetas al criterio de Cauchy para la convergencia, y también lo guió a formular su axioma de continuidad, que postulaba la equivalencia de continuo aritmético y geométrico. En el mismo año, 1872, Richard Dedekind (1831-1916) publicó su construcción de los números reales en términos de sus famosas "cortaduras", y no faltó el reconocimiento al trabajo similar que Cantor había hecho en su artículo sobre series trigonométricas. Los resultados inesperados de Cantor parecen haber espoleado su interés en las propiedades de dominios continuos en general y más tarde, en 1873, descubrió que el conjunto de los números reales no era numerable. En 1879 pudo por fin publicar un resultado sorprendente mostrando que cualquier espacio continuo de dimensión n podía mapearse (aunque no continuamente) uno a uno sobre la recta real. Cantor estaba tan poco preparado para este descubrimiento que este hecho lo llevó a una de sus más citadas observaciones: "Lo veo y no lo creo".

La primera presentación sistemática de Cantor de sus números transfinitos se publicó en 1883. Su *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* contenía tanta filosofía como matemáticas, una combinación que sería también característica de gran parte de la investigación de C. S. Peirce. En los *Grundlagen* Cantor introdujo sus números ordinales transfinitos. Comenzó por identificar dos principios de generación. El primero producía nuevos ordinales por medio de la suma sucesiva de unidades, es decir 1, 2, 3, . . .

n, $n + 1, \ldots$ El segundo principio iba dirigido a presentar un nuevo número que representara la totalidad de todos los ordinales generados por el primer principio cuando una secuencia tal continuaba sin finalizar. Por ejemplo, aunque no se permitía pensar en un último número natural, se podía colocar un último número después de todos los números naturales. Cantor definió a este número como ω y representaba la totalidad de todos los enteros positivos en su orden natural. De esta forma era posible aplicar el primer principio de generación para producir ordinales transfinitos más grandes: $\omega + 1$, $\omega + 2, \ldots$, $\omega + n, \ldots$ Al continuar esta secuencia sin fin, Cantor se avocó una vez más a su segundo principio de generación para producir el primer número que sigue a aquellos de la forma $\omega + n$, a saber el ordinal 2ω, etc. Más tarde, Cantor definiría a segunda clase numérica de tales ordinales transfinitos como la clase $Z(\aleph_0)$, la totalidad de los tipos de orden α, de conjuntos bien ordenados de cardinalidad $\aleph_0$. A la potencia de esta segunda clase $Z(\aleph_0)$, Cantor la denotaba por el segundo número cardinal transfinito $\aleph_1$.

Cantor, desde luego, no era el único matemático interesado en las propiedades de los conjuntos infinitos. En 1888, Richard Dedekind publicó un pequeño panfleto, *Was sind und was sollen die Zahlen*, en el que introdujo, entre otras cosas, la distinción entre colecciones finitas e infinitas que desde entonces se convirtió en clásica: "Se dice que un sistema S es infinito cuando es similar a una parte propia de él mismo, en el caso contrario se dice que S es un sistema finito".

Esta definición es de especial interés ya que parece que Peirce había llegado a una distinción equivalente aún antes y por razones muy diferentes.

En 1891 Cantor publicó su famoso método de diagonalización mediante cual era posible generar una secuencia interminable de conjuntos de mayor y mayor cardinalidad. En 1874 Cantor había demostrado únicamente que el conjunto de números reales no era numerable. El resultado de 1891 era considerablemente más poderoso e impresionantemente general, ya que era capaz de demostrar que para cualquier exponente $\aleph$, la potencia $2^{\aleph}$ es mayor que $\aleph$. Si $\aleph_0$ se toma como el cardinal del conjunto numerable de números naturales, entonces $2^{\aleph_0}$ será un conjunto de cardinalidad mayor que representa al conjunto de todos los números reales. Más aún, Cantor pudo mostrar que había conjuntos de cardinalidad aún mayor que la de los números reales, por ejemplo el conjunto de todas las funciones univaluadas en el intervalo [0, 1].

Entre 1895 y 1897 apareció en los *Mathematische Annalen* el trabajo de Cantor más ambicioso y con más influencia: su "Beiträge zur Begründung einer transfiniten Mengenlehre". En la parte I (1895) presentó su teoría general de los tipos de orden de conjuntos simplemente ordenados como los racionales tomados en su orden natural (tipo η), y los reales (tipo θ); en la parte II (1897), definió sus números cardinales transfinitos en términos de conjuntos bien ordenados y exploró en detalle las propiedades aritméticas básicas de sus números transfinitos. Tuvo también la oportunidad de condenar la doctrina de los infinitesimales en el trabajo recientemente publicado del matemático italiano Giuseppe Veronese. Cantor había sido siempre un ardiente oponente de los infinitesimales, y en un momento los llamó "el infinito bacilo del cólera en las matemáticas". Al principio de su carrera Cantor rechazó la idea de los infinitesimales, y cuando Mittag-Leffler preguntó si no podrían haber otras clases de números entre los racionales y los números reales, Cantor respondió con un "no" enfático. En 1887 Cantor publicó una prueba de su imposibilidad lógica, basada, no es de extrañarse, en el carácter Arquimideano de lo que él llamaba números lineales, y algunos años después, Peano publicó una prueba similar contra los infinitesimales en su propia revista, la *Rivista di matematica*. Podría agregarse que el haber admitido los infinitesimales habría complicado enormemente la hipótesis del continuo de Cantor, la que sostenía que la cardinalidad del conjunto de todos los números reales, $2^{\aleph_0}$, era igual a aquella de la segunda clase, en otras palabras, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. El admitir los infinitesimales, además de los racionales e irracionales habría hecho esta conjetura sobre la potencia del continuo más complicada.

Al final del siglo el status del trabajo de Cantor fue traído a cuestionamiento en forma dramática debido al descubrimiento de las paradojas de la teoría de conjuntos. Mientras que Burali-Forti fue el primero en publicar su paradoja del número ordinal mayor, Cantor había descubierto las paradojas del ordinal mayor y el más grande cardinal, probablemente desde 1895. Cantor bosquejó una prueba para Dedekind en 1899, en la que concluyó que ésta era una consecuencia directa de la naturaleza paradójica de la interminable secuencia de todos los cardinales y que el continuo debe ser un conjunto cuya cardinalidad era uno de los alephs transfinitos de Cantor.

Pero en 1897 Burali-Forti aportó una conclusión muy diferente de su estudio sobre la colección de todos los números ordinales. Argumentaba que tal colección debía tener un número ordinal δ mayor que cualquier ordinal en la colección. Pero si el conjunto contuviese a todos los números ordinales, entonces debe contener a δ, y Burali-Forti se vio forzado a la contradictoria conclusión de que $\delta > \delta$. Lo cual no le reconfortó, pero a Cantor sí, el cual alegó que ésta era la clave para resolver problemas de teoría de conjuntos mucho más profundos. En lugar de eso, Burali-Forti concluyó que los matemáticos sólo podrían estar de acuerdo en abandonar cualquier esperanza de estricta comparabilidad entre números transfinitos. En 1902 Bertrand Russell construyó una paradoja estrictamente lógica e impactó a Frege al demostrar que había ciertas antinomias que formaban parte de la lógica, y consecuentemente de las matemáticas como una forma de razón estructurada.

Al considerar las paradojas de la teoría de conjuntos, en particular aquellas de los números ordinales y cardinales mayores, Peirce estuvo de acuerdo con Bertrand Russell de que esas eran, propiamente hablando, cuestiones de lógica. Para Peirce, el meollo de las matemáticas era la formación de hipótesis. En términos de teoría de conjuntos, esto significaba la determinación de qué grados de multitud entre las colecciones infinitas eran matemáticas posibles y, como veremos, Peirce obtuvo de la paradoja del número cardinal mayor un principio que creyó podría ayudar a resolver la interrogante de la verdadera naturaleza de la continuidad.

Charles Sanders Peirce (1839-1914)

C. S. Peirce, hijo de Benjamin Peirce, nació en Cambridge, Mass., el 10 de septiembre de 1839. Benjamin Peirce, profesor de matemáticas y filosofía natural en la Universidad de Harvard tuvo el cuidado de dirigir los estudios de su hijo y observó que Charles poseía una educación tan científica y rigurosa como la que podrían ofrecer él y las escuelas particulares de Boston. Al graduarse Peirce en Harvard y obtener su Sc. B. (Science Bachelor) en Química en 1863, obtuvo *summa cum laude*. Pero Peirce no iba a continuar dedicándose inmediatamente al estudio de la ciencia pura, sus intereses se dirigían más hacia el estudio del método y la lógica, y con la esperanza de obtener más experiencia en la naturaleza y método de la investigación científica se unió a la Exploración Costera de los E.U. Peirce permaneció en la exploración por más de treinta años y además de trabajar en el almanaque náutico condujo numerosos experimentos pendulum, fue asistente especial en la investigación gravitacional y dedicó gran parte del tiempo a la observación de eclipses solares.

Respecto a la enseñanza, la Universidad Johns Hopkins hizo posible que Peirce enseñara lógica de 1879 a 1884, y algo de su trabajo inicial relevante sobre problemas teóricos de conjuntos data de ese periodo. De hecho, en 1881, Peirce publicó un artículo en la Revista Americana de Matemáticas, "Sobre la lógica del número" en el que (más tarde siempre estaría orgulloso de enfatizar) había caracterizado la diferencia entre los conjuntos finitos e infinitos antes que lo hiciera Dedekind en 1888. Peirce aseveró que el *Was sind un was sollen die Zahlen* de Dedekind estaba indudablemente influenciado por su artículo, ya que Peirce había enviado una copia de éste a Dedekind. Pero el aspecto más interesante de todo el enfoque de Peirce a las matemáticas no fue la forma en la que se asemejaba a la investigación llevada entonces a cabo en Europa, sino en las formas en que difería a los enfoques dados por Georg Cantor y Richard Dedekin a los problemas de continuidad e infinito.

Cantor, como hemos visto, estaba motivado al estudio de continuo de los números reales como un resultado de su anterior estudio del teorema de representación para series trigonométricas. De manera similar, la caracterización de Dedekind del continuo y su introducción de la ahora famosa "cortadura" de Dedekind" para definir los números reales también fue inspirado por el análisis. Al tratar de enseñar los elementos básicos del cálculo diferencial, en particular los teoremas involucrados con límites, Dedekin se dio cuenta que la intuición geométrica, aunque era una guía, no era rigurosamente satisfactoria y, por lo tanto, se tornó a producir un estudio puramente matemático de la continuidad y los números irracionales.

Por el contrario, Peirce tomó un enfoque completamente diferente, su inspiración no fue el análisis y sus intereses no eran los de probar los fundamentos de las matemáticas para ofrecer un cierto principio firme del cual la teoría de funciones pudiera continuar sin dificultad. En lugar de eso, Peirce llegó al estudio de las matemáticas del infinito, los infinitesimales y la continuidad como un resultado de sus intereses en la lógica y la filosofía. En esta diferencia yace la clave para entender por qué Peirce difería tan marcadamente de Cantor y Dedekind en su enfoque al problema de la continuidad y el infinito.

La primera publicación de Peirce que describe la diferencia entre clases finitas e infinitas apareció en 1881, mientras enseñaba lógica en Johns Hopkins. Su artículo principiaba con una definición (aunque insuficiente) de la continuidad: "Un sistema continuo es aquel en el que cualquier cantidad mayor que otra es también mayor que una cantidad intermedia mayor que esa otra".

Pero, ya que los racionales serían continuos bajo esta definición, la descripción de Peirce es inadecuada, aunque sí representa un rasgo necesario en cualquier continuo. Sin embargo, Peirce en ese momento sólo iniciaba su estudio de la continuidad; el rasgo más importante de su artículo apareció casi al final, en el que ofrecía una distinción entre colecciones finitas e infinitas. Postuló que un conjunto era finito si una correspondencia uno a uno no se podía encontrar entre el conjunto y cualquier subconjunto propio. El ejemplo favorito de Peirce era un silogismo que aparecería en numerosas formas equivalentes a través de sus escritos sobre lógica y matemáticas:

Cada hotentote mata un hotentote,
Ningún hotentote es asesinado por más de un hotentote,
Por lo tanto, cada hotentote es asesinado por un hotentote".

El silogismo es verdadero sólo si el conjunto de hotentotes es finito. La forma del silogismo notada por Peirce fue debida a De Morgan, quien lo llamó el silogismo de la cantidad transpuesta. Así, el interés de Peirce en el infinito lo inspiraron estudios en lógica y las consecuencias que uno pudiera obtener del silogismo de la cantidad transpuesta.

Tratando de seguir sus intereses y continuar con su estudio sobre cantidades tanto finitas como infinitas, Peirce decidió que se requería una definición lógica y perfecta de continuidad y en 1897, al publicar "La lógica de los relativos" en *The Monist*, escribió:

> Se requiere una explicación perfectamente lógica y satisfactoria del concepto de continuidad. Esto incluye la definición de una cierta clase de infinito y, para poner ésto muy claro, es un requisito princi-

> piar desarrollando la doctrina lógica de multitud infinita. Esta doctrina permanece aún, después de los trabajos de Cantor, Dedekind y otros, en una condición inadecuada. Por ejemplo, preguntas como la siguiente permanecen sin respuesta: ¿es o no lógicamente posible que dos colecciones sean tan numerosas que ninguna pueda ser colocada en una correspondencia uno a uno con una parte o el todo de la otra? Para resolver este problema se requiere, no una mera aplicación de la lógica, sino un desarrollo mucho mayor del concepto de posibilidad lógica.

¿Pero qué quería decir Peirce con la necesidad de definir una cierta clase de infinito antes de que el concepto de continuidad pudiese ser considerado lógicamente? ¿Qué era lo "inadecuado" en el trabajo de Cantor y Dedekind? ¿Por qué desde el punto de vista de Peirce la comparabilidad de cardinales era imposible de establecer sin el desarrollo de un concepto más avanzado de la posibilidad lógica? ¿Qué quería decir Peirce, en realidad, con posibilidad lógica? Las respuestas a todas estas preguntas dependen del punto de vista de Peirce sobre el infinito y sobre un descubrimiento muy importante, uno que aparentemente lo hizo independientemente de Cantor y por el que Peirce siempre estuvo muy orgulloso (con mucha justificación).

Peirce demostró (aunque no está claro cuándo lo hizo por primera vez) que la potencia del conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado es siempre mayor que la potencia del conjunto original. En otras palabras, para cualquier exponente χ, $2^{\chi} > \chi$, un resultado, como lo puso Peirce, de "prima importancia". Empezando con el conjunto infinito menor, el conjunto de los enteros, concluyó que era posible producir en aumento conjuntos más grandes de mayor y mayor potencia. Peirce designó a la colección de todos los enteros "numerable". El conjunto de los números reales comprendía lo que él llamaba el "primer abnumeral" o la multitud "primipostnumeral". El conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números reales produjo el "segundo abnumeral" o la multitud "secundo-postnumeral", y así sucesivamente. Como siempre se puede formar de tales conjuntos el conjunto de todos los subconjuntos, Peirce notó que no podía haber multitud máxima, pero también señaló que en lo que respecta al segundo abnumeral, las matemáticas no podrían ofrecer un ejemplo de tal multitud y, agregó que, de hecho, las matemáticas no tenían ocasión de considerar multitudes tan grandes como ésta, comentario que es, como veremos, un poco desconcertante, en particular en vista de su contrucción de los infinitesimales y su afirmación de que el continuo era mayor en potencia que cualquier multitud postnumeral.

En una carta a su amigo E. H. Moore, Peirce comentaba sobre la importancia de su descubrimiento de que no existía multitud máxima: "Aquí tenemos una pista sobre la continuidad... El continuo es un General. Es un General de relación. Cada General es un continuo definido vagamente".

Por un "General" Peirce parece querer decir que no era ni discreto ni definido, "General" opuesto a particular o a algo completamente especificado. Pero, ¿qué veía Peirce en todo ésto para ayudar a resolver el misterio de la continuidad?

Peirce argumentó que si un continuo no contenía todos los puntos que fuese posible contener, entonces se presentarían huecos o discontinuidades. Por lo tanto éste era un problema de la máxima importancia para determinar cuál era la multitud máxima posible y así determinar la potencia del continuo. Pero Peirce ya había demostrado que no podía haber tal multitud mayor posible, que el proceso de formar conjuntos potencia era interminable y que por lo tanto era un proceso que permanecía potencial, indefinido. De la misma forma, si el continuo contuviese la multitud máxima posible de puntos, ésta tendría que ser el correspondiente potencial, indefinido.

Ya que Peirce consideraba la esencia de multitudes como su definitividad haciendo así posible determinar sus potencias o cardinalidades, era razonable para él, el asegurar que ya que la colección de todos los abnumerales era interminable, potencialmente infinita, y por lo tanto enteramente indefinida, no podría ser propiamente llamada un conjunto. O, en la terminología de Peirce, no podría llamarse una multitud. De la misma forma, los elementos que constituyen un continuo no pueden considerarse como comprendiendo un conjunto o multitud de objetos. Por lo tanto, la determinación completa del conitnuo era imposible ya que Peirce consideraba el concepto como intrinsicamente potencial, esencialmente general.

En consecuencia, Peirce llegó a rechazar el punto de vista de Cantor de que el continuo geométrico estaba en alguna forma hecho de una multitud de puntos. Peirce se dio cuenta de que había dos rasgos del continuo que tenían que ser considerados; uno implicaba cantidad, el otro, orden. Cantor había publicado su análisis de lo que él llamó el tipo simplemente ordenado θ del continuo de los números reales, en 1895. Sin embargo, Peirce no estuvo de acuerdo en dos cosas. La colección de puntos de cualquier continuo debe ser infinitamente mayor que cualquiera de aquellas contempladas por Cantor, porque, aseguraba Peirce, los números reales *R* como los definía Cantor, eran insuficientemente grandes para dar cuenta del continuo geométrico. Así era, argüía, debido a su descubrimiento de que el conjunto de abnumerales era interminable. Ya que la línea debe contener todos los puntos posibles y, ya que el conjunto *R* correspondía a la multitud representada por $2^{\aleph_0}$, no era posible que ésta, como una multitud completa, diera cuenta de la naturaleza de la continuidad. Mientras que, para la interrogante del orden de elementos que constituyen un continuo, Peirce sugirió que algo así como la idea misma era aproximada *si*, entre cada par de números racionales se insertaba una secuencia de números irracionales. Entre cualesquiera dos irracionales de esta secuencia, se podría empaquetar todavía otra secuencia de irracionales, y así indefinidamente. Por lo tanto, Peirce pensó que era posible que entre cualesquiera dos puntos del continuo, sin importar qué tan cercanos estuviesen, siempre se podrían insertar conjuntos de puntos de mayor y mayor multitud. El continuo podría eventualmente "encontrarse junto" y no a causa de los puntos discretos.

Peirce ilustró su caso al imaginar una serie de fotografías. No importa qué tan cercanos los intervalos, no aparecería movimiento en ninguno de ellos. Pero nuestra percepción del movimiento en el tiempo, muestra que el tiempo debe ser más que una sucesión de instantes. Más que puntos únicos y aislados, los "instantes" deben estar presentes en nuestra conciencia. ¿Qué es éste algo más? Peirce decía que (1) en un tiempo razonable existe espacio para cualquier multitud de instantes distintos. (2) Los instantes se encuentran tan cercanos que surgen y no pueden ser distintos. Y esta visión del tiempo y su continuidad influenció enormemente la propia de Peirce acerca del continuo y del estatus lógico de la continuidad. Así como partes del tiempo surgen para perder su identidad, de igual manera lo hacen los puntos de una línea. Argumentó que, si la continuidad consistiese únicamente de un tipo especial de orden de series, entonces dos líneas que debieran intersectarse, estarían en realidad introducidas una dentro de la otra, siendo ésto posible siempre y cuando los espacios entre un objeto y su "siguiente" en el orden consecutivo de cada línea, pudiesen existir. Esto desde luego sugiere que Peirce tenía una forma muy distinta de pensar acerca de la continuidad y el orden consecutivo, a la de Cantor.

Peirce, como él mismo lo acentó, tomó la palabra "continuidad" para expresar que los instantes de tiempo o los puntos de una línea, estaban en todas partes "soldados". Como prueba de esto, parecía haber estado satisfecho al decir que la justificación no era más que sentido común. Peirce concluyó que los instantes de tiempo no constituían una multitud (o conjunto cuyos elementos debían ser precisos y definidos). De hecho, la colección de instantes en cualquier continuo de tiempo tenían que ser más que cualquier multitud.

Para ilustrar su idea de la continuidad, Peirce delineó un procedimiento al que llamó interpolación en el intervalo unitario y contenía representaciones decimales dadas sólo con los dígitos 0 y 1. En el paso (I), había sólo una interpolación, en el paso (II) había dos, en el paso (III) había cuatro, en el paso (IV) había ocho y en el paso *N* habría 2^{N-1}. Esquemáticamente:

	0.000...								1.000...
PASO (I)					.100...				
(II)			.010...				.110...		
(III)		.001...		.011...		.101...		.111...	

Aquí Peirce encontró, según lo dijo, una "premonición de la continuidad". Al llevar a cabo este procedimiento se haría un número infinito no numerable de interpolaciones. De alguna manera este proceso era para ayudar a Peirce a explicar cómo el continuo era capaz, según sus palabras, de "juntarse". Ninguna colección finita podría "juntarse" en ningún orden, ni tampoco una colección infinita numerable si se considerase en una forma bien ordenada. La dificultad en describir la continuidad de la línea real, creía Peirce, se reducía al hecho de que los números *per se* nunca podrían dar cuenta de la continuidad. Los números no expresan otra cosa que el orden, creía, de objetos discretos. Nada discreto podía posiblemente ser lo suficientemente numeroso para responder por el continuo.

Por ejemplo, Peirce notó que al suponer que la colección contable del conjunto de puntos racionales estaba completamente presente en la línea, uno está en efecto suponiendo también la colección de puntos irracionales en el sentido de que los irracionales podían considerarse como interpolados entre los racionales. Por lo tanto, el conjunto numerable de racionales llevaba consigo la existencia de una colección no numerable de puntos, esto es, la primera multitud abnumeral de números irracionales. Exactamente de la manera, dijo Peirce, el sistema de puntos irracionales en una línea, guiaba a una colección secundo-postnumeral de puntos interpolados entre los irracionales. Esta colección secundo-postnumeral incluía para Peirce sus infinitesimales y es posible comprender más claramente el papel que jugaban, al regresar por un momento a su diagrama de las interpolaciones decimales.

En una carta a M. F. C. S. Schiller en 1906, Peirce explicaba que por un infinitesimal Leibniziano del primer orden, quería decir una cantidad más pequeña que cualquier cantidad positiva finita. Esta era la primera cantidad después de la secuencia .1, .01, .001,. . . Peirce creía que era imposible probar que no había tal cantidad. De hecho, creía que a sus infinitesimales se les daba una especie de aprobación por naturaleza, ya que él tomaba la existencia de éstos como necesaria para la física. Para validar a este reclamo de la realidad física de los infinitesimales, Peirce se refirió a la experiencia de la memoria. La percepción del paso del tiempo debe extenderse, dijo, más allá de un sólo instante. Sin embargo, Peirce no podía ver cómo tales fenómenos podrían ser satisfactoriamente explicados a menos que se creyese que el tiempo es estrictamente infinitesimal. Aún más, había razones de la física que también establecían la existencia necesaria de magnitudes infinitesimales. En una carta escrita en 1900 a P.E.B. Jourdain, Peirce sacó a relucir un tema del que Cantor había hecho un esquema, pero que nunca desarrolló, en un pequeño artículo en 1885. Cantor había conjeturado que, para explicar satisfactoriamente los fenómenos de la naturaleza, uno debía suponer dos clases de mónadas, materiales y etéreas. Conjeturaba que la potencia del conjunto de todas las mónadas materiales era numerable, de cardinalidad $\aleph_0$, mientras que el conjunto de mónadas etéreas era equipotente al segundo cardinal, $\aleph_1$. Peirce aplicó esta idea para explicar cómo podía actuar la materia en el cerebro para producir el pensamiento. Peirce equilibraba dos fluidos, un torbellino de mónadas-materia y un torbellino infinitamente ingenioso de mónadas-alma, en el que los diámetros de las mónadas-alma se debían tomar como infinitesimales de orden infinito, que Peirce sentía era muy apropiado para el carácter de las mónadas-alma. A esta teoría se le dio el nombre de "teoría intervorticia". Todo esto ayudó a Peirce a convencerse de que con opuestos físicos para sus infinitesimales lógicos había una justificación pragmática para discutir su validez.

La razón más importante de Peirce para insistir en que un infinitesimal fuese aceptable, involucraba su autoconsistencia. Lógicamente, no siendo contradictoria, no había razón para no admitirlos en las matemáticas. Aunque Peirce no llevó a cabo una cuidadosa investigación matemática sobre las propiedades de sus infinitesimales, ni tampoco se comprobó con ninguna investigación de los sistemas no arquimedeanos en general, era un proto-proponente del análisis no-estándar al creer que posiblemente había ahí más para comprender la naturaleza de la continuidad que lo que los racionales e irracionales juntos pudiesen lograr explicar.

Para hacer la idea de Peirce lo más clara posible, sería de gran ayuda el hacer un bosquejo de sus razones para argüir que los racionales e irracionales juntos eran insuficientes para dar cuenta de la naturaleza de la continuidad. Mientras que Cantor y Dedekind consideraban a los números irracionales como complemento de los racionales y por lo tanto que conferían completitud a los números reales, Peirce vio la relación entre los racionales y los irracionales en una forma un tanto diferente. Concluyó que existía una especie de "sucesividad" en los reales que de hecho constituía una ruptura de la continuidad. Supongamos, argumentaba, que tenemos una idea clara de una secuencia de números reales. Si tenemos una idea clara de su orden, se puede suponer que cualquier conjunto de objetos suficientemente numerosos puede ser ordenado en forma similar. Supongamos que cada uno de estos objetos es substituido por una secuencia de puntos, semejantes en orden a los números en el intervalo abierto (0, 1). Pero no existe razón para detenerse aquí y Peirce continúa substituyendo cada punto de esas series por otras series, y así sucesivamente, sin final. Según sus propias palabras:

> El resultado es que en conjunto hemos eliminado puntos. Tenemos una serie de series de series, *ad infinitum*. Cada parte, por cercanamente que se designe, es aún una serie y divisible en más series. No existen puntos en tal línea. No existe un límite exacto entre cualquiera de las partes.

Sería más fácil interpretar el significado que Peirce asignó a sus infinitesimales para las matemáticas si hubiese comentado en forma explícita los axiomas de continuidad de Cantor y Dedekind, que postulaban la equivalencia del continuo aritmético estándar Arquimedeano y el continuo geométrico. Pero todo lo que tenemos es el alegato de Peirce de que los números reales eran insuficientes para dar cuenta de la continuidad del espacio y el tiempo. Mientras que en el análisis, sin embargo, nunca tuvo la necesidad de considerar multitudes mayores en magnitud que aquellas del primer abnumeral, lo que significaba que el conjunto de números reales era suficiente para los intereses del análisis y quizá para todos los de las matemáticas.

Peirce deseaba explorar las fronteras lógicas de lo posible en términos de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño y no encontró contradicciones lógicas o fuertes en uno u otro concepto. Ya que su interés era originalmente filosófico, es quizá más fácil comprender por qué nunca sometió sus ideas a un análisis matemático más inquisitivo que el que hizo.

A la larga los infinitesimales de Peirce permanecieron más bien vagos que como entidades matemáticas definidas rigurosamente. Nunca sugirió en qué forma podrían ser útiles en el análisis. Desde el principio había estado inspirado sólo por las implicaciones lógicas del silogismo de la cantidad transpuesta y la lógica de las relaciones. Por lo tanto, a diferencia de Cantor, no estaba interesado en desarrollar las propiedades aritméticas de sus ideas, ya que su existencia como números no tenía para él mayores consecuencias. Estaba interesado en eliminar un profundo problema filosófico desde hacía mucho tiempo, a saber, el del continuo, y sentía que conceptualmente había encontrado un enfoque al asunto que era el más satisfactorio de todos.

Finalmente, ¿cómo podemos ahora poner todas estas ideas juntas para interpretar la afirmación de Pierce de que "el continuo es un General", queriendo decir con ello que no podía ser definido como un conjunto, según el sentido de Cantor, de una colección de elementos distintos, y su otra afirmación de que "El infinito no es sino un giro peculiar dado a la generalidad?" Peirce tomó la generalidad para involucrar al infinito potencial, en el que cualquier caso no general, cualquier caso específico, se completaba en un sentido u otro. También tomó al infinito como potencialidad, algo nunca completo y, por lo tanto, éste también reposaba en la generalidad. El razonar sobre tales asuntos —notó quizá con muy poco énfasis— era siempre en extremo confuso. Casi todos los metafísicos, y aún los matemáticos, agregó, han caído en trampas referentes al infinito donde el "suelo era esponjoso". El problema inevitablemente surgía de cuantificadores como "todo y cada", pero si uno estuviese siempre seguro de determinar cómo los objetos en cuestión eran seleccionados, creía que el razonamiento erróneo fácilmente podía evitarse. El problema con la colección de todas las multitudes abnumerables era simplemente que no podía considerarse como completa. Era auto-generadora, sin fin. Tales colecciones eran tan grandes que ya no eran discretas, y al no ser completas, no se podía dar una determinación definida de su magnitud. Eran potenciales y, como tales, generales. En la misma forma, la línea era general, indeterminada, ya que entre cualesquiera de sus puntos, Peirce imaginó que se podrían empaquetar más, representando colecciones supernumerosas. Para citar directamente a Peirce:

> Tales colecciones supernumerosas se juntan por necesidad lógica. Sus componentes individuales ya no son distintos o independientes. No están supeditadas al continuo sino que son fases expresivas de las propiedades de éste.

Peirce ofreció una ilustración gráfica. Supongamos que una colección de navajas fueran a cortar la línea. Siempre que no incluyeran una colección supernumerosa, la línea sería cortada en pedacitos, cada uno de los cuales todavía sería una línea. Por lo tanto, Peirce urgía a los matemáticos a descartar todas las teorías analíticas sobre las líneas y recomendaba que empezaran con su punto de vista, un punto de vista sintético. Por medio de un simple experimento mental creía haber demostrado que la línea rehusaba ser cortada en puntos. Pero aun cuando los matemáticos se resistían a aceptar sus argumentos, Peirce insistió en que sólo importaba una cosa: su idea de la continuidad y de que los infinitesimales no implicaban contradicción. Al terminar advertía:

> Tengo cuidado en no llamar colecciones supernumerosas a las multitudes. Las multitudes implican una independencia de los individuos de una y otra, la cual no se encuentra en conjuntos supernumerosos. Aquí los elementos están concentrados juntos y se vuelven indistintos.

Aquí Peirce había alcanzado la potencialidad, la generalidad que había dicho al principio era esencial si uno entendía correctamente la estructura de la continuidad. Para Peirce, la esencia de la continuidad dependía de la supernumerosidad de los elementos de la línea y su "arreglo intrínseco que es inseparable del grado particular de multitud en el que se encuentran aquellos fenómenos de cohesión".

Es ahora posible ver lo que Peirce quería decir cuando escribió a Paul Carus editor de *The Monist*, para decir que al fin había visto dónde se había equivocado Cantor. La continuidad no podía surgir de ninguna colección de puntos porque los puntos eran discretos, determinados, y de cualquier forma, los puntos representaban discontinuidades al ser removidos de la línea. Al hacer un resumen de su punto de vista para Francis Russell en 1909, Peirce interpretó la esencia de la continuidad en términos del potencial y la naturaleza completamente general de las ideas contenidas. "Ya que una línea recta no tiene una definición propia, es demostrable que ésta no puede ser, propiamente hablando, definida".

Si pudiéramos tomar "propiamente hablando" para significar "matemáticamente hablando", entonces no habría mucho que pudiese esperar ofrecer Peirce en tal caso a sus colegas matemáticos. Pero también es verdad que no sentía que los matemáticos necesitasen llegar tan lejos, aparentemente, en el análisis del continuo como él lo había hecho. Peirce estaba interesado en llevar las consecuencias lógicas de sus ideas a su última conclusión por el bien de la filosofía, pero el análisis, parecía decir, puede detenerse en algo menor.

Para Peirce tales ideas se autojustificaban como por instinto, por sentido común. Siempre sostuvo que su entendimiento intuitivo del continuo, o la continuidad de tiempo y espacio, eran los principales guías en su análisis de la continuidad. Nada podía estar más lejano de las metas del análisis Weierstrassiano, que intentaba rechazar todas esas intuiciones y buscaba basar las matemáticas sobre fundamentos aritméticos más firmes. Weierstrass había construido ejemplos de funciones continuas y no diferenciables para demostrar la insuficiencia de la intuición. Pero Peirce no estaba convencido e inclusive comentó una vez que las matemáticas Weierstrassianas, al mostrar desconfianza por la intuición, revelaban una ignorancia de los principios fundamentales de la lógica. Peirce seguía su intuición tan lejos como ésta pudiera llevarlo, y pudo haber sido este rasgo de su pensamiento, tanto como su interés en las disputas filosóficas y metafísicas, lo que evitó que fuese mejor aceptado por aquellos de sus contemporáneos conocedores de su trabajo.

Conclusión

Peirce dijo alguna vez que el trabajo de la ciencia y las matemáticas era adivinar. Para las matemáticas, esto se reducía al planteamiento de hipótesis que debían ser probadas por autoconsistencia lógica. Si no se podían deducir contradicciones, entonces la hipótesis, la teoría matemática en cuestión, permanecía como aceptable. Esta fue la base sobre la cual Peirce argumentó, en forma de lo más persuasible, la responsabilidad de una idea concerniente a los infinitesimales y la continuidad. Kepler, según idea de Peirce, fue el mayor adivinador que jamás haya visto la historia de la ciencia. Pero en términos de los matemáticos americanos en el advenimiento del siglo, Peirce fácilmente pudo ser un adivinador igualmente impresionante, al producir las hipótesis matemáticas de los infinitesimales.

Kepler carecía de las técnicas matemáticas suficientes y de una teoría gravitacional para establecer una explicación convincente de sus leyes, deficiencias que más tarde repararía Isaac Newton. En forma muy similar, Peirce carecía de técnicas suficientes para producir una teoría rigurosa de los sistemas no-arquimedeanos, pero sus hipótesis fueron al fin justificadas, en el siglo XX, por matemáticos como Schmieden, Laugwitz, Robinson y Luxemburg. Quizá hasta mediados de este siglo, sólo un matemático tan interesado en la filosofía como lo era Peirce y tan aislado de las ideas predominantes en las matemáticas establecidas del siglo XIX, pudo haber investigado el problema de la continuidad en la forma en que él lo hizo. Sin contacto con gran parte de los matemáticos europeos, Peirce consideró los infinitesimales con ojos sin prejuicio para afirmar no sólo su existencia, sino para argumentar también que el continuo aritmético de los números reales era sólo para un cuadro muy incompleto de la riqueza real de cualquier continuo. A pesar de trabajar en la obscuridad, la penuria y el aislamiento, vio como en un vistazo, lo que generaciones posteriores estarían más deseosas de aceptar. A la luz de la actual investigación en análisis no estándard, es ahora posible considerar en forma más rigurosa que como lo hizo Peirce, las alternativas al punto de vista tradicional del siglo XIX del continuo estándard arquimedeano.

Créditos

Versiones anteriores de este escrito fueron leídas en la reunión anual de la Metropolitan New York Section de la Asociación Matemática de América, el 2 de abril de 1976; y en el C.S. Peirce Bicentennial International Congress, celebrado en Amsterdam, Países Bajos, el 17 de junio de 1976. Estoy en especial agradecido a la profesora Carolyn Eisele por permitirme el acceso a los escritos matemáticos de C.S. Peirce. La profesora Eisele ha pasado más de veinte años transcribiendo, editando y preparando los trabajos matemáticos de Peirce para su publicación.