Teoremas matemáticos y teorías físicas

León Brillouin

1. *Distinción necesaria entre las matemáticas y las ciencias físicas*

La teoría de la información suscita muchas cuestiones fundamentales acerca de los primeros postulados de la ciencia y los límites de su validez. Como ejemplo de estos problemas, examinemos las opiniones de un matemático puro y de un físico acerca de los fundamentos de la geometría. El matemático parte de puntos sin dimensión, de curvas y superficies infinitamente delgadas y de un continuo espacio-tiempo. La ciencia atómica niega el significado real de estas definiciones.

Tomemos una hoja muy delgada de papel de estaño y observémosla con rayos X; descubriremos un enrejado atómico formado por átomos aislados, separados por grandes intervalos vacíos. La hoja tiene un espesor finito y no es continua. Hasta una capa monomolecular muestra propiedades similares.

No existe en absoluto la posibilidad de medir una distancia mucho más pequeña que 10^{-13} cm, simplemente porque no hay una vara de medir con órdenes de magnitud tan pequeñas. Supongamos que quisiéramos medir 10^{-50} cm; el único patrón de longitud que podríamos usar sería una longitud de onda λ de un orden de longitud comparable. No habría gran diferencia entre la elección de una onda de luz o de cualquier tipo de onda de De Broglie o de Dirac. Los cuantos de energía serían del orden de magnitud:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \simeq \frac{2.10^{-16}}{10^{-50}} = 2.10^{34} \text{ C.G.S.} \qquad (1)$$

Esto representa una cantidad fantástica de energía, capaz de hacer volar el laboratorio y toda la Tierra. Usemos la relación de Einstein para calcular la masa M que quedaría totalmente aniquilada en un solo golpe:

$$Mc^2 = E$$

$$M = \frac{2.10^{43}}{9.10^{20}} \simeq 2.10^{22} \text{ gramos} = 2.10^{19} \text{ kg} = 2.10^{16} \qquad (2)$$

toneladas métricas.

Cada interacción entre esa onda y cualquier sistema físico implicaría al menos uno de esos cuantos ya sea absorbido o emitido, y provocaría una catástrofe inmediata.

No es necesario decir que este pequeño cálculo es suficiente para comprobar la imposibilidad absoluta de medir 10^{-40} cm; y, si nosotros no podemos medirlos, un físico nunca se atreverá a hablar de ello. Un matemático sigue adelante sin darse cuenta siquiera del obstáculo, simplemente lo ignora por completo.

El matemático define muy cuidadosamente los números irracionales. El físico nunca se encuentra con esos números, todo lo que él mide está representado por un número finito, con varias cifras y con cierta cantidad de incertidumbre. El matemático tiembla ante la incertidumbre y trata de ignorar los errores experimentales.

Si abrimos un libro de matemáticas puras y examinamos un teorema, vemos que éste siempre está construido sobre un esquema típico: dadas ciertas condiciones A, B, C, que supuestamente se cumplen exactamente, se puede demostrar con rigor que la conclusión Q debe ser verdadera. Aquí el físico comienza a preguntarse cómo podemos saber que A, B y C se cumplen *exactamente*. Ninguna observación nos puede decir esto; lo único que podemos saber es que A, B y C se satisfacen aproximadamente dentro de ciertos límites de error. Entonces, ¿qué es lo que prueba el teorema? Errores muy pequeños de A, B o C pueden producir un error muy pequeño de la proposición final Q, o pueden destruirla por completo. La discusión no está terminada hasta que no haya sido investigada la estabilidad del teorema; y ésta es otra cuestión.

2. *Formulaciones básicas en las matemáticas*

Históricamente, las matemáticas fueron en su origen una codificación de las observaciones experimentales, pero progresivamente se constituyeron en un cuerpo independiente de conocimientos. La geometría se inició como un conjunto de reglas para medir la Tierra, para uso de los agrimensores. Entonces se aproximaba a la geografía y a la geología, pero ahora el enfoque se ha invertido y la geometría se basa en un sistema de postulados sin referencia a un significado físico. La mecánica clásica se organizó en una forma semejante, pero no podía mantenerse en esa camisa de fuerza. Había que hacer una "revaluación dolorosa", una elección entre la lógica matemática y la aplicación física; los experimentos físicos hicieron explotar la coraza rígida de las matemáticas estrictas.

Durante los últimos siglos, los filósofos tuvieron una actitud tradicionalista ante los problemas científicos; supusieron que la geometría teórica representaba el conocimiento científico perfecto, la mecánica se acercaba a la perfección y la física no estaba muy lejos de ella. Este esquema infantil no se puede mantener actualmente y debemos señalar la diferencia estructural o fundamental entre las teorías matemáticas y las físicas (o químicas y biológicas). Hay un abismo, entre ambos métodos, que se ensancha día a día. Las bombas atómicas y los viajes espaciales están impidiendo salvar el abismo.

El método típicamente matemático puede resumirse en la forma siguiente: parte de algunas ideas y esquemas generales sugeridos por la observación, mas pronto se olvida de su origen y pasa a la simplificación, reduciendo el punto de partida a un conjunto de postulados áridos y de especificaciones secas de las reglas que han de aplicarse; no hace referencia a ningún resultado empírico. Hasta los métodos lógicos se definen sin ninguna semejanza estricta con la lógica habitual; las únicas limitaciones están contenidas en pruebas de "completitud" y de "falta de contradicciones" en las definiciones básicas. De ahí el razonamiento prosigue siempre adelante, sin discutir el valor práctico ni las posibles aplicaciones. Se asemejan a la casuística escolástica y aspiran a la certeza absoluta. Las matemáticas podrían describirse como las primeras de las artes *"no objetivas"*, que atraen la admiración de muchos poetas. El famoso poeta francés Paul Valéry confesó su gran respeto por la geometría abstracta; su arquitectura etérea, construida con fría lógica, y su rigidez estricta, le fascinaban. Admiraba la magia irreal de su irresponsabilidad absoluta.

Un texto de matemáticas se presenta como una sucesión de lemas, teoremas y corolarios; se lee como un poema épico divique en estrofas y versos. Esta organización maravillosa es muy impresionante, pero en su mayor parte resulta artificial. En un principio, el artista descubre en las matemáticas algunas relaciones curiosas, propiedades nuevas que parecen estar desconectadas; paso a paso, se las arregla para reunir esos trozos de conocimiento y agruparlos lógicamente, de acuerdo con las normas establecidas, en una sucesión de teoremas. Éste es el estilo matemático, el arte de escribir que fue adoptado por Spinoza en su *Ética* para los problemas filosóficos.

Una teoría matemática no impone límite alguno a su dominio de aplicación y no tiene temor de definir la infinitud. Si el dominio es infinito, también lo es la exactitud. Hablemos ahora de la *información*, de acuerdo con nuestras definiciones anteriores: el dominio P_0 es infinito, el punto P_1 es precisamente 1 y la

$$\text{Información } I = k \ln \frac{P_0}{P_1} = k \ln \infty = \infty \qquad (3)$$

Las demostraciones, pruebas y teoremas nuevos, etcétera, no pueden modificar el resultado. Se supone en un principio una información infinita y ninguna cosa que hagamos puede cambiarla. Este extraño resultado ya fue observado por algunos matemáticos famosos. Carnap y Bar-Hillel expresaron esta paradoja muy claramente (véase Brillouin, 1956, 1962, capítulo 20, página 298).

3. *El punto de vista de los científicos experimentales*

El matemático sueña con mediciones de exactitud infinita; con definir, por ejemplo, la posición de un punto sin ningún error posible. Esto significaría un experimento que produjera una cantidad infinita de información, lo cual es físicamente imposible. Uno de los resultados más importantes de la teoría de la información se conoce como el "principio de anentropia de la información", expresando que cualquier información obtenida en un experimento deberá pagarse en anentropia. Como ha dicho D. Gabor: "No se puede obtener algo por nada, ni siquiera una observación." Si un experimento suministra una información ΔI, debe haber habido un incremento de entropía

$$\Delta S \geq \Delta I \qquad (4)$$

en el aparato o en el laboratorio en donde se llevó al cabo el experimento. Un incremento ΔS en la entropía significa un decremento

$$\Delta N = -\Delta S \tag{5}$$

en la "anentropía" total. La información ΔI se paga con una cantidad mayor ΔN de anentropía.

$$\Delta N + \Delta I \leq 0 \tag{6}$$

Una gran cantidad de información tendrá un precio muy alto y una cantidad infinita de información es inasequible, porque no hay riqueza capaz de pagarla. Otro punto importante se refiere más específicamente a la definición de un continuo en el espacio-tiempo. La discusión que se bosqueja en la primera sección de este capítulo se ha examinado detalladamente (L. Brillouin, 1956 o 1962, capítulo 16) y conduce al resultado de que la medición de una longitud muy pequeña Δx (por longitud muy pequeña entendemos una longitud más pequeña que 10^{-13} cm) requiere el uso de una energía total ΔE tal que

$$\Delta E \Delta x \cong \tfrac{1}{2}hc. \tag{7}$$

Esto representa una nueva limitación, diferente del principio de incertidumbre y completamente independiente de las condiciones especificadas en la ecuación (4). No se pueden medir distancias extremadamente pequeñas, a menos que se use una fuente de energía muy alta. Esta energía no puede disiparse por completo, porque es necesaria para el experimento.

Ambos resultados conducen a conclusiones semejantes: una cantidad infinita de información nunca puede obtenerse. Una distancia infinitamente pequeña no puede medirse. Las definiciones matemáticas y geométricas no son más que sueños en los que no puede confiar el físico y haremos especial hincapié en la imposibilidad de definir físicamente un continuo en el espacio y el tiempo.

En la sección I de este escrito hicimos notar la completa carencia de significado que tienen para un físico los números irracionales. Los números irracionales supuestamente se conocen con exactitud infinita, aunque no son suficientes para expresarlos cien, un millón o un billón de posiciones decimales. Todo esto carece absolutamente de significado para el experimentador; éste puede medir hasta cinco, o tal vez hasta diez posiciones decimales, pero no hay un solo experimento que pueda producir veinte posiciones decimales. No tiene sentido preguntar si la velocidad de la luz c es un número racional, o si es racional la razón M/m, de la masa del protón M respecto a la masa del electrón m. Todos los números irracionales, como π, e, $\sqrt{2}$, etcétera, resultan sólo de las definiciones matemáticas abstractas; pero, como dijimos, las matemáticas son un arte no objetivo. Ningún objeto físico puede mostrar propiedades geométricas reales hasta el límite supuesto por los matemáticos, al que podemos llamar "optimismo exagerado".

4. *La opinión de Max Born*

No es necesario repetir aquí muchos otros comentarios y explicaciones. Recordemos solamente que el principio de anentropía de la información da un significado preciso a la vieja observación de J. von Neumann, quien dice que una observación es un proceso irreversible. La condición (4) especifica la cantidad de irreversibilidad.

Puede ser de interés citar a otro autor, Max Born y discutir una serie de trabajos que publicó hace algunos años. En el Volumen Jubilar (Born, 1955), dedicado a Niels Bohr en su septuagésimo aniversario, bajo el título de "Continuidad, determinismo y realidad", Max Born presenta algunos comentarios generales muy cercanos a los nuestros, aunque su línea de pensamiento es diferente:

> Sostengo que el concepto matemático de un punto en un continuo no tiene significado físico directo. No tiene sentido decir que una coordenada x ... tiene un valor $x = \sqrt{2}$ de pulgada o que $x = \pi$ cm.

(Aquí se acaba con los números irracionales.)

> La física moderna ha obtenido sus mayores éxitos aplicando el principio metodológico de que los conceptos que se refieren a distinciones que rebasan la experiencia posible, no tienen significado físico y deberían ser eliminados ... Los casos de más éxito son el fundamento de la relatividad de Einstein, basado en el rechazo del concepto del éter ... y el fundamento de Heisenberg para la mecánica cuántica ... *Pienso que ese principio debería aplicarse también a la idea de continuidad física.*

Max Born también explica que los errores experimentales deberían tomarse en cuenta desde un principio, en el campo de la física clásica, en donde con tanta frecuencia han sido olvidados.

Born no trata de rechazar el concepto matemático de número real, pero especifica que "la situación exige una descripción de vaguedad". Debería especificarse la probabilidad de que una cantidad física se dé en un intervalo dado, en lugar de pretender que el valor de la cantidad pueda conocerse con exactitud.

Born volvió sobre estos problemas en trabajos posteriores y, finalmente, en un informe muy interesante (1961) publicado en el Volumen Jubilar dedicado a W. Heisenberg en su sexagésimo aniversario. Se refiere ahí a algunos trabajos del autor y concuerda por completo con nuestro punto de vista. El lector encontrará en este último trabajo muchas observaciones importantes.

Habría que dar aquí muchos ejemplos de los que discute Born, pero que esperamos que el lector recurra a los trabajos originales.

Recordemos que el principio general al que alude Born es el que se suele citar como punto de vista *operacional* de Bridgman.

5. *¡El cliente experimental siempre tiene la razón*

Algunos ejemplos nos pueden ayudar a especificar con mayor claridad la oposición entre las matemáticas y la física teórica. Así aparecerá a plena luz el contraste.

Una teoría matemática puede construirse con cualquier conjunto de definiciones, por arbitrarias o fantásticas que éstas sean. La única condición que se impone es la ausencia de contradicción interna y una estructura lógica.

Una teoría física se basa normalmente en unos cuantos resultados experimentales seleccionados, que no siempre están demasiado bien definidos desde el punto de vista de un matemático. Estos resultados se simplifican en primer término y se codifican, para introducirlos en un modelo que puede contener una buena cantidad de invención humana adicional originada en la imaginación del científico y no en hechos experimentales directos. Sobre esta base, no especificada lógicamente ni con demasiada precisión, se construye un sistema teórico y se hacen predicciones. La parte engañosa está en saber si estas predicciones están comprobadas por los experimentos con suficiente exactitud. Si es así, la teoría es buena, al menos como punto de partida, y puede desarrollarse con mayor eficacia. De lo contrario hay que tirar todo el sistema a la basura.

Volvamos al año 1913, cuando el autor estudiaba en Munich. En esa época, uno de los problemas más importantes para los teóricos era la conjugación de la primera teoría de la relatividad de Einstein con la teoría de la gravitación (atracción universal). Einstein establecía una velocidad máxima c para la propagación de cualquier propiedad física, mientras que la atracción universal, según había supuesto Newton, se propagaba instantáneamente a cualquier distancia. El famoso teórico alemán G. Mie, propuso una solución muy ingeniosa, introduciendo dos definiciones diferentes para la "masa inercial" m_i y la "masa gravitacional" m_g. Se suponía que ambas masas eran prácticamente iguales a velocidades bajas, pero que diferían a altas velocidades. La teoría era una pequeña maravilla y resultaba tan interesante desde el punto de vista de su estructura lógica, que A. Sommerfeld dedicó dos conferencias a discutirla en detalle. Sin embargo, fue un fracaso. Los experimentos no verificaban ninguna predicción. Nadie recuerda ahora la teoría de Mie; la relatividad generalizada de Einstein se basó en el supuesto de una sola masa y se enfrentó a todas las dificultades.

Hay centenares de ejemplos de este tipo. Muchos físicos e ingenieros trataron de expresar las ecuaciones de Maxwell en una forma completamente simétrica, con polos magnéticos individuales (los llamados monopolos) correspondientes a cargas eléctricas individuales. Tal cosa no tiene comprobación, aun cuando, todavía algún teórico famoso vuelva a hacer intentos. Las ecuaciones de Maxwell no son completamente simétricas.

La bioquímica tampoco es completamente simétrica y las rotaciones ópticas desempeñan en ella un papel fundamental, como lo hizo notar Pasteur. Hasta las partículas elementales muestran asimetrías extrañas, descubiertas por Lee y Yang. Las simetrías son realmente atractivas, pero resultan excepcionales en la observación real.

La lógica perfecta y la deducción infalible dan a la teoría una estructura muy agradable, pero ésta puede ser cierta o errónea; y sólo el experimentador, quien siempre tiene razón, puede decirlo.

En relación con los problemas que se examinan en esta presentación, el lector puede estar interesado en la aguda discusión de L. Tisza (1963), en la que encontrará muchas observaciones valiosas que se acercan mucho a nuestro punto de vista.

Para resumir toda la discusión, podríamos decir que una teoría matemática está construida a partir de ciertas premisas, mientras que una interpretación física se construye para alcanzar determinados resultados finales. Las matemáticas parten de los cimientos y la física teórica trata de obtener determinados hechos experimentales en la cumbre de toda la estructura.

REFERENCIAS

M. Born, "Physical reality", *Phil. Quart.*, 3, 1953, p. 139.

M. Born, "Continuity, determinism and reality", *Kgl. Danske Videnskab Selskab. Mat. fys. Medd.*, 30, núm. 2, 1955.

M. Born, "Bemerkungen zur statistischen Deutung der Quantenmechanik", en el Volumen Jubilar *Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit*, Braunschweig, Vieweg, 1961, pp. 103-118.

L. Brillouin, *Science and Information Theory*, primera edición Academic Press, Nueva York, 1956.

L. Brillouin, *Science and Information Theory*, 2ª edición, Academic Press, Nueva York, 1962.

L. Tisza, *Rev. Modern Phys.*, 35, 1963, pp. 151-184.