A
Dirk J. Struik,
Mentor
de las
Matemáticas Modernas
y
de la
Historia
de las
Matemáticas en México

Mathesis 10 (1994) 1-24
Impreso en México. Derechos reservados © 1994 por UNAM (ISSN 0185-6200)

La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind

Leo Corry

Resumen

El presente artículo expone y discute los argumentos en pro y en contra de la conocida tesis histórica, según la cual la teoría de las proporciones de Eudoxio anticipó plenamente teorías modernas del número irracional tales como las de Dedekind y Weierstrass. Especial énfasis se dedica a la teoría de cortes de Dedekind y a la interpretación que el propio Dedekind propuso respecto a la conexión entre su teoría y la de Eudoxio. Dicha interpretación ilumina interesantes aspectos de esta disputa historiográfica, así como de la matemática del siglo XIX.

Abstract

The present article presents and discusses the arguments for and against the well-known historical thesis, according to which Eudoxus' theory of proportions fully anticipated modern theories of the irrational numbers, such as Dedekind's or Weierstrass'. Special stress is laid upon Dedekind's theory of cuts, and upon Dedekind's own interpretation of the putative connection between his theory and Eudoxus'. This interpretation throws new light upon interesting aspects of the historiographical dispute concerning Eudoxus and Dedekind, and of nineteenth century mathematics as well.

1. Introducción

La teoría de las proporciones de Eudoxio, tal como la conocemos a través del quinto libro de *Los Elementos* de Euclides, constituye uno de los temas clásicos de la historiografía de la matemática griega. Varios autores han sostenido que las definiciones propuestas por Eudoxio para los conceptos de 'razón' e 'identidad de razones' plenamente contienen la esencia del pensamiento matemático del siglo diecinueve, en lo que respecta a la definición de los números reales. Las definiciones de Eudoxio han sido comparadas con las de Richard Dedekind (1831-1916) y Karl Weierstrass (1815-1897). Tal comparación ha sido extensamente criticada por otros tantos autores. El presente artículo presenta los argumentos centrales avanzados por los defensores de una y otra perspectiva, y discute la interpretación que el propio Dedekind propuso respecto a la conexión entre ambas teorías. El análisis de la posición de Dedekind ilumina interesantes aspectos de esta disputa historiográfica y de la matemática del siglo XIX.

2. La teoría de proporciones de Eudoxio

'Dícese de dos magnitudes que ellas están en razón, si es posible, al tomar un múltiplo de la una, sobrepasar la otra'. Así reza la definición 4 del quinto libro de *Los Elementos* de Euclides. La definición 5 del mismo libro indica en qué condiciones deben considerarse dos razones como idénticas:

> Dícese de magnitudes, que la razón de la primera con la segunda es la misma que la razón de la tercera con la cuarta, si al tomar equimúltiplos cualesquiera de la primera y de la tercera, y equimúltiplos cualesquiera de la segunda y de la cuarta, aquéllos y éstos igualmente exceden, igualmente coinciden, o igualmente faltan, al ser tomados en el orden correspondiente [Heath 1926 II, 114].

La definición 6 introduce el término 'proporción' para denominar magnitudes que están, dos a dos, en la misma razón. La definición 5, de formulación un tanto engorrosa, ha sido sujeto de incontables comentarios e interpretaciones. Como Heath mismo lo explica [Heath 1926 II, 116 *ss*], las complicaciones inherentes a la interpretación comienzan con la propia traducción del texto griego original. Obviamente, no es éste el lugar, o el autor apropiado, para analizar todos los aspectos concernientes a la problemática discutida por Heath, o por sus sucesores. Es necesario, sin embargo, comentar brevemente ciertos puntos que aclaran el significado de los términos manejados por Eudoxio.

Con frecuencia se ha explicado el significado de la definición eudoxiana de proporción traduciéndola a notación algebraica moderna como sigue: '$a{:}b = c{:}d$, si para todo par de enteros m, n, se tiene $ma > nc$ (o $ma < nc$, o $ma = nc$) si y sólo si $mb > nd$ (o $mb < nd$, o $mb = nd$ respectivamente)'. Desde el punto de vista formal, esta traducción es obviamente correcta. Más adelante, sin embargo, discutiremos su conveniencia para el entendimiento histórico de la definición de Eudoxio.

Debe notarse que, al definir la proporción, Eudoxio-Euclides establecen condiciones para la existencia de una razón entre dos magnitudes dadas y para determinar cuándo, de dos tales razones dadas, debe decirse que son una y la misma. En *Los Elementos* de Euclides, no obstante, no encontramos las definiciones mismas de magnitud o de razón, excepto por la frase vaga: 'una razón es una especie de relación entre los tamaños de dos magnitudes del mismo tipo' (def. 3). Magnitudes 'del mismo tipo', o como también se las ha llamado posteriormente, 'magnitudes homogéneas' son magnitudes capaces de entrar en razón la una con la otra. Como se establece en la definición 4, esto sucede cuando cierto múltiplo de una de ellas puede sobrepasar a la otra. Esta propiedad es de fundamental importancia para entender el concepto de Eudoxio.

De acuerdo con la definición 4, podremos buscar la razón ora entre dos líneas, o entre dos áreas, o entre dos volúmenes, ya que, por ejemplo, dadas dos áreas cualesquiera, bastará tomar una de ellas y agregarla a sí misma un número suficiente de veces, para que con seguridad sobrepasemos en medida la otra área dada. Por el contrario, dada una línea, digamos una recta, y un área, no importa cuántas veces agreguemos la primera a sí misma, nunca podremos pasar el área dada en su medida, y, por lo tanto, no hay lugar a comparación. Por tanto no tiene sentido hablar de la razón entre una línea y un área. La necesidad de preservar la homogeneidad de las magnitudes no se limita en *Los Elementos* a la formación de razones, sino que se manifiesta en todas las operaciones con magnitudes. Por eso, no encontramos en los textos adición o diferencia de cantidades no homogéneas. Más aún, y lo cual es mucho menos obvio, no encontraremos en *Los Elementos*, y, en general, en la matemática griega, productos de dos cantidades (homogéneas o no) cuyos resultados son magnitudes de tipo diferente a los factores dados. Toda comparación o toda operación con magnitudes en *Los Elementos* se efectúa únicamente entre magnitudes homogéneas. De hecho, la conservación de la homogeneidad en el tratamiento de magnitudes seguiría siendo un motivo central de las matemáticas por lo menos hasta el siglo diecisiete, cuando la legitimación de la comparación de magnitudes heterogéneas, así como su manipulación simultánea, iría a constituir uno de los cambios fundamentales en la concepción de esta ciencia.

La exigencia eudoxiana de homogeneidad para las magnitudes entrando en razón tiene consecuencias adicionales. En primer lugar, por las mismas razones explicadas arriba, la definición 4 excluye la posibilidad de formar una razón entre una magnitud finita y una infinita, aún cuando ambas sean de la misma dimensión, ya que todo múltiplo de la primera, por grande que sea, nunca sobrepasará a la segunda. Pero, por otro lado, y esto es tal vez el aspecto más importante de la definición de Eudoxio, sí será posible comparar magnitudes *inconmensurables* la una con la otra. Eudoxio no fue el primer matemático griego en definir proporciones; éstas fueron estudiadas por lo menos desde el tiempo de los pitagóricos.[1] Pero como es bien sabido, para la época de Eudoxio era ya conocida la inexistencia de una medida común entre la diagonal y el lado de un cuadrado y, por ende, la imposibilidad de representar la relación entre sus medidas por medio de relaciones entre números enteros. La definición propuesta por Eudoxio permitirá entonces comparar tales medidas, si bien no como relación entre números, sí como relación entre magnitudes homogéneas entre sí. Esta definición, pues, fue la primera que logró cubrir simultáneamente el caso de proporciones entre magnitudes conmensurables y el de proporciones inconmensurables, permitiendo así el estudio sistemático de ambos casos desde un punto de vista unificado.

Una última consecuencia inmediata de las definiciones de Eudoxio que citaremos aquí es la imposibilidad de considerar la proporción como una igualdad de fracciones en el sentido operativo del término. Es decir si la razón entre a y b es la misma que la razón entre c y d (en el sentido de Eudoxio), no se sigue de aquí directamente que el producto ad sea igual al producto bc, ni que la razón entre a y c sea la misma que la razón entre b y d. De hecho, en el caso general estas últimas razones ni siquiera estarán definidas del todo. Pues si el par a, b es, por ejemplo, un par de líneas, mientras que el par c, d es un par de áreas, no es posible formar la razón a, c al no ser éstas magnitudes homogéneas. En caso de que las cuatro cantidades que forman la proporción sean todas del mismo tipo, sí será posible deducir que la proporción alterna se satisface (es decir que la razón de a y c sea la misma que la razón de b y d) pero lejos de ser este

1 Discusiones de las teorías pre-euclídeas de razón y de proporción aparecen en Knorr 1975 y Fowler 1979.

un hecho inmediato, es necesario probarlo como teorema (V. 16) siguiendo las definiciones y axiomas básicos de la teoría [Heath 1926 II. 164]. La proporción es, por tanto, una comparación entre dos diferentes razones dadas y no un esquema operacional entre cuatro cantidades numéricas.

Habiendo presentado brevemente la teoría de Eudoxio pasemos ahora a examinar la definición de los irracionales de Dedekind.

3. La teoría de 'cortaduras' de Dedekind

Dedekind introdujo su hoy celebrado concepto de 'cortadura' y su teoría de números reales en su libro *Continuidad y números irracionales* [Dedekind 1872]. En este conocido libro Dedekind propuso establecer una sólida fundación para el cálculo infinitesimal, por medio de una definición consistente del continuo, formulada en términos estrictamente no geométricos. Ya en 1858, en las primeras fases de su carrera docente en Zurich, Dedekind había notado que el cálculo infinitesimal carecía de una fundación adecuada. En particular, Dedekind notó que se podía basar el cálculo en el teorema que establece, que toda sucesión acotada, monótona ascendente tiene límite, pero que, sin embargo, este teorema no había sido en su opinión demostrado satisfactoriamente, y, por el contrario, se aceptaba por analogía, en base a una intuición geométrica. Dedekind, docente concienzudo hasta el extremo, pensaba que esta situación debía ser remediada, y el libro que publicó después de más de quince años de meditaciones representó su solución al problema. La clave de la solución debería ser buscada en el concepto del continuo, visto como un concepto de *orden*, y no bajo la analogía geométrica que era la usualmente aceptada. Dedekind opinaba que los matemáticos del siglo diecinueve habían transferido al ámbito numérico, con poco sentido crítico e ilegítimamente, importantes ideas correctamente validadas en el ámbito de la geometría, y que esta transgresión del rigor matemático debía ser corregida.

El concepto de cortadura emerge de la aparentemente trivial observación, que todo punto de la recta divide a ésta última en dos porciones, tales que todo punto perteneciente a una de ellas yace a la izquierda de todo punto perteneciente a la otra. Algo similar, aunque no idéntico sucede con el sistema de los números racionales. En efecto, dado un racional a, considérense las clases A_1, de todos los racionales menores que a, y A_2, de todos los racionales mayores que a. Si se sabe también, que a mismo pertenece a A_1 o pertenece a A_2, entonces es obvio que a es el mayor número de A_1 o, alternativamente, el menor número de A_2. Estas dos clases satisfacen tres propiedades inmediatas:

1. A_1 y A_2 son clases disjuntas,

2. Todo número racional pertenece ora a A_1 o a A_2,

y

3. Todo número perteneciente a A_1 es menor que todo número perteneciente a A_2.

Adoptando un giro que se volvería rutina en sus futuros trabajos, Dedekind partió de esta *propiedad* de la recta y la transformó en *definición* general. Dedekind definió como cortadura (*Schnitt*) todo par de clases de números racionales A_1 y A_2, que satisface las propiedades (1) a (3) descritas arriba, y lo denotó por (A_1,A_2). Como vimos, todo número racional define una cortadura en forma natural, pero Dedekind mostró que existen cortaduras adicionales, que no pueden ser definidas de tal forma por un racional. Sea por ejemplo D un número racional que no es la raíz cuadrada de un natural, y defínase A_2 como la clase de los racionales cuyos cuadrados son mayores que D, y A_1 su complemento en los racionales. Obviamente (A_1, A_2) es una cortadura, pero no existe racional que sea el máximo de A_1 o el mínimo de A_2. Dedekind vio en la existencia de este tipo de cortaduras, no generados por racionales, la esencia de la discontinuidad de los irracionales [Dedekind 1872, 323-325]. Por el contrario, si se define el sistema de los reales como la colección de todas las cortaduras de racionales, claramente uno obtiene un sistema continuo, similarmente a la recta y a diferencia del sistema de los racionales mismos.

Y, sin embargo, Dedekind hubiera quedado profundamente insatisfecho si su teoría de los números reales no conllevara más que una simple definición de dicho sistema. Basándose en el concepto de cortadura, Dedekind fue capaz de definir y estudiar las propiedades de orden de los reales y además sostuvo que todas las propiedades de la aritmética de los reales son deducibles del mismo concepto. En su libro de 1872, Dedekind solamente definió y estudió las propiedades de la adición, pero un borrador no publicado atestigua que él había empezado a trabajar los detalles de la substracción [Dugac 1976, 208]. Dedekind afirmó que desarrollos similares podrían realizarse para las otras operaciones, no sólo multiplicación y división, sino también radicales y hasta logaritmos. Dedekind consideraba como el mayor logro de su libro, la posibilidad de probar, basado en sólidas fundaciones, la validez de igualdades tales como $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$. En su opinión, tales pruebas nunca habían sido avanzadas con anterioridad, y su concepto de cortadura proporcionaría por primera vez los medios matemáticos legítimos para hacerlo.[2]

4. Equivalencia y diferencia de las dos teorías

Examinemos ahora la tesis que afirma la equivalencia entre las dos teorías expuestas con anterioridad, las proporciones de Eudoxio y las cortaduras de Dedekind. Tal afirmación aparece, por ejemplo, en los comentarios de Heath a la definición euclídea de proporción. Heath atribuyó la afirmación a autores anteriores a él, tales como Max Simon, en su libro *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher*, y como Hieronymus Zeuthen, mientras que por su parte él escribía que "existe una correspondencia exacta, casi una coincidencia, entre la definición euclídea de identidad de razones y la teoría moderna, debida a Dedekind, de los números irracionales" [Heath 1926 II, 124]. El argumento de Heath reza así:[3]

Para probar la equivalencia de los dos conceptos, dado un cociente x/y entre dos magnitudes homogéneas, uno debe ser primero capaz de asociar una cortadura de Dedekind a dicho cociente. Luego, dados dos cocientes cualesquiera, si éstos resultan ser iguales (en el sentido de Eudoxio), debe uno entonces probar que las cortaduras de Dedekind asociadas a ellos son también equivalentes.

Sea pues x/y un cociente cualquiera, y definamos A como el conjunto de todos los racionales a/b, tales que $a/b \leq x/y$, y B como el conjunto de todos los racionales a/b tales que $x/y > a/b$. Sea ahora x'/y' otro cociente y definamos A' y B' en forma similar. Supongamos que x/y es igual a x'/y', y tomemos el racional a/b perteneciente a A. Claramente a/b también pertenece a A', pues

$$\text{si } a/b \leq x/y \text{ entonces } ay \leq bx,$$

pero como a y b son enteros, entonces según la definición de Euclides se obtiene $ay' \leq bx'$, y por lo tanto $a/b \leq x'/y'$. Aplicando el argumento repetidamente, se prueba que en efecto $(A, B) = (A', B')$. De aquí concluye Heath que la formulación de Euclides "define cocientes iguales de manera que corresponde exactamente a la teoría de Dedekind" [Heath 1926 II, 126].

2 Para una exposición detallada de la teoría de las cortaduras de Dedekind, véase Pla i Carrera 1993, especialmente la sección 2.

3 El argumento expuesto aquí es similar, aunque no idéntico al de Heath. Véase Heath 1926 II, 124-125.

Varios son los autores que han rechazado estos argumentos de Heath, y en general la ecuación de las teorías de Eudoxio y de Dedekind. Según la línea de argumentación historiográfica de tales autores, la explicación del contenido matemático de los textos griegos debe basarse en una restricción total a los límites del marco conceptual en que dichos textos fueron originalmente producidos. En particular, traducir la antigua formulación retórica, típica de la matemática griega, al simbolismo matemático moderno conduce a falsas interpretaciones de los textos existentes: "El lenguage ordinario y el lenguage geométrico directo son los únicos metalenguages aceptables, desde el punto de vista histórico, para explicar la matemática griega" [Unguru 1985, 176]. Así considerado, el argumento de Heath descrito arriba, dependiente como lo es de la traducción de Eudoxio a una formulación simbólica-algebraica, no puede ser aceptado como válido.[4] Más aún, tal punto de vista considera el concepto de número en la antigua Grecia como tan absolutamente distinto de aquél del siglo diecinueve, que la mera comparación entre los conceptos de Eudoxio y de Dedekind es tenida, no solamente por falsa, sino más bien por falta de sentido. Es conveniente, pues, para entender el rechazo de la interpretación de Heath, discutir brevemente el concepto griego del número.

La definición clásica de 'número' en las matemáticas griegas aparece en el libro VII de *Los Elementos*: "Un número es una pluralidad compuesta de unidades". La unidad misma, debe señalarse, no es un número en el propio sentido de la definición, aunque la actitud de Euclides en este respecto a lo largo de *Los Elementos* es a veces un tanto ambigua.[5] La unidad es indivisible, y, por lo tanto, el número es divisible tan sólo un número finito de veces: el proceso de división de un número se detendrá al llegar a la unidad. Euclides estudió las propiedades de los números en el marco de los libros aritméticos de *Los Elementos*: los libros VII-IX. La definición 20 del libro VII establece que cuatro números son proporcionales, cuando "el primero es el mismo múltiplo, o el mismo divisor, o las mismas partes del segundo, que el tercero es del cuarto". Cabe indagar el por qué de una definición separada para las proporciones numéricas, en lugar de aplicar la de-

4. David Fowler ha rechazado recientemente [Fowler 1992, 730] dichos argumentos en términos mucho más directos y ásperos, aduciendo que la antes mencionada opinión de Heath "representa lo que es para mí la más fea enfermedad de la erudición: la repetición incorrecta, engañosa y falta de sentido de fórmulas verbales estereotipadas, respaldada por un desfile litúrgico de nombres".

5. Véase Jones 1987, 7-8. Drake [1987, 61] sostiene que no fue hasta 1585 cuando Simon Stevin definió explícitamente la unidad como un número de igual naturaleza que los demás números naturales.

finición más general contenida en el libro V para magnitudes. Pero sea cual fuere la respuesta a esta pregunta,[6] la mera existencia de definiciones separadas claramente sugiere una actitud conceptual diferente frente a las dos clases de objetos envueltos en ellas: números y magnitudes. Y en efecto el tratamiento euclídeo separa claramente el contexto geométrico del aritmético, y por ende produce una dicotomía entre magnitud y número.

Con excepción de los ya mencionados libros VII-IX, todos los otros libros de *Los Elementos* están dedicados a la geometría y a las cantidades continuas. No solo la definición de proporción se formula para cada uno de los dos dominios por separado, sino que lo mismo es cierto para todas las otras definiciones y teoremas tocantes a ambos dominios. Es más, con una sola excepción, en el libro X, los conceptos 'número' y 'magnitud' nunca aparecerán simultáneamente dentro de una misma formulación euclídea.[7] Así, si 'número' es el concepto reservado para el tratamiento de las cantidades discretas, 'magnitud' lo será para el de las continuas.

En oposición al número que es una colección determinada de unidades, divisible tan sólo un número finito de veces, la magnitud en el contexto euclídeo mide una cantidad continua, es decir, infinitamente indivisible. La definición eudoxiana de proporción (V. 5), aplicable a magnitudes en general, compara dos razones, cada una de las cuales es razón entre dos magnitudes homogéneas, pero Euclides no proporciona una definición directa de magnitud. Sin embargo, los escritos aristotélicos discuten en detalle la oposición y la relación entre número y magnitud, y existe amplio consenso entre los historiadores referente a la influencia de Aristóteles sobre la concepción de las matemáticas de Euclides.[8] Nos basaremos por tanto en dichos escritos para explicar la concepción de número y magnitud en Eudoxio y Euclides.

La relación entre número y magnitud quedan claramente establecidas en el siguiente bien conocido texto aristotélico, que sin duda manifiesta fielmente la concepción del propio Euclides (*Metaf.* V 13. 1020a):

> Se llama cantidad a lo que es divisible en elementos constitutivos, de los cuales cada uno o por lo menos uno es naturalmente apto para poseer una existencia propia. La pluralidad, por tanto, es una cantidad si se puede contar, y una magnitud lo es si puede ser medida. Se llama pluralidad al

6. Posibles explicaciones aparecen en Drake 1987, 35-36, y Jones 1987a, 377-380.
7. Jones [1987a, 378] menciona y explica las razones de este significativo detalle.
8. Esta influencia es discutida en detalle en Jones 1987 y 1987a. Véase también Stein 1990, 163-165.

> conjunto de seres que es divisible en potencia en seres discontinuos, y una magnitud a lo que es divisible en partes continuas. Una magnitud continua en un solo sentido se llama longitud, la que lo es en dos sentidos latitud, y la que lo es en tres profundidad. Una multitud finita es el número, una longitud finita es una línea, una latitud determinada es una superficie, una profundidad limitada es un cuerpo.

Vemos pues claramente, según este pasaje, que 'número' (pluralidad) y 'magnitud' son ambos 'cantidades', aunque de diferentes tipos. Más aún, así como el número mide una *pluralidad determinada* así la línea representa una *longitud determinada*, una superficie representa una *latitud determinada*, etc. La cantidad euclídea, bien si es numérica y bien si es magnitud, a diferencia del número moderno, no aparecerá como cantidad abstracta y general, sino como medida específica de algo determinado.

Los números y las magnitudes, al ser cantidades, tienen la propiedad básica de poder ser comparadas con otra cantidad de su mismo tipo, pudiéndose establecer la condición de igualdad o desigualdad. Esta última es una propiedad *exclusiva* de las cantidades y tan sólo de ellas.[9] Así, dadas dos figuras, el área de cada una de ellas es la magnitud que las mide, y diremos de ellas que son iguales o desiguales. Igualmente, dadas dos multitudes diferentes de unidades (objetos físicos o mentales) diremos de los números que las miden respectivamente, que ellos son iguales o que son desiguales.

Nada de esto último puede decirse sobre las razones. La razón entre dos cantidades del mismo tipo (bien sean dos números o dos magnitudes homogéneas), permite compararlas aún siendo desiguales. La proporción, por su parte, comparará dos razones para establecer, ya no igualdad o desigualdad, sino *identidad* o falta de ella. Debe subrayarse que de dos razones se dice en la definición euclídea (V. 5) cuándo son *la misma*, y no cuándo son *iguales*. Sería un error ver esta sutil diferencia tan sólo como semántica y casual; es ella en realidad una diferencia esencial y cargada de significado desde el punto de vista aristotélico [Véase Stein 1990, 165]. En efecto, dadas por ejemplo dos figuras, cada cual tendrá su respectiva área, medidas por magnitudes. Cabe preguntar, entonces, si esas magnitudes son iguales o no. La razón, a diferencia del número y de la magnitud, *no mide nada ni es cantidad*. Por no estar en dicha categoría, no se le aplica la relación

9 Aristóteles *Categorías* VI, 6a: "Lo que realmente es peculiar para las cantidades es que nosotros las comparamos o contrastamos en términos o sobre fundamentos de igualdad. Predicamos los términos 'igual' o 'desigual' de todas las cantidades mencionadas."

de igualdad o desigualdad, y al comparar dos razones entre magnitudes, lo que preguntamos es si ante nosotros hay dos razones diferentes o una y la misma razón. Mas aún, la razón de dos números no es una fracción [Jones 1987, 9; Fowler 1992, 7300], y de hecho no veremos nunca en *Los Elementos*, que se apliquen a las razones algún tipo de operación aritmética tales como las aplicadas a los números mismos. Lo mismo puede decirse de las razones de dos magnitudes homogéneas; a las magnitudes mismas se aplican las operaciones de adición y diferencia, mas no a *sus* razones [Unguru y Rowe 1981, 24-37].

Ahora podemos entender más claramente en qué sentido la razón es un ente de naturaleza diferente a la de los números o las magnitudes, y por qué no puede verse la teoría de las proporciones como una teoría de números irracionales. Las razones se diferencian esencialmente tanto de los números como de las magnitudes. La comparación de las teorías de Eudoxio y de Dedekind es vista, según este tipo de interpretación mencionado aquí, como falta de sentido, ya que el concepto griego de número y el de magnitud son esencialmente diferentes del concepto moderno de número abstracto y, más aun, por qué los conceptos de razón y de proporción, tales como los introducidos por Eudoxio, pertenecen a una categoría conceptual diferente.

Instancias típicas de argumentación siguiendo las líneas arriba descritas aparecen en los trabajos de Unguru. La posición de Unguru es extrema entre las de aquellos historiadores de la matemática que se oponen a toda interpretación de textos de matemática antigua basada en ideas matemáticas más recientes, y es, por tanto, conveniente como punto de referencia para el presente recuento. Sintetizando los argumentos generales citados arriba, Unguru sostiene específicamente que, "a pesar de la correspondencia formal discernible entre las dos definiciones [de Eudoxio y de Dedekind], ellas están, vistas desde la posición ventajosa de la historia de las ideas, totalmente irrelacionadas" [Unguru y Rowe 1981, 36-37]. Unguru afirma que el libro V de *Los Elementos* no puede ser considerado como una exposición de una teoría articulada de los números reales, puesto que:

* Cocientes no son objetos, ni existe una relación de orden 'menor que' entre cocientes de números,

* Las magnitudes en *Los Elementos* son abstracciones de objetos geométricos (no incluyendo números),

y

* Al tratar cocientes, Euclides no muestra ningún interés calculacional

de igualdad o desigualdad, y al comparar dos razones entre magnitudes, lo que preguntamos es si ante nosotros hay dos razones diferentes o una y la misma razón. Más aún, la razón de dos números no es una fracción [Jones 1987, 9; Fowler 1992, 7300], y de hecho no veremos nunca en *Los Elementos*, que se apliquen a las razones algún tipo de operación aritmética tales como las aplicadas a los números mismos. Lo mismo puede decirse de las razones de dos magnitudes homogéneas, a las magnitudes mismas se aplican las operaciones de adición y diferencia, mas no a sus razones [Unguru y Rowe 1981, 24–37].

Ahora podemos entender más claramente en qué sentido la razón es un ente de naturaleza diferente a la de los números o las magnitudes, y por qué no puede verse la teoría de las proporciones como una teoría de números irracionales. Las razones se diferencian esencialmente tanto de los números como de las magnitudes. La comparación de las teorías de Eudoxio y de Dedekind es vista, según este tipo de interpretación mencionado aquí, como falta de sentido, ya que el concepto griego de número y el de magnitud son esencialmente diferentes del concepto moderno de número abstracto y, más aún, por qué los conceptos de razón y de proporción, tales como los introducidos por Eudoxio, pertenecen a una categoría conceptual diferente.

Instancias típicas de argumentación siguiendo las líneas arriba descritas aparecen en los trabajos de Unguru. La posición de Unguru es extrema entre las de aquellos historiadores de la matemática que se oponen a toda interpretación de textos de matemática antigua basada en ideas matemáticas más recientes, y es, por tanto, conveniente como punto de referencia para el presente recuento. Sintetizando los argumentos generales citados arriba, Unguru sostiene específicamente que, "a pesar de la correspondencia formal discernible entre las dos definiciones [de Eudoxio y de Dedekind], ellas están, vistas desde la posición ventajosa de la historia de las ideas, totalmente irrelacionadas" [Unguru y Rowe 1981, 36-37]. Unguru afirma que el libro V de *Los Elementos* no puede ser considerado como una exposición de una teoría articulada de los números reales, puesto que:

* Cocientes no son objetos, ni existe una relación de orden 'menor que' entre cocientes de números;

* Las magnitudes en *Los Elementos* son abstracciones de objetos geométricos (no incluyendo números),

y

* Al tratar cocientes, Euclides no muestra ningún interés calculacional

Citando a Mueller en su libro sobre *Los Elementos* [Mueller 1981], Unguru agrega que

> lo que falta en el libro V, desde un punto de vista moderno, es precisamente la fundación axiomática —la especificación de las presuposiciones existenciales y combinatóricas que subyacen el libro en su totalidad [Unguru 1985, 179]—.

Pero, paralelamente a los argumentos arriba expuestos en detalle, Unguru defiende una línea de interpretación más amplia, que parece ser para él decisiva en favor tanto de su posición historiográfica en general, como en lo referente a este particular debate: las teorías son diferentes debido a las diferentes 'motivaciones' o 'intencionalidades' de los dos matemáticos en cuestión. Unguru ha mencionado en este respecto dos tipos de estrategias interpretativas diferentes que han caracterizado la historiografía de las matemáticas:

> en toda empresa de interpretación textual se puede distinguir entre 1) Una interpretación semántica 'objetiva', que concibe el texto como un objeto físico, como una entidad neutra, autocontenida e independiente, que incorpora dentro de sí todas sus lecciones y sus mensajes, y 2) Una interpretación voluntarista intencional, que niega la posibilidad de entender propiamente el texto desde el punto de vista histórico si no se toman en cuenta las intenciones de su autor [Unguru 1991, 288-289]

En el contexto de la historia de las matemáticas, Unguru atribuye la interpretación 'objetiva' al matemático de inclinación platonista, quien subraya la inexistencia en el texto de evidencias directas que puedan revelar las motivaciones del autor. Unguru, por su parte, adopta la interpretación 'intencionalista' a pesar de las dificultades inherentes a ella, al considerarla necesaria para una fiel interpretación histórica de las ideas.

En el caso de Dedekind y Eudoxio, Unguru ha descrito la motivación detrás del método de Dedekind, como *constructiva*: dados los racionales uno introduce las cortaduras con el fin de *construir* el continuo de los reales, y posteriormente se prueba que en el sistema así obtenido, todas las sucesiones de Cauchy convergen. El concepto de Eudoxio, por su parte, proviene de una motivación totalmente diferente. Los cocientes mismos, que constituyen el objeto de la definición, son dados de antemano: sólo *a posteriori* es que uno define el criterio de identidad de cocientes, que también permite ordenar la colección de ellos. Es claro, establece Unguru, que la definición de Eudoxio no es usada en ningún caso "para afirmar que cierta sucesión de Cauchy converge a un determinado cociente-límite" [Unguru y Rowe 1981, 37].[10]

Ahora bien, las 'motivaciones' o 'intencionalidades' mencionadas por Unguru son aquéllas que pueden ser reconstruidas de los textos existentes, pero en la mayoría de los casos no contamos con evidencia directa de ellas. Como ya se dijo, la falta de evidencia directa que atestigüe sobre estas motivaciones constituye la principal debilidad de esta posición y las expone a la crítica. De hecho, aunque existe amplio consenso en lo que respecta a las motivaciones de trasfondo de Eudoxio, no existe evidencia directa de lo que él, o Euclides, consideraron como el significado y el alcance de la teoría de proporciones. Sin embargo, en el caso de Dedekind la situación es totalmente diferente; la correspondencia de Dedekind con su colega Rudolph Lipschitz contiene, entre otros, un recuento detallado de la perspectiva con que Dedekind abordó su estudio, y del alcance que le atribuía a su teoría. Lo que es más, Dedekind entabló una interesante discusión con Lipschitz respecto a la relación entre su trabajo y el de Eudoxio. Es remarcable que, no obstante las muchas exégesis de la obra de Dedekind, sus propias opiniones sobre este asunto pocas veces han sido consideradas relevantes al debate histórico sobre la teoría de Eudoxio. Unguru mismo, en su apreciación de las diferencias entre las dos teorías no hace alusión a esta evidencia directa, que refuerza considerablemente su propia posición. Es por tanto conveniente examinar dicha opinión en algún detalle ahora.

---

10 Aunque yo acepto la mayor parte de los argumentos y evaluaciones de Unguru, en lo que respecta a las diferentes motivaciones de Eudoxio y de Dedekind, esta última afirmación me parece inaceptable. Es obvio que Eudoxio o Euclides nunca usaron la teoría de las proporciones para investigar la convergencia de 'series de Cauchy', pero por otra parte, tampoco Dedekind lo hizo con su propia teoría. En el marco de la teoría de cortes, Dedekind probó el arriba mencionado teorema del cálculo (es decir, que toda secuencia monótona acotada converge a un límite), y agregó que sin dicha teoría no es posible probar el teorema. Pero este teorema, aunque estrechamente relacionado, difiere de la afirmación que toda 'secuencia de Cauchy' de números racionales converge a un límite. Fue Cantor, y no Dedekind, quien introdujo las 'secuencias de Cauchy' (llamándolas 'secuencias elementales') como concepto clave para elucidar el problema del continuo. Cantor publicó estas ideas el mismo año en que Dedekind publicaba su teoría de cortes [Cantor 1872]. Es sabido que Dedekind y Cantor intercambiaron frecuentemente ideas sobre este tema, pero no debe olvidarse que su primer encuentro tuvo lugar en 1872, es decir, bastante después que las ideas de ambos habían empezado a desarrollarse (sobre las relaciones entre Dedekind y Cantor puede consultarse Ferreirós 1993). Sea como sea, ellos abordaron el problema de continuidad desde diferentes perspectivas. Para una descripción del trasfondo de los trabajos de Cantor sobre el continuo, véase Dauben 1984, especialmente la sección 5.2.

5. Dedekind y la teoría de Eudoxio

La obra de Dedekind sobre las fundaciones de los varios sistemas numéricos no siempre recibió a tiempo la debida atención de sus contemporáneos. Lipschitz fue uno de los pocos matemáticos que leyó los trabajos de Dedekind con atención desde un principio, soliendo comunicarle a éste último comentarios y opiniones sobre el valor de dichos trabajos, y sin dejar de incluir una nota crítica cuando lo consideraba necesario. En una carta fechada Junio 10, 1876 [Dedekind Werke III, 469 *ss*], Lipschitz escribió a Dedekind sus comentarios sobre la teoría de cortaduras. Lipschitz sostuvo que la nueva teoría de Dedekind difería tan sólo en formulación, mas no en contenido matemático, de la concepción griega de número. Más específicamente, Lipschitz rechazaba la afirmación de Dedekind, que su teoría era la primera en suministrar una legitimación auténticamente válida de proposiciones matemáticas tales como $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$. Dedekind insistió en la validez histórica de su afirmación, y así, en la subsecuente correspondencia entre los dos matemáticos, había de convertirse la cuestión de la prioridad en la demostración de dicha proposición aritmética en piedra de toque para establecer el carácter innovativo de la teoría de cortaduras.

Dedekind conocía a fondo la literatura matemática de su tiempo y, no menos que eso, la clásica. Lo que sabemos de su personalidad matemática basta para aceptar con la mayor certeza posible, que si afirmó haber buscado en vano, en un gran número de textos y en varios idiomas, una demostración escrita de la proposición mencionada, tal búsqueda fue meticulosa y escrupulosa al extremo. Basta con pensar en el hecho, que más de catorce años transcurrieron desde que Dedekind empezó a elaborar su relativamente simple teoría de cortaduras y hasta su publicación. Más aún, Dedekind era casi obsesivo en lo tocante a problemas fundacionales y metodológicos, y lo que encontró al buscar una demostración publicada de la proposición '$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$', mal que proporcionarle lo buscado, lo intranquilizó profundamente respecto a las normas de demostración de la matemática contemporánea. En una de sus cartas a Lipschitz, Dedekind escribió que en su búsqueda no encontró más que "una agraz argumentación circular, algo de este tipo":

> $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ es igual a $\sqrt{ab}$, pues $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$. Esto no aclara o justifica en lo más mínimo el producto de dos números irracionales, pues consiste en tomar la regla ya establecida en el caso racional $(mn)^2 = m^2n^2$, y transferirla al caso irracional sin ningún escrúpulo. ¿No es indignante, que la enseñanza de la matemática en las escuelas sea considerada

> como un sobresaliente recurso para la formación intelectual, cuando en realidad en ninguna otra disciplina (como por ejemplo, la gramática) se aceptaría por un solo instante tal contravención de las leyes de la lógica? Quien no quiere proceder científicamente, o no tiene el tiempo necesario para hacerlo, es mejor que sea por lo menos honesto y lo confiese directamente a sus alumnos [Dedekind Werke III, 471].

Basado en su infructuosa búsqueda, Dedekind dio por hecho que el mencionado teorema (es decir que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$) nunca había sido probado con anterioridad a su teoría, o por lo menos, que ninguna prueba satisfactoria había sido publicada hasta entonces. Si hay quien afirme lo contrario, escribía Dedekind, la obligación de la prueba recae sobre él. Y sin embargo, es claro que para Dedekind, el mero hecho empírico que tal prueba haya o no haya sido publicada hasta entonces, no era el punto importante en la discusión. La pregunta realmente importante era si la definición de Eudoxio-Euclides contenía o no todas las suposiciones suficientes *y necesarias en principio* para poder probar el teorema. La respuesta de Dedekind a esta última pregunta era un categórico no, y el argumento detrás de su respuesta se derivaba de la posición ventajosa proporcionada por su propia teoría de cortaduras: las presuposiciones de Euclides —afirmaba Dedekind— no bastan para probar el teorema, pues entre ellas no aparece la médula de la teoría de cortaduras, vale decir el *principio de continuidad*. Dedekind enunciaba dicho principio como sigue: un dominio de magnitudes totalmente ordenado (*ein stetig abgestuftes Größen-Gebiet*) se dice continuo, si al ser dividido por uno de sus elementos en dos clases, tales que todo elemento de la primera es menor que todo elemento de la segunda, existe un elemento maximal en la primera clase o un elemento minimal en la segunda [Dedekind Werke III, 472-74].[11]

Para demostrar que dicho principio en efecto no está incluido entre las presuposiciones de Euclides, Dedekind razonó de la siguiente manera: para que la definición de proporción de Eudoxio-Euclides tenga significado coherente es necesario admitir que el dominio en cuestión satisface dos supuestos:

> 1. Dadas dos magnitudes del dominio, es siempre posible decir cuál es mayor y cuál es menor (vale decir, el dominio es totalmente ordenado),

y

> 2. Si A es una magnitud en el dominio, y n es un entero, siempre existe una magnitud nA en el dominio, el n-múltiplo de A.

11. Este argumento de Dedekind se discute en Becker 1954 y en Biermann 1971, 4.

Fuera de estas dos condiciones, escribió Dedekind, Euclides no dice nada sobre la posibilidad de extender los dominios dados, para incluir nuevos elementos. Como ya se dijo, la definición sólo dice en qué casos dos magnitudes *dadas* están en razón que es la misma que la razón entre otras dos magnitudes.

Ignoremos ahora, sugirió Dedekind, el hecho histórico que Euclides nunca usó λόγος (razón) y ἀριθμός (número) como términos equivalentes, y supongamos que su definición de proporción pueda en efecto ser tomada como una definición general de número. Tomemos una magnitud fija A, y construyamos el dominio de todos los múltiplos enteros nA de A. Obviamente este dominio satisface las condiciones (1) y (2) arriba estipuladas. Tomando ahora este domino como punto de partida y aplicando un proceso de formación de cocientes sobre las magnitudes existentes en el dominio, no pasaríamos nunca más allá del dominio de los múltiplos racionales de A. En los libros de Euclides no encontramos la más mínima indicación de la existencia de un dominio más completo (*vollständigere*) que el así obtenido. Aquí vemos un ejemplo de un dominio que satisface las condiciones (1) y (2) antes mencionadas, pero que al formar cocientes no nos lleva más allá del sistema de los racionales.

Podría ahora afirmarse, agrega Dedekind, que Euclides tenía en mente algo más que el tipo de dominios mencionado en el párrafo anterior, pues de lo contrario, no habiendo querido definir dominios 'más completos' que el de los racionales, no habría sentido necesidad de un concepto tan complicado como el de proporción. Euclides podría haber dicho más simplemente, 'la razón de A y B es igual a la razón de A' y B', si existen dos enteros m, n tales que $nA = mB$ y $nA' = mB'$'. Y en efecto podría afirmarse siguiendo el mismo hilo de argumentación, que el libro X de *Los Elementos* también trata de razones entre magnitudes *inconmensurables*, las cuales corresponderían a un caso diferente, vale decir el de los números irracionales. Pero Dedekind insistió en afirmar, que en tanto el principio de continuidad no ha sido mencionado explícitamente en la definición del dominio de magnitudes en cuestión, el correspondiente dominio de números permanece incompleto, vale decir, discontinuo. En particular, es imposible formular definiciones generales de las operaciones aritméticas definidas sobre dichos números; en tales dominios 'no completos' no puede decirse con seguridad que la adición, la substracción, etc., de dos números propiamente definidos, en realidad existan. Y si a sabiendas renunciamos a suministrar definiciones consistentes de las operaciones aritméticas básicas, agregó Dedekind, entonces podemos decir desde un principio "definimos el producto $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ como el número $\sqrt{6}$ y por tanto $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Q.E.D."

Luego, concluyó Dedekind, se puede afirmar que sin establecer de antemano el principio de continuidad (el cual de hecho está ausente de la teoría de Eudoxio-Euclides) no es posible desarrollar una teoría completa de números reales, definiéndolos como la colección de todos los cocientes de magnitudes homogéneas. La teoría de las cortaduras, por el contrario, sí suministra el marco adecuado para desarrollar dicha teoría de los reales.

El argumento descrito en los párrafos anteriores no bastó para convencer a Lipschitz. Lipschitz escribió nuevamente a Dedekind [Dedekind Werke III, 476-77] replicando, que al hablar de magnitudes Euclides estaba pensando en segmentos claramente definidos de la recta. Para tales segmentos, afirmó Lipschitz, el principio de continuidad es obvio, pues no puede pensarse en una línea recta que no lo satisface. Esta es la razón por la cual Euclides no se molestó en formular el principio explícitamente, pero es obvio que lo tomó por supuesto.

El 7 de julio Dedekind volvió a escribir a Lipschitz, declarando nuevamente su opinión sobre la innovación de Euclides [Dedekind Werke III, 477-78]. Las suposiciones de Euclides, tal y como Dedekind las había descrito en su carta anterior, constituyen una base legítima para tratar proporciones, tal y como Euclides mismo lo hizo en *Los Elementos*. Sin embargo, no es posible construir sobre ellas toda la aritmética, y es claro, escribió Dedekind, que *no* es esto lo que Euclides mismo intentó hacer [Dedekind Werke III, 477]. Si Euclides hubiese querido llegar más lejos de lo que llegó en su teoría, y si hubiese confrontado problemas en los cuales las consideraciones de continuidad juegan un papel central, es claro que no habría considerado superfluo explicitar el axioma de continuidad. Si Euclides no encontró superfluo incluir entre las suposiciones explícitas del libro V, la muy simple propiedad mencionada en la definición 4, ["dícese de dos magnitudes que están en razón, si es posible, al tomar un múltiplo de la una, sobrepasar la otra"], es entonces obvio que también incluiría el más complicado principio de continuidad, si hubiese sido consciente del papel que éste último juega [Dedekind Werke III, 478].

Más aún, Dedekind también respondió a la afirmación de Lipschitz, que no es posible imaginar una recta que no satisface el principio de continuidad. Primero, escribió Dedekind, con este mero decir Lipschitz estaba proponiendo basar la aritmética de los reales en intuiciones geométricas, mientras que la propia razón de ser de la teoría de cortaduras era lograr lo contrario, vale decir, eliminar toda intuición geométrica de los fundamentos del cálculo. Segundo, aún queriendo adoptar el punto de vista de Lipschitz, la afirmación anterior seguiría siendo incorrecta: es posible concebir, no tan sólo la recta, sino el espacio en su totalidad como discontinuo. De hecho, Dedekind ya había expuesto esta idea en *Continuidad y números irracionales* [Dedekind Werke III, 323]. Dedekind avanzó la idea de un concepto general de espacio independiente de la propiedad de continuidad. Si tomamos ese concepto general de espacio y exigimos que cumpla además el axioma de continuidad, obtenemos el caso particular del espacio continuo. Dedekind preguntó entonces ¿qué tipo de espacio fue el que Euclides consideró en *Los Elementos*? Para responder a esta pregunta, Dedekind analizó todas las suposiciones, tanto explícitas como implícitas de Euclides concerniendo al espacio, y llegó a la conclusión que la continuidad del espacio no aparece entre ellas, y que el sistema de Euclides permanece igualmente válido sin tal principio.

Aunque Dedekind no incluyó los detalles del análisis efectuado sobre los postulados de Euclides, agregó en su carta un comentario extremadamente interesante. Dedekind escribió a Lipschitz que había desarrollado un 'método infalible' de análisis que permitía especificar las suposiciones, tanto implícitas como explícitas subyacentes a cualquier sistema de postulados, y permitía determinar si la omisión de una suposición particular sacudiría totalmente el edificio conceptual examinado. Dedekind [Werke III, 479] detalló en ese respecto:

> Un método infalible para realizar tal análisis consiste en sustituir todas las expresiones que denotan conceptos por nuevas palabras escogidas al azar (y hasta ahora faltas de sentido). Si el edificio conceptual está correctamente construido, debe quedar intacto a pesar del cambio.

Este pasaje ha venido a ser considerado como la primera formulación explícita y la primera aplicación consistente del así llamado 'método axiomático moderno'.[12] Recientes estudios sobre la obra euclideana muestran que el trabajo pionero de Dedekind y sus conclusiones fueron totalmente correctos.[13] Dedekind no sólo entendió claramente las diferencias motivacionales de su teoría y de la de Eudoxio-Euclides, sino que supo indicar precisamente en qué punto su teoría podía suministrar

---

12 La primera en llamar la atención a este hecho fue Emmy Noether, quien contribuyó más que nadie a diseminar la obra de Dedekind. Su opinión a este respecto ha sido insistentemente repetida desde entonces. Véanse sus comentarios editoriales en Dedekind Werke III, 334.

13 Véanse, por ejemplo, Beckmann 1967, Krull 1971 y Mueller 1981.

respuestas que la teoría de Eudoxio no suministraba, y cuál era la base lógica de esta diferencia.

6. Otros sistemas numéricos en la obra de Dedekind

Podemos analizar todavía una última perspectiva desde la cual considerar el trasfondo motivacional de la teoría de Dedekind, y que acentúa aún más su divergencia de las motivaciones conducentes a la teoría de Eudoxio. Dicha perspectiva no se menciona explícitamente en los trabajos de Dedekind, ni con relación a Eudoxio, ni en ningún otro contexto, mas emerge claramente al considerar la teoría de cortaduras de Dedekind en conjunto con sus otros trabajos de fundamentación de los diferentes sistemas numéricos. De hecho, la teoría de cortaduras es una de tres teorías que Dedekind desarrolló con el fin de elucidar preguntas fundamentales asociadas a tres diferentes sistemas de números. Fuera del problema de la continuidad en el sistema de los números reales, Dedekind también analizó el sistema de los números naturales y el de los números algebraicos. Las teorías desarrolladas en el marco de dichos análisis, aunque difiriendo en sus detalles técnicos, presentan importantes similaridades que permiten verlas como un intento global de analizar el concepto de número en sus varias manifestaciones, basándose —implícitamente— en la idea de conjunto o colección.[14]

A cada uno de los sistemas de números antes mencionados, puede asociarse una particular pregunta fundacional, que venía ocupando ya algún tiempo a los matemáticos, y que Dedekind en alguna fase de su carrera decidió abordar: la continuidad de los reales, el tipo de orden de la sucesión de los números naturales, y el problema de la factorización única en el dominio de los números algebraicos. Para cada uno de estos dominios, Dedekind desarrolló una nueva teoría, centrada en un concepto específico. 'Cortadura' es el concepto central de la teoría desarrollada por Dedekind a fin de confrontar el problema de la definición de los reales, sus propiedades y operaciones, así como el concepto de continuidad característico de este sistema. Las cortaduras son definidas como ciertas colecciones de racionales que satisfacen dos condiciones previamente establecidas. Fuera de esas dos condiciones explícitas, Dedekind también asumió implícitamente que la totalidad de las colecciones en cuestión forman un sistema totalmente ordenado con respecto a la inclusión de clases, así, dadas dos cortaduras (A_1, B_1) y (A_2, B_2) se admite que debe cumplirse una de las dos condiciones:

14 Esta interrelación ha sido descrita en Mehrtens 1982 y Pla i Carrera 1993. Un recuento detallado, en los términos sugeridos en lo que sigue, aparece en Corry 1994, Cap. 3.

A_1 está incluido en A_2 o A_2 está incluido en A_1. Los conceptos desarrollados para elucidar los otros dos problemas fundacionales, el concerniente a los números naturales y el concerniente a los números algebraicos, pueden ser descritos en términos similares a los usados en el presente párrafo.

A fin de elucidar la esencia de la secuencia de los números naturales, Dedekind introdujo el concepto de 'cadena' (*Kette*) en su igualmente conocido libro *¿Qué son y qué deben ser los números?* [Dedekind 1888]. Se suele presentar la caracterización de los naturales en términos de cadenas como idéntica a la definición axiomática de los naturales sugerida por Giuseppe Peano. Esto puede ser cierto a nivel estrictamente formal, pero una vez más, esta caracterización no hace justicia al verdadero espíritu de la definición de Dedekind. Basta con cerciorarse, para entender la diferencia entre los dos puntos de vista, que la definición de Dedekind no incluye la idea de 'número' o 'sucesor', centrales al tratamiento de Peano. Para definir cadenas, concepto central de su teoría de los números naturales, Dedekind comienza con colecciones abstractas y considera sus imágenes bajo una función dada. Luego, analiza las propiedades de inclusión de las colecciones formadas por dichas imágenes.[15] Siguiendo a Dirichlet, Dedekind definió una aplicación (*Abbildung*) tal y como se define función en el presente [Dedekind 1888, 348]. Ahora, dada una aplicación de una colección K en sí misma, denotemos por K' la imagen de K bajo tal aplicación. La aplicación en cuestión se llamará cadena si y sólo si K' es una subcolección propia de K. Dada una subcolección cualquiera A de K, la cadena de A (denotada por A_0), se define como la intersección de todas las cadenas cuyas imágenes contienen a A. Esta definición permitió a Dedekind caracterizar el sistema de los números naturales, deducir las propiedades de sus operaciones, y lo más importante, justificar consistentemente su estructura de orden tal y como la usamos en la aritmética. Nótese la semejanza del tipo de definición aquí envuelto con la definición de cortadura: una cadena se define en base a propiedades de inclusión de ciertas colecciones dadas.

Algo muy parecido puede decirse del trabajo de Dedekind concerniente a los números algebraicos y al problema fundamental relacionado con dicho sistema —el problema de la factorización única—. El problema de factorización única en los números algebraicos había sido estudiado con anterioridad por Edward Ernst Kummer, quien desarrolló

15 Un breve recuento de la formulación de Dedekind aparece en Wang 1957, 150 ss. Wang, sin embargo, no enfatiza debidamente las diferencias entre los puntos de vista y las formulaciones de Dedekind y de Peano.

a tal fin su teoría de 'números primos ideales'. Esta teoría, sin embargo, resultó ser un tanto limitada en su alcance, y varios matemáticos trataron de formular una teoría más general, que ofreciese soluciones para aquellos casos en que la teoría de Kummer se mostraba insuficiente. Dedekind fue uno de estos matemáticos, y su exitoso punto de vista se adoptó con posterioridad, aunque no inmediatamente, por la mayor parte de los matemáticos que trabajaban en este campo. Dedekind atacó el problema construyendo una nueva teoría centrada en el concepto de 'ideal', que como veremos ahora presenta muchas similaridades con los otros dos conceptos antes discutidos.[16]

Para resolver el problema de factorización única, Dedekind se vio en necesidad de generalizar el concepto de factor primo. Esto lo hizo de manera típica a su metodología: Dedekind aisló las propiedades características del fenómeno, y creó un nuevo concepto al transformar estas *propiedades en definición*. Ya vimos este tipo de técnica aplicado en el caso de las cortaduras. Dedekind sugirió que el fenómeno de la factorización puede ser elucidado al estudiar las propiedades características de la colección de los múltiplos de un número dado. Tomemos un número racional cualquiera δ, y consideremos la colección $i(\delta)$ de todos los enteros divisibles por δ. Esta colección satisface las siguientes dos simples propiedades

a. Si α y β pertenecen a A, entonces $\alpha + \beta$ y $\alpha - \beta$ pertenecen también a A,

y

b. Si β pertenece a A y x es un entero cualquiera, entonces βx pertenece también a A [Dedekind 1871, 258].

Dedekind define ahora un ideal como toda colección de números que satisface estas dos condiciones (a) y (b). Obviamente, todo entero define un ideal, el ideal 'principal' $i(\delta)$, pero Dedekind mostró que existen otros ideales que no son ideales principales [Dedekind 1871, 271]. Recuérdese que una consideración similar permitió a Dedekind explicar en qué sentido los números reales forman un continuo, mientras que los racionales no. No es éste el marco adecuado para explicar en qué forma permite la teoría de ideales resolver el problema de la factorización única. Bastará, sin embargo, para los propósitos presentes mencionar que, en efecto, la teoría ayudó a Dedekind a resolver el problema y a definir en forma general las condiciones de factorización única en un dominio cualquiera de enteros algebraicos. Los ideales, concepto

16. Para una descripción detallada del trasfondo histórico de la teoría de ideales véase Edwards 1980.

central a la solución de Dedekind, se asemejan a las cortaduras y las cadenas en su definición en términos de colecciones de números y en que las demostraciones en que Dedekind usó el concepto explotan las condiciones de inclusión de las colecciones consideradas.

Vemos así que el concepto de cortadura de Dedekind responde a una motivación general que pervade sus varios trabajos fundacionales concernientes a los sistemas numéricos. El concepto de cortadura no puede verse, desde esta perspectiva, como un refinamiento de la definición euclideana de proporción, sino como un caso específico de una tendencia mucho más general que guió una parte esencial de la creación matemática de Dedekind.

8. Conclusión

Es posible establecer una equivalencia formal parcial entre la teoría de proporciones de Eudoxio y la teoría de cortaduras de Dedekind. Sin embargo, existen divergencias fundamentales entre ambas teorías, que el análisis histórico tiene el deber de establecer y remarcar.

Una fuente histórica central para entender la divergencia entre ambas teorías se encuentra en los pronunciamientos —arriba descritos y discutidos— del propio Dedekind sobre el asunto y, sobre todo, en su detallado análisis axiomático de la teoría de Eudoxio. Más aún, al examinar el significado de la teoría de cortaduras de Dedekind como un caso particular dentro de una mucho más amplia elucidación del concepto de número en sus varias manifestaciones entendemos con mayor claridad la motivación básica que guió a Dedekind al desarrollar su teoría de cortaduras como instrumento de elucidación del sistema de números reales.

En vista de esto, afirmar, basado tan sólo en una equivalencia formal, que la teoría de Eudoxio y la de Dedekind son una sola y la misma, y que la contribución de Dedekind se manifiesta tan sólo en cambios de estilo y en refinamiento de la formulación, implica una desvirtuación histórica de los aportes de estos dos científicos al desarrollo de las ideas matemáticas. Tales aportes pueden ser comprendidos en su justo valor sólo al considerar ambas teorías dentro de sus respectivos marcos conceptuales históricamente localizados, y no como sistemas de ideas intemporales sin connotación fuera del ámbito formal.

Referencias

BECKER, O. 1954. *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. München.

BECKMANN, F. 1967. "Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids". *Archive for History of Exact Sciences* 4: 1-144.

BIERMANN, K. R. 1971. "Dedekind (Julius Wilhelm) Richard". *Dictionary of Scientific Biography* 4: 1-5.

CANTOR, G. 1872. "Über die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reihen". *Mathematische Annalen* 5: 92-102.

CORRY, L. 1994. *Algebra between Numbers and Structures - An Outline of the Rise of the Structural Approach to Algebra*. (Por aparecer)

DAUBEN, J. 1984. "El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana". Contenido en Ivor Grattan-Guinness (Ed.). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial. (Col. Alianza Universidad No. 28. Traducción de Mariano Martínez Pérez). Pp. 235-282. [Ivor Grattan Guiness (Ed.). *From the Calculus to Set Theory. 1630-1910. An introductory history*. London: Duckworth. 1980]

DEDEKIND, R. Werke. *Gesammelte mathematische Werke*. Braunschweig. Editado por Robert Fricke, Emmy Noether y Oystein Ore (1930-32). 3 Vols.

__________. 1871. "Über die Komposition der binären quadratischen Formen". Reimpreso en Richard Dedekind. Contenido en Dedekind Werke III, 223-261.

__________. 1872. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig. (Reimpreso en Dedekind Werke III, 315-334.)

__________. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen*. Braunschweig. (Contenido en Dedekind Werke III, 335-391.)

DRAKE, S. 1987. "Euclid Book V from Eudoxus to Dedekind". *History in Mathematics Education*, Paris, 52-56.

DUGAC, P. 1976. *Richard Dedekind et les fondements de l'analyse*. Paris: Vrin.

EDWARDS, H. 1980. "The Genesis of Ideal Theory". *Archive for History of Exact Sciences* 23: 321-378.

FERREIRÓS, J. 1993. "On the Relations between Georg Cantor and Richard Dedekind". *Historia Mathematica* 20: 343-363.

FOWLER, D. H. 1979. "Ratio in Early Greek Mathematics". *Bulletin of the American Mathematical Society* 1 (NS): 807-835.

__________. 1992. "Dedekind's Theorem: $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$". *American Mathematical Monthly* 99: 725-733.

HEATH, T. L. (Ed.). 1926. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Traducción e introducción de Sir Thomas L. Heath. 3 Vols. Segunda edición no reducida. Reimpreso en 1956. New York: Dover.

JONES, C. V. 1987. "Las paradojas de Zenón y los fundamentos de las matemáticas". *Mathesis* 3: 3-14.

__________. 1987a. "La influencia de Aristóteles en el Fundamento de *Los Elementos de Euclides*". *Mathesis* 3: 375-387.

KNORR, W. 1975. *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht: Reidel.

KRULL, W. 1971. "Zahlen und Größen - Dedekind und Eudoxus". *Mitteil. Math. Seminar Giessen* 90: 29-47.

MEHRTENS, H. 1982. "Richard Dedekind, der Mensch und die Zahlen". *Ab. Braunsch. Wiss. Ges.* 33: 19-33.

MUELLER, I. 1981. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Cambridge, Mass: MIT Press.

PLA I CARRERA, J. 1993. "Dedekind y la Teoría de Conjuntos". *Modern Logic* 3: 215-305.

STEIN, H. 1990. "Eudoxos and Dedekind: On the Ancient Greek Theory of Ratios and its Relation to Modern Mathematics". *Synthese* 84: 163-211.

UNGURU, S. 1975. "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics". *Archive for History of Exact Sciences* 15: 67-114.

———. 1985. "Digging for Structure into the *Elements*: Euclid, Hilbert, and Mueller" [Reseña de Mueller 1981]. *Historia Mathematica* 12: 176-184.

———. 1991. "Greek Mathematics and Mathematical Induction". *Physis* 28: 273-289.

UNGURU, S. y D. Rowe. 1981. "Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of 'Geometric Algebra', 'Application of Areas', and Related Problems". *Libertas Mathematica* 1: 1-49 & 2. (1982) 1-62.

WANG, H. 1957. "The Axiomatization of Mathematics". *Journal of Symbolic Logic* 22: 145-158.

Leo Corry se licenció en Matemáticas en la Universidad Simón Bolívar (Caracas, Venezuela) y se doctoró en Historia y Filosofía de la Ciencia en la Universidad de Tel Aviv (Israel), con una tesis sobre los orígenes de la Teoría de Categorías. Actualmente investiga la historia del álgebra en los siglos XIX y XX, habiendo publicado recientemente en *Studies in History and Philosophy of Science*, *Synthese* y *Llull*. También ha publicado trabajos sobre literatura hispanoamericana moderna (recientemente en *Poetics Today*) y traducciones de ese género al hebreo.